目　录

第一章　分析力学的基本概念

第三章 分析力学的各种运动微分方程

第四章 分析力学的某些专门问题

第六章 分析力学的张量方法

第七章 分析力学的外微分描述

第一章　分析力学的基本概念

分析力学的基本原理与基本运动微分方程都起源于某些基本概念，如约束、虚位移等。在这一章里，我们介绍约束、广义坐标、准坐标、虚位移、理想约束、交换关系等基本概念及其近代发展，最后给出一些历史资料。

§1.1　约束及其分类

本节讨论约束、约束方程、约束的分类、微分约束的可积性定理以及约束概念的近代推广等问题。

1.1.1　约束

研究质点系相对某个惯性坐标系的运动。

定义 1　在系统点的位置和速度上，事先加上一些几何的或者运动学特性的限制，我们把这些限制称为约束。

例如，火车被限制在铁轨上运动，铁轨是火车的约束。刚体内任意两点间的距离保持不变的条件是约束。这些约束是加在点的位置上的几何限制。冰刀运动的速度只能沿冰刀平面与冰面的交线上，这个约束是加在点的速度上的运动学限制。注意，约束是事先加上的限制，因此，当系统运动时，不论作用于其上的力和运动初始条件如何，这些限制都必须得到满足。

受到约束的系统称为非自由系统。反之，不受约束的系统称为自由系统。自由系统在主动力作用下可能在空间中任意运动。在同样主动力作用下，非自由系统与自由系统相比较，加在系统的点上的约束在某种程度上限制了系统的可能运动。

1.1.2 约束方程

一般的约束条件都可用约束方程或约束不等式来表达。这就需要根据已给条件，利用几何学和运动学知识来写出具体的数学表达式。

例 1 两个质点在半径为R的固定球面上运动，且两点间距离l保持不变。

以固定球面中心为原点，取一固定直角坐标系。设两质点在此坐标系中的坐标分别为(x_1, y_1, z_1)和(x_2, y_2, z_2)，于是两点间距离为常值l的条件可表为

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-l^2=0 \qquad (1.1.1)$$

而两点在半径为R的固定球面上的条件分别为

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2-R^2=0 \qquad (1.1.2)$$

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2-R^2=0 \qquad (1.1.3)$$

约束方程(1.1.1)、(1.1.2)和(1.1.3)就是加在该系统的点的位置上的几何限制。

例 2 两个质点用变长度$l=f(t)$的杆相联结，其中t为时间，f为t的函数。

设两质点在空间某固定直角坐标系中的坐标为(x_1, y_1, z_1)和(x_2, y_2, z_2)，则约束方程为

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-f^2(t)=0 \qquad (1.1.4)$$

例 3 在平面上运动的两个质点用不变长l的杆相联结，并且杆中点的速度沿杆方向。

设两个质点的坐标分别为(x_1, y_1)和(x_2, y_2)，则两点间距离为l的条件表为

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-l^2=0 \qquad (1.1.5)$$

而杆中点速度沿杆方向的条件可表为

$$\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{x_2-x_1}=\frac{\dot{y}_1+\dot{y}_2}{y_2-y_1} \qquad (1.1.6)$$

约束方程（1.1.5）是对点的位置的几何限制，而约束方程（1.1.6）则是对点的速度的运动学限制。

1.1.3 约束的分类

当应用基本原理推导系统运动微分方程时，约束本身的性质有极大影响。不仅系统运动的形式，而且为研究运动所选取的方法都依赖于约束的性质。因此，必须研究和区分约束的类型。可以按照各种特征将约束分类，例如，分为完整的与非完整的，定常的与非定常的，单面的与双面的，理想的与非理想的，等等。

1. 完整约束与非完整约束

研究由N个质点组成的力学系统，点的直角坐标为x_i，y_i，z_i，速度为$\dot{x}_i$，$\dot{y}_i$，$\dot{z}_i$（$i=1, \cdots, N$）。

定义 2 用点的直角坐标x_i，y_i，z_i和时间t的有限方程（非微分方程）表示的约束，称为几何约束。

例如，约束（1.1.1）—（1.1.5）都是几何约束。几何约束的一般形式可表为

$$F_\alpha(x_i, y_i, z_i, t)=0,$$
$$(i=1, \cdots, N;\ \alpha=1, \cdots, d<3N) \qquad (1.1.7)$$

当存在约束（1.1.7）时，系统不能在每一时刻在空间取任意位置；几何约束是在时刻t加在系统可能位置上的限制。

定义 3 用点的直角坐标x_i，y_i，z_i，速度$\dot{x}_i$，$\dot{y}_i$，$\dot{z}_i$和时间t表示的约束称为微分约束。

例如，约束（1.1.6）是微分约束。微分约束的一般形式为

$$F_\beta(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t)=0,$$
$$(\beta=1, \cdots, g\leqslant 3N;\ i=1, \cdots, N) \qquad (1.1.8)$$

约束（1.1.8）是加在系统中点的速度上的限制。

定义 4 几何约束和可积分的微分约束称为完整约束。

定义 5 不可积分的微分约束称为非完整约束。

定义 6 带有非完整约束的力学系统称为非完整系统。

微分约束是关于坐标的微分方程。关于可积性与不可积性的概念有两种不同的涵义：（1）找到在其变化的定义域中点的坐标之间的有限方程，使之等价于给定的微分方程；（2）找到作为时间函数的坐标 $x_i=x_i(t)$, $y_i=y_i(t)$, $z_i=z_i(t)$，使之满足用微分方程表示的给定的非完整约束。非完整约束在第一种涵义中是不可积的，在第二种涵义中是可积的[1]。本书采用第一种涵义。例如，约束

$$x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}=0 \qquad (1.1.9)$$

是完整的，因为由此可得到方程 $x^2+y^2+z^2=c$，即表示坐标之间不独立性的有限关系。这个完整约束表明，点的轨道应在球面上。非完整约束的不可积性是指不能找到坐标间的有限方程使之等价于给定非完整约束的微分方程。非完整约束在这种涵义下是不可积的，但同时可以找到满足非完整方程的点的轨道。例如，约束

$$\dot{y}-z\dot{x}=0 \qquad (1.1.10)$$

是非完整的，因为不能由式（1.1.10）得到关系

$$f(x,\ y,\ z)=c \qquad (1.1.11)$$

但可指出满足给定条件的点的轨道，例如

$$x=t^2,\ y=t^4,\ z=2t^2 \qquad (1.1.12)$$

实际上，这些函数使方程(1.1.10)成为恒等式，即运动（1.1.12）满足约束（1.1.10）。但是，不能在位形空间里指出一个确定的曲面，使满足约束（1.1.10）的所有轨道在此曲面上。

定义 7 在不可积的微分约束（1.1.8）中，如 F_β 对 $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ 是线性的，则称为线性非完整约束，否则称为非线性非完整约束。

线性非完整约束的一般形式为

$$\sum_{i=1}^{N}(A_{\beta i}\dot{x}_i+B_{\beta i}\dot{y}_i+C_{\beta i}\dot{z}_i)+D_\beta=0,$$

$$(\beta=1,\ \cdots,\ g) \qquad (1.1.13)$$

其中系数 $A_{\beta i}, B_{\beta i}, C_{\beta i}$ 和 D_β 是坐标和时间的函数。在 $D_\beta=0$ 的特殊情况下，约束（1.1.13）称为线性齐次非完整约束。约束（1.1.6）和（1.1.10）都是线性齐次非完整约束。

非线性非完整约束的著名例子是 Appell-Hamel 椅子轮，其约束方程为[2]

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\frac{a^2}{b^2}\dot{z}^2 \tag{1.1.14}$$

其中 a, b 为常数。约束（1.1.14）是非线性齐次非完整约束。非完整约束的其它例子参见文献[2]。

具有完整约束的系统与具有非完整约束的系统，在运动性质上和研究方法上都有着本质的差别。研究非完整系统要比研究完整系统复杂得多，困难得多。

2．定常约束与非定常约束

约束可分为依赖于时间的约束和不依赖于时间的约束。

定义 8 如果时间 t 不明显地出现于约束方程中，则称为定常约束，否则称为非定常约束。

定常的完整约束可表示点处在不随时间而变形且不随时间而移动的固定曲面上。例如，定常约束

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1.1.15}$$

表示点在半轴长为 a, b, c 的固定椭球面上。非定常的完整约束可表示点或者保持在随时间变形的曲面上，或者保持在随时间移动的曲面上。例如，非定常约束

$$\frac{x^2}{a^2t^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad (t>0) \tag{1.1.16}$$

表示点在运动过程中保持在椭球面上，但此椭球的一个半轴不断改变其量值，亦即点处在随时间而变形的椭球面上。又如，非定常约束

$$(x-5t)^2+y^2+z^2=R^2 \tag{1.1.17}$$

表示点在半径为R的球面上，但此球面的球心以5单位的速度沿x轴移动。

约束（1.1.6)、(1.1.10）和（1.1.14）都是定常的非完整约束。

关于非定常系统的更一般的几何解释，可在非定常几何学和非定常非完整几何学中查到[3]。

具有定常约束的系统与具有非定常约束的系统，在运动性质上和研究方法上都有着本质的差别。研究非定常系统要比研究定常系统复杂得多。

3．单面约束与双面约束

约束可分为用等号表示的约束和用不等号表示的约束。

定义 9 用方程（严格的等号）表示的约束，称为双面约束（也叫固执约束)。用不等号表示的约束，称为单面约束（也叫非固执约束)。

约束

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \tag{1.1.18}$$

是双面的、定常的完整约束，它表示点在每一时刻都在半径为R的球面上，既不能跑到球面的外部，也不能跑到球面的内部。点好像处于两个无限接近的球面之间，在两个方面都受到限制。

约束（1.1.6)、(1.1.10）和（1.1.14）是双面的定常的非完整约束。约束

$$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2 \tag{1.1.19}$$

是单面的定常的完整约束，它表示点或者处于半径为R的球面上，或者向球面的内部移动，但不能跑到球面的外部。即，在一个方面受到限制。

半径为a的球沿固定水平面滚动，接触点的滑动仅在x轴正向上发生[4]。这是一个单面的定常的非完整约束，可表为

$$\dot{x}-a(\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi)\geqslant0 \tag{1.1.20}$$

其中x为球心的一个坐标，ψ, θ, φ为 Euler 角。

研究单面约束系统要比研究双面约束系统复杂得多，困难得多。本书仅研究双面约束系统，对单面约束系统的动力学研究可参见文献[5]。

4．被动约束与主动约束

按约束的实现可分为被动约束与主动约束。被动约束是靠接触或摩擦被动地实现的。主动约束是靠辅助能源主动地实现的，如伺服约束。

1.1.4 微分约束的可积性定理

一个微分约束是否可积分为有限形式，这是个重要问题。如果可积，就是完整约束；否则，就是非完整约束。

首先，研究形如

$$A(x,y,z)\dot{x}+B(x,y,z)\dot{y}+C(x,y,z)\dot{z}=0 \tag{1.1.21}$$

的约束，它可写成微分形式

$$A(x,y,z)\mathrm{d}x+B(x,y,z)\mathrm{d}y+C(x,y,z)\mathrm{d}z=0 \tag{1.1.22}$$

取微分 1－形式 ω

$$\omega=A(x,y,z)\mathrm{d}x+B(x,y,z)\mathrm{d}y+C(x,y,z)\mathrm{d}z \tag{1.1.23}$$

命题 1 约束 $\omega=0$ 可积的充要条件是

$$\mathrm{d}\omega\wedge\omega=0 \tag{1.1.24}$$

其中 $\mathrm{d}\omega$ 为 ω 的外微分，$\wedge$为外积或楔积。

据外微分运算[6]，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega&=\mathrm{d}A\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}B\wedge\mathrm{d}y+\mathrm{d}C\wedge\mathrm{d}z\\&=\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\&\quad+\left(\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\end{aligned}$$

于是有

$$\mathrm{d}\omega\wedge\omega=\left[\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\right.$$

$$
+\left(\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\Big]\wedge(A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y+C\mathrm{d}z)
$$

$$
=\Big[A\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right)+B\left(\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}\right)
$$

$$
+C\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)\Big]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z
$$

因此，命题1的充要条件可写成

$$
A\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right)+B\left(\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}\right)+C\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)=0 \quad (1.1.25)
$$

推论 1 如果满足条件

$$
\frac{\partial B}{\partial z}=\frac{\partial C}{\partial y},\quad \frac{\partial C}{\partial x}=\frac{\partial A}{\partial z},\quad \frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial B}{\partial x} \quad (1.1.26)
$$

则约束（1.1.22）是可积的。

推论 2 如果满足条件

$$
\frac{\partial A}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial B}{\partial z}=0,\quad C=0 \quad (1.1.27)
$$

则约束（1.1.22）是可积的。

实际上，命题1中的变元 x, y, z 也可改为 x, y, t 或 y, z, t 等。

例 4 一质点沿平面运动，所受约束为

$$
\dot{y}=t\dot{x} \quad (1.1.28)
$$

试证约束（1.1.28）是不可积的。

〔证明〕 令 $\omega=t\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$，则 $\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x$，而

$$
\mathrm{d}\omega\wedge\omega=-\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\neq 0
$$

其次，令 $\xi_1=x_1$，$\xi_2=y_1$，$\xi_3=z_1$，…，$\xi_{3N-2}=x_N$，$\xi_{3N-1}=y_N$，$\xi_{3N}=z_N$，研究形如

$$
\sum_{i=1}^{3N}A_i(\xi_j)\dot{\xi}_i=0,\qquad (j=1,\ \cdots,\ 3N) \quad (1.1.29)
$$

的约束，它可写成微分形式

$$\sum_{i=1}^{3N} A_i \mathrm{d}\xi_i = 0 \tag{1.1.30}$$

取微分 1-形式

$$\omega = \sum_{i=1}^{3N} A_i \mathrm{d}\xi_i \tag{1.1.31}$$

命题 2 约束（1.1.30）可积的充要条件是

$$\mathrm{d}\omega \wedge \omega = 0 \tag{1.1.32}$$

据外微分运算，我们有

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial A_i}{\partial \xi_j} \mathrm{d}\xi_j \wedge \mathrm{d}\xi_i$$

于是

$$\mathrm{d}\omega \wedge \omega = \sum_{k=1}^{3N} \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^{3N} \left[A_k \left(\frac{\partial A_j}{\partial \xi_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \xi_j} \right) + A_i \left(\frac{\partial A_k}{\partial \xi_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \xi_k} \right) + A_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial \xi_k} - \frac{\partial A_k}{\partial \xi_i} \right) \right] \mathrm{d}\xi_i \wedge \mathrm{d}\xi_j \wedge \mathrm{d}\xi_k$$

而条件（1.1.32）可写成

$$A_i \left(\frac{\partial A_k}{\partial \xi_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \xi_k} \right) + A_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial \xi_k} - \frac{\partial A_k}{\partial \xi_i} \right) + A_k \left(\frac{\partial A_j}{\partial \xi_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \xi_j} \right) = 0, \quad (i, j, k = 1, \cdots, 3N) \tag{1.1.33}$$

推论 1 对约束（1.1.30），如有

$$\frac{\partial A_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial A_j}{\partial \xi_i}, \qquad (i = 1, \cdots, 3N) \tag{1.1.34}$$

则一定是可积的。

推论 2 如 $N=1$，则有命题 1。

实际上，命题 2 中的变元也可取为其它参数。

最后，研究形如

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{\beta i}(\xi_j) \dot{\xi}_i = 0, \quad (\beta = 1, \cdots, g; \ i, j = 1, \cdots, 3N) \tag{1.1.35}$$

的彼此独立的约束，它们可写成

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{\beta i}(\xi_j)\mathrm{d}\xi_i=0 \qquad (1.1.36)$$

取微分 1-形式

$$\omega_\beta=\sum_{i=1}^{3N} A_{\beta i}\mathrm{d}\xi_i \qquad (1.1.37)$$

命题 3 如果有

$$\Omega=\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_g\neq 0 \qquad (1.1.38)$$

那么 ω_1，…，ω_g 构成完全可积组的充要条件是[7]

$$\mathrm{d}\omega_\beta\wedge\Omega=0, \quad (\beta=1, \cdots, g) \qquad (1.1.39)$$

推论 当 $\beta=1$ 时，有命题 2 。

实际上，命题 3 中的变元也可取为其它参数。

例 5 试证沿粗糙水平面滚动的圆球所受约束是非完整的。

〔证明〕 圆球纯滚动条件为[2]

$$\dot{x}+a(\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta-\dot{\theta}\sin\psi)=0$$

$$\dot{y}+a(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\psi)=0$$

其中 x, y 为球心坐标，a 为球的半径，ψ, θ, φ 为 Euler 角。现将 x, y, ψ, θ, φ 取作命题 3 中的变元，取微分 1-形式

$$\omega_1=\mathrm{d}x+a(\mathrm{d}\varphi\cos\psi\sin\theta-\mathrm{d}\theta\sin\psi)$$

$$\omega_2=\mathrm{d}y+a(\mathrm{d}\varphi\sin\psi\sin\theta+\mathrm{d}\theta\cos\psi)$$

我们有

$$\begin{aligned}\Omega=\omega_1\wedge\omega_2=&\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+a(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}\varphi\sin\psi\sin\theta+\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}\theta\cos\psi)\\&+a(\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}y\cos\psi\sin\theta-\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}y\sin\psi)+a^2\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta\sin\theta\neq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega_1=a(&-\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\psi\sin\psi\sin\theta+\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta\cos\psi\cos\theta\\&-\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\psi\cos\psi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega_2=a(&\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\psi\cos\psi\sin\theta+\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta\sin\psi\cos\theta\\&-\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\psi\sin\psi)\end{aligned}$$

于是

$$\mathrm{d}\omega_1\wedge\Omega=a(-\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\psi\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\sin\psi\sin\theta$$

$$+\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\cos\psi\cos\theta-\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\psi\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\cos\psi)$$
$$-a^2\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\psi\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}y\sin\theta\neq0$$
$$\mathrm{d}\omega_2\wedge\Omega=a(\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\psi\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\cos\psi\sin\theta$$
$$+\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\sin\psi\cos\theta-\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\psi\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\sin\psi)$$
$$+a^2\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\psi\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}\theta\sin\theta\neq0$$

由命题 3 知，约束是非完整的。 ‖

1.1.5 约束概念的扩充

按定义 1，通常讲到的约束或是完整约束，或是形如(1.1.8)的非完整约束。但是，随着近代科学技术的发展，约束的概念也有了推广和扩充，主要表现在以下四个方面。

（1）将运动微分方程的第一积分当作非完整约束

力学系统运动微分方程的第一积分并不是事先加上的限制，而是作用力和运动初始条件的结果。但是，有许多人把第一积分当作非完整约束条件。

（2）可控系统当作完整系统或非完整系统

本世纪初就有人研究过包含伺服的约束，系统中有辅助能源，通过电磁的或气动的力，用某种方法来实现某些约束。这类约束与通常的约束有本质差别，称为第二类约束。有时在约束方程中出现控制参数，这类约束称为参数约束。以上两种情况都是可控系统。

（3）高阶非完整约束

定义 10 如果约束方程中仅包含点的坐标、速度和时间，但不包含点的加速度和坐标对时间的更高阶导数，这种约束称为一阶微分约束。如果约束不可积分，则称为一阶非完整约束。

由于力学本身以及自动调节、自动控制理论的发展，人们会遇到不仅包含点的坐标、速度，而且还包含点的加速度或坐标对时间的更高阶导数的制约关系，把这种限制表为

$$F_\beta(x_i,\ y_i,\ z_i,\ \dot{x}_i,\ \dot{y}_i,\ \dot{z}_i,\ \cdots,\ \overset{(m)}{x_i},\ \overset{(m)}{y_i},\ \overset{(m)}{z_i},\ t)=0,$$

$$(\beta=1,\cdots,g;\ i=1,\cdots,N) \qquad (1.1.40)$$

其中$\overset{(m)}{x_i}$, $\overset{(m)}{y_i}$, $\overset{(m)}{z_i}$分别为第 i 个点的坐标 x_i, y_i, z_i 对时间的m阶导数。

定义 11 称约束（1.1.40）为m阶微分约束。如果约束（1.1.40）是不可积分的，即不能找到函数 $\Phi_\beta(x_i, y_i, z_i, \cdots, \overset{(m-1)}{x_i}, \overset{(m-1)}{y_i}, \overset{(m-1)}{z_i}, t)$ 使其对时间 t 的导数等于 F_β，则称为m阶非完整约束。

例 6 一质点在空间中运动，它的运动受有一个约束

$$\ddot{z}=\ddot{x}\ddot{y}$$

这是一个二阶非完整约束。

（4）把加在动力学特性改变上的限制条件当作约束

近年新兴的学科——运动和过程的控制理论，是分析力学和变分法及其它学科之间的边缘学科。在这一学科中要研究加在动力学特性（质量、动量、能量等）改变上的条件，可以把这些条件当作约束来处理。

§1.2 广义坐标、广义速度和广义加速度

分析力学的特色之一，就是在研究力学系统运动时采用广义坐标的概念。

1.2.1 广义坐标

定义 1 凡是能够确定系统位置的、适当选取的变量都叫广义坐标。

广义坐标比笛卡儿直角坐标意义更广泛，可以是距离，角度，曲面上点的 Gauss 坐标，面积以及其它的量。曲线坐标，如平面上的极坐标，空间中的柱坐标和球坐标等，都是广义坐标。

当在所研究的系统上加上约束时，从直角坐标过渡到广义坐

标是特别方便的，而且也是十分必要的。例如，在1.1.1例3中，可取杆中点的直角坐标 x, y 以及杆与 x 轴间的夹角 θ 为广义坐标，这时直角坐标 x_1, y_1, x_2, y_2 可用广义坐标 x, y, θ 表为

$$x_1 = x - \frac{l}{2}\cos\theta, \qquad y_1 = y - \frac{l}{2}\sin\theta$$

$$x_2 = x + \frac{l}{2}\cos\theta, \qquad y_2 = y + \frac{l}{2}\sin\theta$$

于是，完整约束（1.1.5）自动满足，而非完整约束（1.1.6）变成

$$\dot{y} = \dot{x}\,\mathrm{tg}\theta$$

可见，选 x, y, θ 为广义坐标比选 x_1, y_1, x_2, y_2 要方便得多。

假设力学系统由N个质点组成，受有 d 个完整约束(1.1.7)，那么可以选取 $n = 3N - d$ 个广义坐标 $q_s(s=1, \cdots, n)$，这时系统所有点的直角坐标可用广义坐标和时间 t 表示为

$$x_i = x_i(q_s, t), \ y_i = y_i(q_s, t), \ z_i = z_i(q_s, t),$$
$$(i=1, \cdots, N; \ s=1, \cdots, n) \quad (1.2.1)$$

或者写成矢量形式

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_s, t), \quad (i=1, \cdots, N; \ s=1, \cdots, n) \quad (1.2.2)$$

其中 $\boldsymbol{r}_i$ 为系统中第 i 个质点的矢径。在定常约束下，式(1.2.2)可写成

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_s), \quad (i=1, \cdots, N; \ s=1, \cdots, n) \quad (1.2.3)$$

这样，为了求得给定力学系统的运动，只要先求出广义坐标 $q_s(s=1, \cdots, n)$作为时间 t 的函数，然后将这些 q_s 代入式(1.2.1)而求得 x_i, y_i, z_i $(i=1, \cdots, N)$ 作为时间 t 的函数。但是，为求得广义坐标 q_s，就必须建立关于 q_s 的微分方程。Lagrange及其后人给出建立这类方程的各种方法。

1.2.2 广义速度

定义 2 广义坐标对时间的导数 $\dot{q}_s(s=1, \cdots, n)$ 称为广义

速度。

系统中点的速度矢量 $\boldsymbol{v}_i(i=1,\cdots,N)$ 用广义速度 $\dot{q}_s$ 表示为

$$\boldsymbol{v}_i=\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t},\quad (i=1,\cdots,N)\quad(1.2.4)$$

或写成直角坐标形式

$$\dot{x}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial x_i}{\partial t},\quad \dot{y}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial y_i}{\partial t}$$

$$\dot{z}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial z_i}{\partial t},\qquad (i=1,\cdots,N)\qquad(1.2.5)$$

当 $\boldsymbol{r}_i$ 取为式（1.2.3）时，速度矢量 $\boldsymbol{v}_i$ 是广义速度 $\dot{q}_s$ 的线性齐次式

$$\boldsymbol{v}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s,\qquad (i=1,\cdots,N)\qquad(1.2.6)$$

或写成直角坐标形式

$$\dot{x}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\dot{q}_s,\qquad \dot{y}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}\dot{q}_s,$$

$$\dot{z}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\dot{q}_s,\qquad (i=1,\cdots,N)\qquad(1.2.7)$$

命题 1　当不考虑 $\dot{q}_s$ 之间的依赖关系时，成立如下两个经典 Lagrange 关系

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}=\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s},$$

$$(i=1,\cdots,N;\ s=1,\cdots,n)\quad(1.2.8)$$

命题 1 容易由式（1.2.4）来证明。

1.2.3 广义加速度

定义 3 广义坐标对时间的二阶导数 $\ddot{q}_s$（$s=1,\cdots,n$）称为广义加速度。

系统中点的加速度矢量 $\boldsymbol{a}_i$ 可用广义速度和广义加速度表出。将式（1.2.4）对时间求导数，便得

$$\boldsymbol{a}_i=\dot{\boldsymbol{v}}_i=\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s\partial q_k}\dot{q}_s\dot{q}_k$$
$$+2\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s\partial t}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t^2},\quad (i=1,\cdots,N) \tag{1.2.9}$$

或写成直角坐标形式

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_i&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s\partial q_k}\dot{q}_s\dot{q}_k\\
&\quad+2\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s\partial t}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}\\
\ddot{y}_i&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 y_i}{\partial q_s\partial q_k}\dot{q}_s\dot{q}_k\\
&\quad+2\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 y_i}{\partial q_s\partial t}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2}\\
\ddot{z}_i&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 z_i}{\partial q_s\partial q_k}\dot{q}_s\dot{q}_k\\
&\quad+2\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 z_i}{\partial q_s\partial t}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{1.2.10}$$

如果是式（1.2.3）的情形，则在式（1.2.9）和（1.2.10）中带有对 t 的偏导数项消失。由式（1.2.9）或（1.2.10）看出，点的加速度矢量是广义加速度的线性形式。

命题 2 我们有

$$\frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \ddot{q}_s}=\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}, \qquad (i=1, \cdots, N; \ s=1, \cdots, n) \ (1.2.11)$$

命题 3 如不考虑 $\dot{q}_s$ 之间的依赖关系，则有经典 Nielsen 关系

$$\frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}=2\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}, \qquad (i=1, \cdots, N; \ s=1, \cdots, n)(1.2.12)$$

命题 2 和命题 3 容易由式（1.2.9）和（1.2.4）来证明。

1.2.4 非完整约束方程在广义坐标、广义速度下的表达式

如果由 N 个质点组成的系统受有形如式（1.1.7）的 d 个完整约束，那么，总可以选 $n=3N-d$ 个广义坐标 $q_s(s=1, \cdots, n)$ 来确定系统的位置。这时，完整约束（1.1.7）将成为恒等式，非完整约束（1.1.8）将成为

$$f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t)=0, \qquad (\beta=1, \cdots, g; \ s=1, \cdots, n) \quad (1.2.13)$$

其中 f_β 为 F_β 中直角坐标和速度借助表达式(1.2.1)及(1.2.5)用广义坐标和广义速度表示而得的结果。将式（1.2.5）代入约束方程（1.1.13），便得

$$\sum_{s=1}^{n} a_{\varepsilon+\beta, s}\dot{q}_s+a_{\varepsilon+\beta}=0, \qquad (\beta=1, \cdots, g; \ \varepsilon=n-g) \quad (1.2.14)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon+\beta, s}&=\sum_{i=1}^{N}\left(A_{\beta i}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+B_{\beta i}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+C_{\beta i}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) \\ a_{\varepsilon+\beta}&=D_\beta+\sum_{i=1}^{N}\left(A_{\beta i}\frac{\partial x_i}{\partial t}+B_{\beta i}\frac{\partial y_i}{\partial t}+C_{\beta i}\frac{\partial z_i}{\partial t}\right) \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

由式（1.2.14）和（1.2.15）得知，当 $D_\beta=0$，且式（1.2.1）中不含 t 时，有 $a_{\varepsilon+\beta}=0$，式（1.2.14）成为线性齐次的

$$\sum_{s=1}^{n} a_{\varepsilon+\beta,s}\dot{q}_s = 0, \qquad (\beta=1, \cdots, g) \quad (1.2.16)$$

因方程（1.2.14）彼此独立，故可将后面 g 个广义速度 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 用前面 $\varepsilon=n-g$ 个广义速度 $\dot{q}_\sigma$ 表出

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\dot{q}_\sigma + B_{\varepsilon+\beta}, \qquad (\beta=1, \cdots, g;\ \varepsilon=n-g)$$

$$(1.2.17)$$

其中系数 $B_{\varepsilon+\beta,\sigma}$ 和 $B_{\varepsilon+\beta}$ 是广义坐标和时间的函数，可用式（1.2.14）中的系数 $a_{\varepsilon+\beta,s}$ 和 $a_{\varepsilon+\beta}$ 表出。

§1.3 准速度、准坐标和准加速度

在力学系统中，特别是在非完整力学系统中，引进准坐标的概念和记号有重要意义。正如近代力学家 J.Synge 所述："甚至从一种符号技术和数学语言上看，准坐标都应予极大注意，因为数学发展中有许多例子说明，某些思想的发展和某些新的事实的获得常常依赖于引进的恰当记号"[8]。例如，Leibniz 的恰当的微分记号成为发展经典数学分析的基础。本世纪初，Volterra, Hamel, Poincaré 等人把准坐标方法运用到推导非完整力学系统的运动方程。Cartan, Schouten 等人建立了非完整几何学。

准坐标的引进与准速度密切相关。准坐标优越于通常的广义坐标，准速度比广义速度更一般。在准坐标和准速度下，非完整约束条件写起来非常简单，而且力学系统的运动微分方程具有单一的结构，不依赖于完整与否。

1.3.1 准速度

1. 准速度的概念

定义 1 相对广义速度的任意的独立关系称为准速度。通常写成

$$\omega_s=\omega_s(q_k,\dot{q}_k,t),\qquad (s,k=1,\cdots,n)\qquad(1.3.1)$$

在上述定义中，准速度的数目与广义速度的数目一致，如果准速度的数目小于广义速度的数目，那么其余的准速度可简单地取为广义速度。在式（1.3.1）中，函数 ω_s 彼此独立，因此矩阵 $\left\|\frac{\partial\omega_s}{\partial\dot{q}_k}\right\|$ 的行列式异于零。设由式（1.3.1）可反解出广义速度

$$\dot{q}_s=\dot{q}_s(q_k,\omega_k,t),\qquad (s,k=1,\cdots,n)\qquad(1.3.2)$$

在式（1.3.1）中 ω_s 对 $\dot{q}_k$ 一般为非线性关系。在特殊情况下，准速度可取为广义速度的线性齐次形式

$$\omega_s=\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\dot{q}_k\qquad(1.3.3)$$

其中 a_{sk} 为广义坐标的函数。当矩阵$\|a_{sk}\|$的行列式异于零时，可由式（1.3.3）反解出广义速度

$$\dot{q}_s=\sum_{k=1}^{n}b_{sk}\omega_k\qquad(1.3.4)$$

其中系数矩阵$\|b_{sk}\|$为$\|a_{sk}\|$的逆矩阵。

例如，在刚体绕定点转动问题中，可选角速度矢量在与刚体相固联的轴上的投影为准速度，即

$$\begin{aligned}\omega_1&=\dot{\theta}\cos\varphi+\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi\\ \omega_2&=-\dot{\theta}\sin\varphi+\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi\\ \omega_3&=\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\end{aligned}\qquad(1.3.5)$$

其中 ψ,θ,φ 为 Euler 角。这样，最重要的动力学量，如动能，动量矩矢量的投影等，用准速度表示就变得非常简单。著名的 Euler 动力学方程实际上就是准速度下的方程。

根据具体问题，选取适当的准速度，可使问题得到简化。

2．非完整约束在准速度下的表达

当力学系统受有非完整约束时，某些准速度可按约束方程的左边形式选取。如果系统受有 g 个形如式（1.2.16）的线性齐次非完整约束，那么可以这样选取 n 个准速度，使后面 g 个准速度

$\omega_{\epsilon+\beta}$ 按式（1.2.16）的左边选取，即

$$\omega_{\epsilon+\beta}=\sum_{s=1}^{n}a_{\epsilon+\beta,s}\dot{q}_s,\qquad(\beta=1,\cdots,g;\ \epsilon=n-g)\tag{1.3.6}$$

而前面 ϵ 个准速度 $\omega_\sigma(\sigma=1,\cdots,\epsilon)$ 可简单地取为 $\dot{q}_\sigma$ 或者取为 $\dot{q}_s$ 的任意独立的线性式。由式（1.2.16）和（1.3.6）得知，约束方程在准速度下可表为

$$\omega_{\epsilon+\beta}=0,\qquad(\beta=1,\cdots,g;\ \epsilon=n-g)\tag{1.3.7}$$

可见，在准速度下约束方程写起来特别简单。

如果约束方程的形式为式（1.2.14），则可选后面 g 个准速度为

$$\omega_{\epsilon+\beta}=\sum_{s=1}^{n}a_{\epsilon+\beta,s}\dot{q}_s+a_{\epsilon+\beta},\qquad(\beta=1,\cdots,g;\ \epsilon=n-g)\tag{1.3.8}$$

由式（1.2.14）和（1.3.8）知

$$\omega_{\epsilon+\beta}=0,\qquad(\beta=1,\cdots,g;\ \epsilon=n-g)\tag{1.3.9}$$

如果系统受有形如式（1.2.13）的非线性非完整约束，那么后面 g 个准速度可选为

$$\omega_{\epsilon+\beta}=f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t),\qquad(\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n)\tag{1.3.10}$$

而前面 ϵ 个准速度 $\omega_\sigma(\sigma=1,\cdots,\epsilon)$ 可任意独立地选取。由式（1.2.13）和（1.3.10）知

$$\omega_{\epsilon+\beta}=0,\qquad(\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n)\tag{1.3.11}$$

3. 函数对准速度的偏导数

现在研究某动力学函数 $F(q_s,\dot{q}_s,t)$，将式（1.3.2）代入后所得函数记作 F^*，即

$$F^*(q_s,\omega_s,t)=F(q_s,\dot{q}_s(q_k,\omega_k,t),t)\tag{1.3.12}$$

显然有

$$\frac{\partial F^*}{\partial\omega_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_k}\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\omega_s}\tag{1.3.13}$$

特别地，当准速度按式（1.3.3）选取时，式（1.3.13）成为

$$\frac{\partial F^*}{\partial \omega_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k}b_{ks} \tag{1.3.14}$$

命题 1 对准速度的偏导数与对广义速度的偏导数之间有关系

$$\frac{\partial}{\partial \omega_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \tag{1.3.15}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial \omega_s}=\sum_{k=1}^{n}b_{ks}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \tag{1.3.16}$$

上述命题中被作用的函数，左端为 F^*，右端为 F。

1.3.2 准坐标

1．准坐标的概念

与式（1.3.3）相关，研究广义坐标微分的线性形式

$$\mathrm{d}\pi_s=\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\mathrm{d}q_k, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{1.3.17}$$

量 $\mathrm{d}\pi_s$ 称为准坐标的微分。因为关系（1.3.3）一般是不可积分的，所以量 π_s 作为坐标的函数是不存在的。但是纯粹条件地引入记号 π_s，并称之为准坐标，仍不失其意义，因为这样做可简化公式并可减少文字记述。引用记号

$$\omega_s=\dot{\pi}_s, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{1.3.18}$$

其中 $\dot{\pi}_s$ 是引用的记号，并非 π_s 对时间的导数。如果表达式（1.3.17）是可积分的，那么可归结为

$$\pi_s=\pi_s(q_k), \qquad (s,k=1,\cdots,n)$$

这只是表明过渡到新的广义坐标。因此，准坐标的概念实际上比广义坐标的概念更广泛。

2．函数对准坐标的偏导数

因准坐标并不出现于函数中，故函数对准坐标的偏导数需要

专门定义。

定义 2 当准速度按式（1.3.1）选取时，定义"对准坐标的偏导数运算"为[9]

$$\frac{\partial}{\partial \pi_s} \stackrel{\Delta}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s} \frac{\partial}{\partial q_k}, \qquad (s=1, \cdots, n) \tag{1.3.19}$$

其中 $\dot{q}_k$ 按式（1.3.2）确定。当准速度按式（1.3.3）选取时，则为

$$\frac{\partial}{\partial \pi_s} \stackrel{\Delta}{=} \sum_{k=1}^{n} b_{ks} \frac{\partial}{\partial q_k}, \qquad (s=1, \cdots, n) \tag{1.3.20}$$

运算（1.3.19）和（1.3.20）在简化公式时，特别在列写准坐标中的运动微分方程时用处很大。

命题 2 我们有准坐标下的 Lagrange 关系

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i^*}{\partial \omega_s} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_s}, \qquad (i=1, \cdots, N;\ s=1, \cdots, n) \tag{1.3.21}$$

〔证明〕 按式（1.3.15）、（1.2.8）和（1.3.19），有

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i^*}{\partial \omega_s} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s} \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_s}$$ ‖

1.3.3 准加速度

1. 准加速度的概念

定义 3 相对准速度对时间导数的任意的独立关系，称为准加速度。通常写成

$$\varepsilon_s = \varepsilon_s(q_k, \omega_k, \dot{\omega}_k, t), \qquad (s, k=1, \cdots, n) \tag{1.3.22}$$

其中 ω_k 为准速度，$\dot{\omega}_k$ 为准速度对时间的导数。

特别地，如取 $\omega_k = \dot{q}_k$，则式（1.3.22）成为

$$\varepsilon_s = \varepsilon_s(q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k, t), \qquad (s, k=1, \cdots, n) \tag{1.3.23}$$

关系（1.3.22）和（1.3.23）一般是不可积的，否则将过渡到新的准速度。准加速度一般也不是准速度对时间的导数。因此，准加速度的概念比广义加速度的概念更广泛，也比准速度对

时间导数的概念更广泛。

2. 函数对准加速度的偏导数

现在研究某动力学函数 $S=S(q_s, \dot{q}_s, \ddot{q}_s, t)$。将式（1.3.2）对 t 求导数，并以式（1.3.2）替代其中出现的 $\dot{q}_r$，得到

$$\ddot{q}_s=\ddot{q}_s(q_k, \omega_k, \dot{\omega}_k, t) \tag{1.3.24}$$

将式（1.3.2）和（1.3.24）代入 S，所得表达式记作 S^*，即

$$S^*(q_s, \omega_s, \dot{\omega}_s, t)=S(q_k, \dot{q}_k(q_s, \omega_s, t), \ddot{q}_k(q_s, \omega_s, \dot{\omega}_s, t), t) \tag{1.3.25}$$

设由式（1.3.22）可解出 $\dot{\omega}_s$

$$\dot{\omega}_s=\dot{\omega}_s(q_k, \omega_k, \varepsilon_k, t) \tag{1.3.26}$$

将式（1.3.26）代入 S^*，所得表达式记作 S^{**}，即

$$S^{**}(q_s, \omega_s, \varepsilon_s, t)=S^*(q_k, \omega_k, \dot{\omega}_k(q_s, \omega_s, \varepsilon_s, t), t) \tag{1.3.27}$$

由式（1.3.27）和（1.3.25）容易得到

$$\frac{\partial S^{**}}{\partial \varepsilon_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial S^*}{\partial \dot{\omega}_k}\frac{\partial \dot{\omega}_k}{\partial \varepsilon_s}=\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_r}\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_k}\frac{\partial \dot{\omega}_k}{\partial \varepsilon_s} \tag{1.3.28}$$

如果不引用准速度，设由式（1.3.23)可反解出 $\ddot{q}_s$

$$\ddot{q}_s=\ddot{q}_s(q_k, \dot{q}_k, \varepsilon_k, t) \tag{1.3.29}$$

将其代入 S，所得表达式记作 S'，即

$$S'(q_s, \dot{q}_s, \varepsilon_s, t)=S(q_s, \dot{q}_s, \ddot{q}_s(q_k, \dot{q}_k, \varepsilon_k, t), t) \tag{1.3.30}$$

则有

$$\frac{\partial S'}{\partial \varepsilon_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k}\frac{\partial \ddot{q}_k}{\partial \varepsilon_s}, \qquad (s=1, \cdots, n) \tag{1.3.31}$$

关系（1.3.28）和（1.3.31）在推导 Appell 方程时用处很大。

由上述讨论容易证明下述命题。

命题 3 我们有

$$\frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_i^*}{\partial \dot{\omega}_s}=\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i^*}{\partial \omega_s}, \qquad (i=1,\cdots,N;\ s=1,\cdots,n) \quad (1.3.32)$$

其中 $\ddot{\boldsymbol{r}}_i^*$ 为用 ω_s, $\dot{\omega}_s$ 表达的点的加速度，$\dot{\boldsymbol{r}}_i^*$ 为用 ω_s 表达的点的速度。

1.3.4 高阶准速度

1. 高阶准速度的概念

为研究高阶非完整系统动力学，常常需要将准速度的概念做进一步的推广。

定义 4 相对广义速度对时间的 m 阶导数的任意的独立关系，称为m阶准速度。通常写成

$$\overset{(m-1)}{\omega_s}=\overset{(m-1)}{\omega_s}(q_k,\dot{q}_k,\cdots,\overset{(m)}{q_k},t),\ (s,k=1,\cdots,n;\ m=1,2,\cdots) \quad (1.3.33)$$

注意，这里 $\overset{(m-1)}{\omega_s}$ 仅表示 q_k, $\dot{q}_k$, …, $\overset{(m)}{q_k}$, t 的一些函数。一般说，它们既不是 ω_s 的 $(m-1)$ 阶导数，也不是 π_s 的 m 阶导数，甚至不存在 $\overset{(m-1)}{\pi_s}$ 使其导数为 $\overset{(m-1)}{\omega_s}$。当 $m=1$ 时，式（1.3.33）成为一阶准速度（1.3.1）；当 $m=2$ 时，式（1.3.33）成为二阶准速度（1.3.23）。

引用记号

$$\overset{(m-1)}{\omega_s}=\left(\overset{(m-1)}{\pi_s}\right)^{\cdot} \quad (1.3.34)$$

其中 $\left(\overset{(m-1)}{\pi_s}\right)^{\cdot}$ 是引用的记号，并非 $\overset{(m-1)}{\pi_s}$ 对时间的导数。

定义 5 称式（1.3.34）中的 $\overset{(m-1)}{\pi_s}$ 为m阶准坐标。

当 $m=1$ 时，式（1.3.34）给出一阶准坐标 π_s；当 $m=2$ 时，式（1.3.34）给出二阶准坐标。

2. 函数对高阶准速度的偏导数

设由式（1.3.33）可反解出 $\overset{(m)}{q_s}$，并记作

$$\overset{(m)}{q_s}=\overset{(m)}{q_s}(q_k,\dot{q}_k,\cdots,\overset{(m-1)}{q_k},\overset{(m-1)}{\omega_k},t),\ (s,k=1,\cdots,n) \quad (1.3.35)$$

现在研究某函数 $F(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m)}{q_s},t)$，将（1.3.35）代入后所

得函数记作 F^*，即

$$F^*(q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(m-1)}{q_s}, \overset{(m-1)}{\omega_s}, t) =$$
$$F(q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(m-1)}{q_s}, \overset{(m)}{q_s}(q_k, \dot{q}_k, \cdots, \overset{(m-1)}{q_k}, \overset{(m-1)}{\omega_k}, t), t) \quad (1.3.36)$$

显然有

$$\frac{\partial F^*}{\partial \overset{(m-1)}{\omega_s}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \overset{(m)}{q_k}} \frac{\partial \overset{(m)}{q_k}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega_s}} \quad (1.3.37)$$

命题 4 对 m 阶准速度的偏导数与对 m 阶广义速度的偏导数之间有关系

$$\frac{\partial}{\partial \overset{(m-1)}{\omega_s}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \overset{(m)}{q_k}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega_s}} \frac{\partial}{\partial \overset{(m)}{q_k}} \quad (1.3.38)$$

上述命题中被作用的函数，左端为 F^*，右端为 F。

3. 函数对高阶准坐标的偏导数

定义 6 当 m 阶准速度按式（1.3.33）选取时，定义对 m 阶准坐标的偏导数运算为

$$\frac{\partial}{\partial \overset{(m-1)}{\pi_s}} \overset{\Delta}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \overset{(m)}{q_k}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega_s}} \frac{\partial}{\partial \overset{(m-1)}{q_k}}, \quad (s=1, \cdots, n) \quad (1.3.39)$$

其中 $\overset{(m)}{q_k}$ 由式（1.3.35）确定。

§1.4 虚 位 移

在完整系统和非完整系统分析力学中，都广泛地应用虚位移的概念。本节研究虚位移，实位移处于虚位移中的充要条件，以及虚位移概念的推广等问题。

1.4.1 虚位移

1. 虚位移的概念

定义 1 在给定的固定时刻为加在点上的约束所允许的所有假想的无限小位移，称为点的虚位移。

如点的矢径为 $\boldsymbol{r}_i$，则虚位移记作 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 或 δx_i, δy_i, δz_i。有时将广义坐标的变分 δq_i 也叫虚位移。

这里没有引进“可能位移”的概念。分析力学的文献中在建立可能位移和虚位移概念上也没有完全统一。J. L. Lagrange 在其《分析力学》中仅有一个专用词“virtuel”，同时也清楚地指出了 $d\boldsymbol{r}$ 和 $\delta\boldsymbol{r}$ 的差别[10]。H. Hertz 在其《力学原理》中写道：“我们将称之为可能位移，也叫虚位移”[11]。在 19 世纪，这两个词作为同义词。这种观点也出现在 Appell[12], Levi-Civita[4] 的著作中。在 А. И. Лурье 的著作[13] 中也只给出虚位移，没有给出可能位移。因为如引进可能位移会出现术语上的缺欠：实位移是不可能的（对非定常几何约束，实位移不是可能的位移）。况且，在法文中“virtuel”既有“虚的”也有“有可能的”的涵义。但是，也有另外一些提法，将可能位移与虚位移区分开来。

2. 约束加在虚位移上的条件

首先，研究完整约束加在虚位移上的条件。设力学系统由 N 个质点组成，并受有形如式（1.1.7）的 d 个完整约束。在瞬时 t，系统的点由 (x_i, y_i, z_i) 发生虚位移 δx_i, δy_i, δz_i 而到达点 $(x_i+\delta x_i, y_i+\delta y_i, z_i+\delta z_i)$。按虚位移定义，点的新位置必须为约束所允许，即满足

$$F_\alpha(x_i+\delta x_i,\ y_i+\delta y_i,\ z_i+\delta z_i,\ t)=0,$$
$$(i=1,\cdots,N;\ \alpha=1,\cdots,d) \qquad (1.4.1)$$

将式（1.4.1）展开为 Taylor 级数，有

$$F_\alpha(x_i+\delta x_i,\ y_i+\delta y_i,\ z_i+\delta z_i,\ t)$$
$$=F_\alpha(x_i,\ y_i,\ z_i,\ t)+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i\right)$$
$$+\text{高阶小项}=0$$

因虚位移 δx_i, δy_i, δz_i 是无限小位移，故可略去高阶小项，并利用约束（1.1.7），得到

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0,$$

$$(\alpha=1,\cdots,d) \qquad (1.4.2)$$

这是约束（1.1.7）加在虚位移 δx_i, δy_i, δz_i 上的条件。

对完整约束系统，如选 $n=3N-d$ 个彼此独立的广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$，则

$$\delta \boldsymbol{r}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\delta q_s$$

$$\delta x_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s,\ \delta y_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}\delta q_s,\ \delta z_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\delta q_s \qquad (1.4.3)$$

其中 δq_s 也是彼此独立的、任意的。若有 m 个多余坐标 $q_{n+j}(j=1,\cdots,m)$，并受有 m 个约束

$$f_k(q_s,q_{n+j},t)=0, \qquad (j,k=1,\cdots,m;\ s=1,\cdots,n)$$

$$(1.4.4)$$

则约束（1.4.4）加在虚位移 δq_ρ 上的条件为

$$\sum_{\rho=1}^{n+m}\frac{\partial f_k}{\partial q_\rho}\delta q_\rho=0, \qquad (k=1,\cdots,m) \qquad (1.4.5)$$

此时 δq_ρ 不是彼此独立的。

由约束（1.4.2）和(1.4.5)得知，对完整系统来说，约束加在虚位移上的条件与约束方程的等时变分为零是一致的。

其次，研究线性非完整约束加在虚位移上的条件。

如系统受有形如式（1.1.13）的线性非完整约束，可将其写成微分形式

$$\sum_{i=1}^{N}(A_{\beta i}\mathrm{d}x_i+B_{\beta i}\mathrm{d}y_i+C_{\beta i}\mathrm{d}z_i)+D_\beta\mathrm{d}t=0, \qquad (\beta=1,\cdots,g)$$

$$(1.4.6)$$

因虚位移是时间不变的位移，故在式（1.4.6）中以符号 δ 替代 d，并取 $\delta t=0$，便得

$$\sum_{i=1}^{N}(A_{\beta i}\delta x_i+B_{\beta i}\delta y_i+C_{\beta i}\delta z_i)=0,\quad (\beta=1,\cdots,g)\quad (1.4.7)$$

这是约束（1.1.13）加在虚位移δx_i，δy_i，δz_i上的条件。将式（1.4.3）代入式（1.4.7），得到

$$\sum_{s=1}^{n}a_{\varepsilon+\beta,s}\delta q_s=0\qquad (\beta=1,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g)\quad (1.4.8)$$

其中$a_{\varepsilon+\beta,s}$由式（1.2.15）确定。如果非完整约束表为式（1.2.17）的形式，则有

$$\delta q_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\delta q_\sigma,\qquad (\beta=1,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g)\quad (1.4.9)$$

对线性非完整约束来说，约束加在虚位移上的条件与约束方程的等时变分为零并不是一致的。

最后，研究非线性非完整约束加在虚位移上的条件。

设系统受有形如式（1.1.8）的非线性非完整约束，为得到这样约束加在虚位移上的条件，用上述方法已行不通。对线性非完整约束所采用的方法，称为Hertz-Hölder原则：变分δq_s之间的关系，可由微分约束方程中去掉包含dt的项，并用δq_s替代dq_s而得到。对非线性非完整约束，应用Hertz-Hölder原则，将会得到δq_s之间的非线性关系。

在研究非线性非完整约束加在虚位移上的条件时，Appell和Четаев曾利用一种公理性的定义。下面给出这个定义的近代描述。

定义 2 对形如式（1.2.13）的非线性非完整约束，虚位移δq_s满足如下Appell-Четаев条件

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0,\qquad (\beta=1,\cdots,g)\qquad (1.4.10)$$

这个定义把线性非完整约束情形当作特殊情形。因此，Appell-Четаев定义被广泛采用。

3. 自由度

对完整系统来说，独立坐标的数目等于广义坐标的独立变分数目。对非完整系统，因为坐标变分之间有 g 个关系式(1.4.8)或（1.4.10)，所以 $\delta q_s(s=1,\cdots,n)$ 已不全是独立的，只有 $\epsilon=n-g$ 个是独立的。因此，对于非完整系统来说，独立坐标的数目是 n，而独立变分的数目为独立坐标的数目减去非完整约束方程的数目，即 $\epsilon=n-g$。这种独立坐标数目与独立变分数目不相同的事实，在 Lagrange 时代还不为人知，直至 1894 年德国学者 Hertz 才首次发现了它，并因此将约束和力学系统分成完整的与非完整的两大类。

定义 3 广义坐标的独立变分数目称为系统的自由度。

1.4.2 实位移处于虚位移中的充要条件

命题 对一般的非完整约束（1.2.13)，实位移处于虚位移中的充要条件是约束方程对广义速度的齐次性。

〔证明〕 必要性：对一般的非完整约束（1.2.13)，如果实位移处于虚位移之中，则 $\mathrm{d}q_s$ 满足如下关系

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\mathrm{d}q_s=0 \tag{1.4.11}$$

因此

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=0 \tag{1.4.12}$$

这意味着 f_β 对 $\dot{q}_s$ 是齐次的。

充分性：设 f_β 对 $\dot{q}_s$ 为 k_β 阶齐次的，即

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=k_\beta f_\beta$$

注意到式（1.2.13)，则

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=0$$

由此得式（1.4.11）。比较式（1.4.11）和（1.4.10），得知实位移处于无数虚位移之中。

推论 对完整约束，实位移处于虚位移中的充要条件是约束方程中不显含时间 t 。

1.4.3 虚位移概念的推广

为了利用 Jourdain 原理、Gauss 原理和万有 D'Alembert 原理推导一阶、二阶或更高阶非完整系统的运动微分方程，常常需要将虚位移概念加以推广。同时，为扩大微分变分原理的应用范围，也需将 Appell–Четаев 定义加以推广。下面分别研究这两种推广。

1. 速度空间和加速度空间的虚位移

因为形如式（1.2.13）的一阶非线性非完整约束是对广义速度 $\dot{q}_s$ 的限制，所以我们只考虑速度 $\dot{q}_s$ 的变更，坐标 q_s 和时间 t 都固定不变。当速度发生无限小变更 $\delta\dot{q}_s$ 时，按照虚位移的原始定义，对 $\dot{q}_s+\delta\dot{q}_s$，$q_s$，$t$ 仍然满足方程（1.2.13），即有

$$f_\beta^{(1)}(q_s,\dot{q}_s+\delta\dot{q}_s,t)=0,\qquad(\beta=1,\cdots,g)\qquad(1.4.13)$$

将此式左边展开为 Taylor 级数，精确到一阶小量，并考虑到 $f_\beta^{(1)}(q_s,\dot{q}_s,t)=0$，便得

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta^{(1)}}{\partial\dot{q}_s}\delta\dot{q}_s=0,\qquad(\beta=1,\cdots,g)\qquad(1.4.14)$$

定义 4 公式（1.4.14）称为约束（1.2.13）对速度空间虚位移 $\delta\dot{q}_s$ 的限制条件[14]。

如果力学系统受有二阶非完整约束

$$f_\beta^{(2)}(q_s,\dot{q}_s,\ddot{q}_s,t)=0\qquad(\beta=1,\cdots,g)\qquad(1.4.15)$$

那么，因为它们是对加速度 $\ddot{q}_s$ 的限制，所以我们令 q_s，$\dot{q}_s$，t 不变，只考虑加速度的变更 $\delta\ddot{q}_s$。类似于式（1.4.14），得到

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta^{(2)}}{\partial\ddot{q}_s}\delta\ddot{q}_s=0,\qquad(\beta=1,\cdots,g)\qquad(1.4.16)$$

定义 5 公式（1.4.16）称为约束（1.4.15）对加速度空间虚位移 $\delta\ddot{q}_s$ 的限制条件[14]。

类似地，对于m阶非完整约束

$$f_\beta^{(m)}(q_s,\dot{q}_s,\ddot{q}_s,\cdots,\overset{(m)}{q_s},t)=0,\qquad (\beta=1,\cdots,g;\ m=0,1,2,\cdots)$$

（1.4.17）

我们有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\delta\overset{(m)}{q_s}=0,\qquad (\beta=1,\cdots,g;\ m=0,1,2,\cdots)\quad(1.4.18)$$

2. Appell-Четаев 定义对高阶非完整约束的推广

对 m 阶非完整约束（1.4.17），我们定义虚位移 $\delta\overset{(m-1)}{q_s}$ 满足条件

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\delta\overset{(m-1)}{q_s}=0,\qquad (\beta=1,\cdots,g;\ m=1,2,\cdots)(1.4.19)$$

定义 6 公式（1.4.19）称为 m 阶 Appell-Четаев 定义。

当 $m=1$ 时，定义(1.4.19)成为一阶非完整约束的 Appell-Четаев 定义（1.4.10）；当 $m=2$ 时，定义（1.4.19）给出二阶 Appell-Четаев 定义

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta^{(2)}}{\partial \ddot{q}_s}\delta\dot{q}_s=0,\qquad (\beta=1,\cdots,g)\qquad(1.4.20)$$

等等。

定义（1.4.19）对扩充微分变分原理的应用范围以及研究高阶非完整约束系统的交换关系十分有用。

因此，虚位移概念的推广可沿两个方向进行。一个方向是对m阶非完整约束定义m次速度空间的虚位移 $\delta\overset{(m)}{q_s}$，另一个方向是对m阶非完整约束定义($m-1$)次速度空间的虚位移 $\delta\overset{(m-1)}{q_s}$。

§1.5 理 想 约 束

1.5.1 约束反力与理想约束

如果系统没有约束，则系统的坐标值从作用力方面来说由主动力确定。当存在约束时，便出现了某些附加力。这些力使系统按约束方程的规定而运动。这些力与主动力一起实现系统运动的力与约束相适应，因此称为约束反力，

定义 如果系统中各点的约束反力在虚位移上所作虚功之和为零，则这种约束称为理想约束。

如果用 $\boldsymbol{R}_i$ 表记系统中第 i 个点所受约束反力的合力，$\delta\boldsymbol{r}_i$ 是它的虚位移，则理想约束条件可表为

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \qquad (1.5.1)$$

或者写成直角坐标形式

$$\sum_{i=1}^{N}(R_{ix}\delta x_i+R_{iy}\delta y_i+R_{iz}\delta z_i)=0 \qquad (1.5.2)$$

将式（1.4.3）代入式（1.5.1），便得

$$\sum_{s=1}^{n}\delta q_s\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}=0 \qquad (1.5.3)$$

令

$$Q'_s=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \qquad (1.5.4)$$

它们可称为广义约束反力，于是式（1.5.3）成为

$$\sum_{s=1}^{n}Q'_s\delta q_s=0 \qquad (1.5.5)$$

1.5.2 理想约束的例子

质点强制地沿固定光滑面的运动，质点强制地沿运动的或变形的光滑曲面的运动，具有一个或两个固定点的刚体，两个质点用不计质量的不变长度的杆相联结，两刚体在运动中以理想光滑表面相接触，两刚体用光滑铰链相联结等，都是完整的理想约束。

圆球或圆盘沿完全粗糙的水平面作纯滚动，冰刀不允许横滑等，都是非完整的理想约束。

1.5.3 理想约束假定的重要性和可能性

由 D'Alembert 和 Lagrange 开创的非自由质点系动力学是基于约束的理想性假定的。根据这个假定所建立的虚位移原理以及动力学普遍方程中消除了约束反力，从而使问题变得简单了。可见，理想约束假定的重要性。同时，理想约束假定也是完全可能的。首先，为描述自然现象和大多数技术过程，这样的假定有足够的精确度。例如，复杂的机构可看作刚体系统，其中刚体两两之间或刚性联结，或以铰链联结，或以其表面相接触。如果认为所有刚性联结是绝对刚性的，铰链是理想的，而所有接触面或是理想光滑的，或是完全粗糙的，则任何复杂机构均可当作具有理想约束的质点系统。其次，如果约束是非理想的，例如，摩擦力作虚功，则可将摩擦力归为主动力范畴来考虑。由于未知量摩擦力的出现而短少的方程可用摩擦定律来补充。

§1.6 微分运算与变分运算的变换关系

分析力学中的交换关系（Hamel 称之为“过渡方程”），即微分运算 d 和变分运算 δ 的交换性问题，既是分析力学的基本问题之一，又是争论多年的老问题。研究这一问题的重要性，不仅

在于利用交换关系可以导出系统的运动微分方程，而且更在于交换关系与 Hamilton 原理能否应用和怎样应用于非完整系统以及 Hamilton-Jacobi 积分方法能否推广到非完整系统等问题密切相关。

历史上，对交换关系的形式有两种观点。一种认为 d，δ 总可以交换，不论完整与否（代表人物为 Hölder)；另一种观点则认为 d，δ 之交换性仅对完整系统才成立(代表人物为 Суслов, Levi-Civita)。两种观点争论甚烈，但后一观点得到更多的支持。

近代对交换关系的研究可指出如下几种：1961 年 Лурbе 指出，dδ＝δd 是采用的变分法则的结果，可以采用其它法则使等式不成立[13]；1966 年 Новоселов 指出，交换关系的 Hölder 形式和 Суслов 形式都可应用于非完整系统 Hamilton 原理的研究[9]，1975 年 Vujanović 提出完整非保守系统的一种新型交换关系[28]。

本节讨论一阶非完整系统的交换关系，高阶非完整系统的交换关系以及 Vujanović 交换关系。

1.6.1 一阶非完整系统的交换关系

1. 广义坐标下的交换关系

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$来确定，它的运动受有 g 个理想 Appell-Четаев 型非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t),\quad (\beta=1,\cdots,g;\ \sigma=1,\cdots,\varepsilon;\ \varepsilon=n-g)\tag{1.6.1}$$

据 Appell-Четаев 定义，虚位移满足以下关系

$$\delta q_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma\tag{1.6.2}$$

将式（1.6.2）对 t 求导数，对式（1.6.1）取变分，并将所得结果相减，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_{\varepsilon+\beta})-\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial\dot{q}_{\sigma}}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_{\sigma})-\delta\dot{q}_{\sigma}\right]+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}\delta q_{\sigma} \tag{1.6.3}$$

其中

$$T_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial\dot{q}_{\sigma}}-\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial q_{\sigma}}-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}\frac{\partial\varphi_{\gamma}}{\partial\dot{q}_{\sigma}} \tag{1.6.4}$$

考虑到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_{\sigma})-\delta\dot{q}_{\sigma}=0,\quad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{1.6.5}$$

则式（1.6.3）成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_{\varepsilon+\beta})-\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}\delta q_{\sigma},\quad(\beta=1,\cdots,g) \tag{1.6.6}$$

我们称式（1.6.5）和（1.6.6）为Суслов观点下的交换关系。

特别地，对于约束为线性的情形，即

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\dot{q}_{\sigma}+B_{\varepsilon+\beta},\quad(\beta=1,\cdots,g) \tag{1.6.7}$$

则式（1.6.6）成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_{\varepsilon+\beta})-\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}t_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}\delta q_{\sigma} \tag{1.6.8}$$

其中

$$\begin{aligned}t_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}=&\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left[\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_{\nu}}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_{\sigma}}\right)+\sum_{\gamma=1}^{g}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}B_{\varepsilon+\gamma,\nu}\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}B_{\varepsilon+\gamma,\sigma}\right)\right]\dot{q}_{\nu}+\sum_{\gamma=1}^{g}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}B_{\varepsilon+\gamma}\right.\\&\left.-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}B_{\varepsilon+\gamma,\sigma}\right)+\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial t}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_{\sigma}}\end{aligned} \tag{1.6.9}$$

进而，如果$B_{\varepsilon+\beta}=0$，且$B_{\varepsilon+\beta,\sigma}$中不含$q_{\varepsilon+\gamma}$和$t$，则有

$$t_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}=\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_{\nu}}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_{\sigma}}\right)\dot{q}_{\nu},\quad(\beta=1,\cdots,g) \tag{1.6.10}$$

2. 准坐标下的交换关系

设系统的运动受有 g 个理想 Appell-Четаев 型非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0,\quad (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n)\quad (1.6.11)$$

先不考虑非完整约束，而选 n 个彼此独立的准速度

$$\omega_s=\omega_s(q_k,\dot{q}_k,t),\quad (s,k=1,\cdots,n)\quad (1.6.12)$$

设由式（1.6.12）可反解出广义速度，并记作

$$\dot{q}_r=\dot{q}_r(q_m,\omega_k,t),\quad (r,m,k=1,\cdots,n)\quad (1.6.13)$$

对式（1.6.12）和（1.6.13）利用 Appell-Четаев 定义，虚位移将满足关系

$$\delta\pi_s=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\omega_s}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k,\quad (s=1,\cdots,n)\quad (1.6.14)$$

$$\delta q_r=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_k}\delta\pi_k,\quad (r=1,\cdots,n)\quad (1.6.15)$$

将式（1.6.14）对 t 求导数，对式（1.6.12）取变分，并将所得结果相减，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\pi_s)-\delta\omega_s=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\omega_s}{\partial\dot{q}_k}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_k)-\delta\dot{q}_k\right]$$
$$+\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\omega_s}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial\omega_s}{\partial q_r}\right)\frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_k}\delta\pi_k,\quad (s=1,\cdots,n)$$
$$(1.6.16)$$

现在考虑到非完整约束（1.6.11）。将式（1.6.12）中后面 g 个准速度按约束方程（1.6.11)的左端选取，即 $\omega_{\varepsilon+\beta}=f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)$，而前面 ε 个 ω_σ 可任意独立地选取。于是有

$$\omega_{\varepsilon+\beta}=0,\quad \delta\pi_{\varepsilon+\beta}=0\quad (1.6.17)$$

此时式（1.6.16）给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\pi_s)-\delta\omega_s=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\omega_s}{\partial\dot{q}_k}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_k)-\delta\dot{q}_k\right]$$

$$+\sum_{r=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\omega_s}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial\omega_s}{\partial q_r}\right)\frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_\sigma}\delta\pi_\sigma,\quad (s=1,\cdots,n)$$

(1.6.18)

我们称式（1.6.16）和（1.6.18）为准坐标下的交换关系。

如果式（1.6.12）按广义速度的线性齐次式选取，即

$$\omega_s=\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\dot{q}_k \qquad (1.6.19)$$

其中 a_{sk} 不显含 t，此时式（1.6.13）成为

$$\dot{q}_r=\sum_{k=1}^{n}b_{rk}\omega_k \qquad (1.6.20)$$

则式（1.6.16）给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\pi_s)-\delta\omega_s=\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_k)-\delta\dot{q}_k\right]+\sum_{t=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\gamma_{tm}^{s}\omega_t\delta\pi_m$$

$$(s=1,\cdots,n) \qquad (1.6.21)$$

其中

$$\gamma_{tm}^{s}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{sk}}{\partial q_r}-\frac{\partial a_{sr}}{\partial q_k}\right)b_{rt}b_{km},\quad (s=1,\cdots,n) \qquad (1.6.22)$$

称为Boltzmann三标记号。如果系数 a_{sk} 中除广义坐标外还包含时间 t，且

$$\omega_s=\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\dot{q}_k+a_{s,n+1},\quad \dot{q}_r=\sum_{k=1}^{n}b_{rk}\omega_k+b_{r,n+1}$$

$$(s,r=1,\cdots,n) \qquad (1.6.23)$$

那么，用（$n+1$）替代式（1.6.21）和（1.6.22）中的 n，并且令

$$\dot{q}_{n+1}=1,\quad \omega_{n+1}=1,\quad \delta\pi_{n+1}=0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_{n+1})=\delta\dot{q}_{n+1}=0$$

于是式（1.6.21）成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\pi_s)-\delta\omega_s=\sum_{k=1}^{n+1}a_{sk}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_k)-\delta\dot{q}_k\right]+\sum_{t=1}^{n+1}\sum_{m=1}^{n+1}\gamma_{tm}^{s}\omega_t\delta\pi_m$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_k)-\delta\dot{q}_k\right]+\sum_{t=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\gamma_{tm}^{s}\omega_t\delta\pi_m$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\varepsilon_m^s\delta\pi_m \tag{1.6.24}$$

其中

$$\varepsilon_m^s=\gamma_{n+1,m}^{s}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{rk}}{\partial q_r}-\frac{\partial a_{sr}}{\partial q_k}\right)b_{r,n+1}b_{km}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{sk}}{\partial t}-\frac{\partial a_{s,n+1}}{\partial q_k}\right)b_{km} \tag{1.6.25}$$

如果考虑到线性非完整约束关系，可将后面 g 个准速度 $\omega_{\varepsilon+\beta}$ 按约束方程的左端选取，而前面 ε 个准速度 ω_σ 任意独立地选取，这时式（1.6.21）和（1.6.24）分别为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\pi_s)-\delta\omega_s=\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_k)-\delta\dot{q}_k\right]+\sum_{\rho=1}^{\varepsilon}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\gamma_{\rho\sigma}^{s}\omega_\rho\delta\pi_\rho \tag{1.6.26}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\pi_s)-\delta\omega_s=\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_k)-\delta\dot{q}_k\right]$$

$$+\sum_{\rho=1}^{\varepsilon}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\gamma_{\rho\sigma}^{s}\omega_\rho\delta\pi_\rho+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\varepsilon_\sigma^s\delta\pi_\sigma \tag{1.6.27}$$

下面将广义坐标下的交换关系用准坐标下的交换关系和准坐标的变分表出。将式（1.6.15）对 t 求导数，对式（1.6.13）取变分，并将所得结果相减，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s)-\delta\dot{q}_s=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\omega_k}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\pi_k)-\delta\omega_k\right]$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_k}-\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \pi_k}\right)\delta \pi_k,\quad (s=1,\cdots,n) \tag{1.6.28}$$

1.6.2 高阶非完整系统的交换关系

1. 广义坐标下的交换关系

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定，它的运动受有 g 个理想 m 阶非完整约束

$$\overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta^{(m)}(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m-1)}{q_s},\overset{(m)}{q_\sigma},t)$$

$$\left(\begin{array}{l}\beta=1,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g;\\ \sigma=1,\cdots,\varepsilon;\ s=1,\cdots,n\end{array}\right) \tag{1.6.29}$$

据 m 阶 Appell-Чстаев 定义（1.4.19），有

$$\delta \overset{(m-1)}{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \varphi_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}\delta \overset{(m-1)}{q_\sigma} \tag{1.6.30}$$

对式（1.6.29）取变分，令

$$\delta \overset{(k)}{q_s}=0,\quad (k=0,1,\cdots,m-2),\quad \delta t=0 \tag{1.6.31}$$

并注意到式（1.6.30），有

$$\delta \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \varphi_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{q_\sigma}}\delta \overset{(m-1)}{q_\sigma}+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial \varphi_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\varepsilon+\gamma}}\frac{\partial \varphi_\gamma^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}\delta \overset{(m-1)}{q_\sigma}$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \varphi_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}\delta \overset{(m)}{q_\sigma} \tag{1.6.32}$$

将式（1.6.30）对 t 求导数，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta \overset{(m-1)}{q}_{\varepsilon+\beta})=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}\delta \overset{(m-1)}{q_\sigma}+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \varphi_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta \overset{(m-1)}{q_\sigma}) \tag{1.6.33}$$

采用交换关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta \overset{(m-1)}{q_\sigma})=\delta \overset{(m)}{q_\sigma},\quad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{1.6.34}$$

则由式（1.6.32）、（1.6.33）和（1.6.34）得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta \overset{(m-1)}{q}_{\epsilon+\beta})-\delta \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\epsilon}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_{\beta}^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\sigma}}-\frac{\partial \varphi_{\beta}^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\sigma}}$$

$$-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial \varphi_{\beta}^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\epsilon+\gamma}}\frac{\partial \varphi_{\gamma}^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\sigma}}\Big)\delta \overset{(m-1)}{q}_{\sigma},\quad (\beta=1,\cdots,g)$$

(1.6.35)

称式（1.6.34）和（1.6.35）为高阶非完整系统广义坐标下的交换关系。

研究式（1.6.34）、（1.6.35）的两个特殊情形。当 $m=1$ 时，关系（1.6.34）和（1.6.35）成为式（1.6.5）和（1.6.6）。当 $m=2$ 时，给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\dot{q}_{\sigma})=\delta\ddot{q}_{\sigma},\quad (\sigma=1,\cdots,\epsilon)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\dot{q}_{\epsilon+\beta})-\delta\ddot{q}_{\epsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\epsilon}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_{\beta}^{(2)}}{\partial\ddot{q}_{\sigma}}-\frac{\partial\varphi_{\beta}^{(2)}}{\partial\dot{q}_{\sigma}}$$

$$-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial\varphi_{\beta}^{(2)}}{\partial\dot{q}_{\epsilon+\gamma}}\frac{\partial\varphi_{\gamma}^{(2)}}{\partial\ddot{q}_{\sigma}}\Big)\delta\dot{q}_{\sigma},\quad (\beta=1,\cdots,g)\quad (1.6.36)$$

2. 准坐标下的交换关系

设力学系统受有 g 个理想 m 阶非完整约束

$$f_{\beta}(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m)}{q}_s,t)=0,\quad (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n)$$

(1.6.37)

取 $\epsilon=n-g$ 个彼此函数独立的 m 阶准速度 $\overset{(m-1)}{\omega}_{\sigma}$

$$\overset{(m-1)}{\omega}_{\sigma}=\overset{(m-1)}{\omega}_{\sigma}(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m)}{q}_s,t),\quad (\sigma=1,\cdots,\epsilon)\ (1.6.38)$$

假设由式（1.6.37）和（1.6.38）可解出 $\overset{(m)}{q}_s$，并记作

$$\overset{(m)}{q}_s=\psi_s^{(m)}(q_k,\dot{q}_k,\cdots,\overset{(m-1)}{q}_k,\overset{(m-1)}{\omega}_{\sigma},t),\quad (s,k=1,\cdots,n)$$

(1.6.39)

此时 m 阶 Appell-Четаев 定义为

$$\delta\overset{(m-1)}{q}_s=\sum_{\sigma=1}^{\epsilon}\frac{\partial\psi_s^{(m)}}{\partial\overset{(m-1)}{\omega}_{\sigma}}\delta\overset{(m-1)}{\pi}_{\sigma},\quad (s=1,\cdots,n)\quad (1.6.40)$$

对式（1.6.39）取变分，令

$$\delta \overset{(k)}{q}_s=0, \quad (k=0,1,\cdots,m-2), \quad \delta t=0 \tag{1.6.41}$$

并注意到式（1.6.40），有

$$\delta \overset{(m)}{q}_s=\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi_s^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_k} \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \phi_k^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma} \delta \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \phi_s^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma} \delta \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma,$$

$$(s=1,\cdots,n) \tag{1.6.42}$$

将式（1.6.40）对 t 求导数，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta \overset{(m-1)}{q}_s)=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \phi_s^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma} \delta \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \phi_s^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma)$$

$$\tag{1.6.43}$$

对此情形应用式（1.3.39），则有

$$\frac{\partial}{\partial \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}=\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \phi_s^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma} \frac{\partial}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s} \tag{1.6.44}$$

由式（1.6.42）、（1.6.43）和（1.6.44），得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta \overset{(m-1)}{q}_s)-\delta \overset{(m)}{q}_s=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \phi_s^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}-\frac{\partial \phi_s^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}\right) \delta \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \phi_s^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma)-\delta \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma\right] \tag{1.6.45}$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma)=\delta \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma, \quad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{1.6.46}$$

将其代入式（1.6.45），得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta \overset{(m-1)}{q}_s)-\delta \overset{(m)}{q}_s=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \phi_s^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}-\frac{\partial \phi_s^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}\right) \delta \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma$$

$$(s=1,\cdots,n) \tag{1.6.47}$$

称式（1.6.46）、（1.6.47）为高阶非完整系统准坐标下的交换关系。

广义坐标下的交换关系（1.6.34）、（1.6.35）以及准坐标下

的交换关系（1.6.46）、（1.6.47）可用于导出高阶非完整系统的运动微分方程以及研究高阶非完整系统的 Hamilton 原理。

1.6.3 新型交换关系

1. Vujanović 交换关系

1975年 Vujanović 在研究完整非保守系统的变分原理时提出一种新型交换关系，认为对完整非保守系统 $\mathrm{d}\delta\neq\delta\mathrm{d}$，而其差与动力学函数和广义力有关[28]。设系统的 Lagrange函数为

$$L=L_2+L_1+L_0$$

其中 L_2、L_1 和 L_0 分别为Lagrange 函数中对广义速度的齐二次式，齐一次式和零次式；而非势广义力为 $Q'_s=Q'_s(q_k,\dot{q}_k,t)$。

定义 1 交换关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s)=\delta\dot{q}_s-\frac{\dot{q}_s}{2L_2+L_1}\sum_{k=1}^{n}Q'_k\delta q_k,\qquad (s=1,\cdots,n) \tag{1.6.48}$$

称为Vujanović 交换关系。

由定义（1.6.48）得知，对完整保守系统，因 $Q'_k=0$，故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s)=\delta\dot{q}_s,\qquad (s=1,\cdots,n) \tag{1.6.49}$$

因此，Vujanović 认为 $\mathrm{d}\delta=\delta\mathrm{d}$ 对完整保守系统成立。

2. 非完整系统的新型交换关系

设非完整约束表为形式

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0,\qquad (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n) \tag{1.6.50}$$

定义 2 交换关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s)-\delta\dot{q}_s=-\frac{\dot{q}_s}{2L_2+L_1}\sum_{k=1}^{n}\left(Q'_k+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_k}\right)\delta q_k \tag{1.6.51}$$

称为非完整系统的新型交换关系，其中 λ_β 为约束乘子。

显然，交换关系（1.6.51）比（1.6.48）更为一般，因为当没有非完整约束时，关系（1.6.51）成为式（1.6.48）。

利用新型交换关系（1.6.48）可将完整非保守系统的Hamilton原理化成简单形式；利用新型交换关系（1.6.51）可将非完整非保守系统的Hamilton原理化成简单形式。

§1.7 历史资料

1.7.1 名家介绍

J. L. Lagrange（1738—1813） 法国力学家、数学家。Lagrange是分析力学的奠基人。在他的著作《分析力学》(Mécanique analytique, 1788)中提出虚功原理，并与D'Alembert原理结合而得到动力学普遍方程——D'Alembert-Lagrange原理；提出约束、广义坐标的概念，并得到完整系统广义坐标中的方程——第二类Lagrange方程；给出Lagrange最小作用量原理；提出流体运动的Lagrange描述法，以及重刚体定点转动的Lagrange可积情形（1811）。

1.7.2 国外分析力学名著与教材

1. J. R. D'Alembert, Traité de dynamique, Paris, 1743 这本《动力学》，除前言外共分两部分、7章。书中指出Newton第二定律也适用于非自由物体和完全固定的物体。从此开辟了对非自由质点系动力学的研究。书中提出的原理，后来演变为D'Alembert原理的近代说法。这本书不仅为后来分析力学的形成提供了重要资料，而且也是力学学科的名著。

2. J. L. Lagrange, Mécanique analytique, 1788。这部《分析力学》是分析力学的奠基性著作。书中包括静力学8章，动力学12章。该书用分析方法从变分原理出发建立受约束力学系统平衡和运动的方程，首次采用广义坐标、广义速度等概念。书中也讨论了小振动理论。整本书用分析形式写成，没有一张图。

1815年的第三版附有8篇附录，其中一篇是论重刚体绕定点转动的可积情形的论文。本书是力学学科的名著。

3. S. D. Poisson, Traité de dynamique, Paris, 1833。这本《动力学》在很长时间内作为标准教科书。

4. W. R. Hamilton, On a general method in dynamics, by which the study of the motion of all free systems attracting or repeling points is reduced to the search and differentiation of one central relation or characteristic function, Phil. Trans. of the Roy. Soc., T. Ⅱ, 1834, p247—308; Second essay on a general method in dynamics, Phil. Trans. of the Roy. Soc., T. Ⅰ, 1835, p95—144。这是Hamilton的两篇划时代的论文，文中提出Hamilton原理与正则方程。

5. C. G. J. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, 1866。这本《动力学讲演录》是作者生前的讲课记录，书中叙述了分析力学中的正则方程解法和正则变换，是Hamilton-Jacobi方程的最早记录。本书是力学学科的名著。

6. H. Hertz, Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt, Leibzig, 1894。这本《力学原理》包括3卷，第一卷是质点系几何学和运动学，第二卷是质点系力学，第三卷是杂文和电波。书中首次将约束和力学系统分成完整的和非完整的两大类。本书是力学学科名著。

7. H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Paris, 1892, 1893, 1899。这套《天体力学新方法》共3卷，总结了天体力学问题，特别是三体问题中提出的许多数学方法和理论，如积分不变量，小参数方法，摄动理论，周期解稳定性理论等。现代力学中许多非线性问题的解法和理论都源于此书。本书为力学学科名著。

8. A. M. Ляпунов, Общая задача об устойчивости

движения, Харьков, 1892。这本《运动稳定性的一般问题》提出了运动稳定性的严格定义和两种分析方法——特征数法和Ляпунов函数法。在20世纪，Ляпунов方法被广泛用于解决力学系统，自动调节系统等的稳定性问题。本书为力学学科名著。

9. P. Appell, Traité de mécanique rationnelle, Paris, 1896, 1899, 1953, 1955。这套《理性力学》共5卷，其中第一卷为静力学、点的动力学，第二卷为系统动力学、分析力学。在第二卷第24章"分析动力学的普遍方程"中给出了著名的Appell方程。这套书曾多次再版，不仅在法国而且在世界都是非常著名的教材。本书是分析力学的名著。

10. E. T. Whittaker, A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies, Combridge, 1904, 1917, 1927, 1937。这本《分析动力学》在剑桥大学多次出版，是本世纪初以前分析力学成就的很好总结。本书是分析力学的名著。

11. G. Hamel, Theoretische Mechanik, S-V, 1949。这本《理论力学》是一部很有特色的专著，其中第9章"有限自由度的非完整系统"给出了著名的Boltzmann-Hamel方程并给出二阶非完整约束的例子。

12. C. Lanzos, The variational principles of mechanics, University of Toronto Press, 1949。这本《力学的变分原理》对基本概念，求解动力学问题的变分方法讲得好。

13. J. L. Synge, Classical dynamics, S-V, 1960。这本《经典动力学》分6个部分，包括引论，运动学，质点动力学，质点系和刚体动力学，一般动力理论，相对论性动力学等。侧重几何观点是本书特色。

14. Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике, Москва, 1960。这本《分析力学讲义》给出分析力学的方法及其在稳定性理论，振动理论和刚体动力学中的应用，较详细地阐述了力学的变分原理和积分不变量，正则变换和Hamilton—

Jacobi 方程。

15. А. И. Лурье, Аналитическая механика, ФМ, Москва, 1961。这本《分析力学》包括 12 章：基本定义，刚体运动学，刚体有限转动理论，基本动力学量，功和势能，动力学普遍方程和分析静力学，Lagrange 微分方程，运动微分方程的其它形式，相对运动动力学，正则方程和 Jacobi 定理，扰动理论，力学的变分原理等，以及两个附录。本书的特点在于材料丰富并较接近工程问题。

16. L. A. Pars, A treatise on analytical dynamics, London, William Heinemann, 1965。这本《分析动力学》包括 30 章，其中如 Lagrange 方程及其应用，冲击运动，基本方程的 6 种形式，接触变换，变分原理等讨论得相当详细。

17. В. С. Новоселов, Вариационные методы в механике, Л. 1966。这本《力学中的变分原理》包括 4 部分：完整系统的 D'Alembert-Lagrange 变分，非完整系统的 D'Alembert-Lagrange 变分，Gauss 变分，基于分析力学方法的最优过程理论等。本书对非完整系统的变分原理讨论得相当详细。

18. Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев, Динамика неголономных систем, м, 1967。本书《非完整系统动力学》是非完整系统分析力学方面的第一部专著。全书共 7 章，包括非完整系统运动学，用动力学普遍定律研究非完整系统的运动，非完整系统分析动力学，非完整系统力学中数学模型的修正，非完整系统的小振动和稳定性，非完整系统动力学和滚轮系统的线路稳定性问题，非完整系统动力学和电机的一般理论等。

1.7.3 我国出版的分析力学专著和教材

1. 汪家訸. 分析动力学. 北京：高等教育出版社，1958.

2. 王光远. 应用分析动力学. 北京：高等教育出版社，1982.

3. 汪家訸. 分析力学. 北京：高等教育出版社，1983.

4. 刘永. 分析力学. 哈尔滨：黑龙江科学技术出版社，1984.

5. 吴镇. 分析力学. 上海：上海交通大学，1984.

6. 黄昭度，纪辉玉. 分析力学. 北京：清华大学出版社，1985.

7. 谈开孚. 分析力学. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1985.

8. 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京：北京工业学院出版社，1985.

9. 陈滨. 分析动力学. 北京：北京大学出版社，1987.

10. 梅凤翔，刘桂林. 分析力学基础. 西安：西安交通大学出版社，1987.

11. 梅凤翔. 非完整动力学研究. 北京：北京工业学院出版社，1987.

12. 梅凤翔. 分析力学专题. 北京：北京工业学院出版社，1988.

13. 刘桂林. 分析力学范例与习题. 北京：北京理工大学出版社，1988.

14. 杨来伍，梅凤翔. 变质量系统力学. 北京：北京理工大学出版社，1989.

1.7.4 分析力学大事年表

1657 年　Fermat 提出最小时间原理。

1686 年　Leibniz 以物体质量与其速度平方之积为活力，并提出活力的守恒。

1690 年　J. Bernoulli 讨论悬链线平衡形状。

1717 年　J. Bernoulli 对虚位移原理作一般性表达。

1743 年　D'Alembert 在《动力学》中提出受约束质点的动力

学原理。

1744 年　Maupertuis 提出最小作用量原理。

1783 年　Carnot 提出虚位移的概念。

1788 年　Lagrange《分析力学》出版。

1829 年　Gauss 提出力学中的最小拘束原理。

1834—1835 年　Hamilton 提出 Hamilton 原理和正则方程。

1837 年　Jacobi 建立定理用以解 Hamilton 正则方程。

1872 年　Ferrers 导出非完整系统不带乘子的方程。

1876 年　Kirchhoff 将 Hamilton 原理推广到连续介质。

1876 年　Routh 用循环坐标将 Lagrange 方程降阶。

1877 年　Lie 应用接触变换于力学，处理正则方程的变换和积分。

1884 年　Routh 导出适用于非完整系统的带乘子的动力学方程。

1892 年　Ляпунов 提出运动稳定性的一般数学理论。

1894 年　Hertz 提出约束和系统分为完整的和非完整的。

1895 年　Чаплыгин 导出非完整系统不带乘子的动力学方程。

1898 年　Volterra 给出非完整系统准坐标中的方程。

1892—1899 年　Poincaré《天体力学新方法》3 卷出版。

1899 年　Appell 给出非完整系统的动力学方程。

1901 年　Levi-Civita 给出自治正则系统平稳解的定理。

1901 年　Maggi 给出非完整系统的动力学方程。

1901—1904 年　Воронец（1901），Boltzmann（1902），Hamel（1904）给出完整和非完整系统准坐标中的方程。

1904 年　Whittaker 在其《分析动力学》中总结经典力学的成果。

1908 年　Jourdain 提出一类微分变分原理。

1918 年　Noether 发表对称不变性定理。

1920 年　Ценов 提出非完整系统的混合型方程。

1922 年　Beghin 提出伺服约束的概念。

1926—1928 年　Vranceanu, Horak, Schouten, Cartan 提出非完整几何学。

1932—1933 年　Четаев 提出非线性非完整约束的虚位移定义。

1935 年　Nielsen 在其《基础力学》中提完整系统一类新方程。

1936 年　Mac-Millan 在其《刚体动力学》中提出非完整系统一类新方程。

1937 年　Agostinelli 提出等价动力系统。

1939 年　Добронравов 得到非完整系统准坐标中的正则方程。

1957 年　Новоселов 对一阶非线性非完整系统动力学进行一系列研究。

1958 年　汪家訸的《分析动力学》出版。

1962 年　Mangeron、Deleanu 得到高阶系统的动力学方程。

1962—1963 年　Арнольд 和 Moser 发展了 Колмогоров 1954 年关于近 Hamilton 系统的理论，形成 KAM 定理。

1964 年　牛青萍提出速度空间和加速度空间虚位移的概念。

1966 年　Долапчиев 提出高阶非完整系统的动力学方程。

1967 年　Неймарк 和 Фуфаев《非完整系统动力学》出版。

1969 年　Godbillon 的《微分几何和分析力学》出版。

1974 年　Арнольд 的《经典力学的数学方法》出版。

1978 年　Abraham 和 Marsden 的《力学基础》出版。

1.7.5 关于分析力学的历史与现状研究

文献〔15〕对非完整力学的发展简史作了很好的总结，收集了50年代以前的大量文献。文献〔16〕的参考书目有515篇，反映了60年代以前人们在非完整系统分析力学方面的主要贡献。文献〔17〕研究了分析力学的近代发展以及非完整力学的历史与现状，特别列举了我国分析力学的近年研究成果。

1.7.6 关于分析力学的基本概念的研究

文献〔7〕对约束的研究相当出色。关于分析力学基本概念的讲述与讨论还可参考文献〔18〕—〔27〕。

习　　题

1．一质点在空间中运动，所受约束为

$$\dot{z}e^{x}-\dot{y}=0$$

试证这是一个非完整约束，但可找到满足约束的一些轨道 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$。

2．试证（1.3.5）是不可积的。

3．验证约束 $\dot{x}(x^2+y^2+z^2)+2(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})=0$ 不满足条件(1.1.26)，但却是可积的。

4．试证，如约束 $f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0$，($\beta=1,\cdots,g$；$s=1,\cdots,n$) 是可积的，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}=0,\qquad(\beta=1,\cdots,g;s=1,\cdots,n)$$

5．试用抛物线坐标 u，v，φ 及其对时间的导数来表示点的速度和加速度，其中 $x=\sqrt{uv}\cos\varphi$，$y=\sqrt{uv}\sin\varphi$，$z=\frac{1}{2}(u-v)$。

6．利用（1.3.19）及（1.2.8），试证下述关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial r_i}{\partial\pi_s}-\frac{\partial\dot{r}_i}{\partial\pi_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial r_i}{\partial q_k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\omega_s}$$

7. 一质点在空间中运动，所受约束为$\dot{y}=z\dot{x}$。试分别用 Hertz-Hölder 原则和 Appell-Четаев 定义给出该约束加在虚位移上的条件。

8. “当有微分约束在场时，正像当有非无限小约束在场时那样，虚位移只有在那种场合下才和实位移相合，即约束是稳定的。” Бухгольц 书中这段话是否正确？

9. 试证明如下交换关系

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta \overset{(m-1)}{q_s}) - \delta \overset{(m)}{q_s} = & \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Bigg(m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}} - \frac{\partial \varphi_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{q_\sigma}} \\
& \sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial \varphi_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{q_{\varepsilon+\gamma}}}\frac{\partial \varphi_\gamma^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}\Bigg)\delta \overset{(m-1)}{q_\sigma} \\
& + \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \varphi_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}\left[m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta \overset{(m-1)}{q_\sigma}) - \delta \overset{(m)}{q_\sigma}\right], \quad (\beta=1,\cdots,g)
\end{aligned}
$$

参 考 文 献

〔1〕 Добронравов В В. Основы механики неголономных систем. М: Высшая школа, 1970.

〔2〕 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京: 北京工业学院出版社, 1985.

〔3〕 Добронравов В В. Основы аналитической механики. М: Высшая школа. 1976.

〔4〕 Levi-Civita T, Amaldi U. Lezioni di meccanica razionale. Bologna, 1930.

〔5〕 梅凤翔. 分析力学专题. 北京: 北京工业学院出版社, 1988.

〔6〕 Арнольд В И. Математические методы классической механики. М: Наука, 1974.

〔7〕 陈滨. 分析动力学. 北京: 北京大学出版社, 1987.

〔8〕 Synge J. Tensorial methods in dynamics. Toronto: University of Toronto Press, 1936.

〔9〕 Новоселов В С. Вариационные методы в механике. Л:

ЛГУ, 1966.

〔10〕 Lagrange J-L. Mécanique analytique. T. Ⅰ, Ⅱ, Paris, 1788.

〔11〕 Hertz H. Die Prinzipien der Mechanik. Gesammelte Werke, T. Ⅲ, 1894.

〔12〕 Appell P. Traité de mécanique rationnelle, Paris; Gauthier-Villars, 1919—1924.

〔13〕 Лурье А И. Аналитическая механика. М; ГИФМЛ, 1961.

〔14〕 牛青萍. 经典力学基本微分原理与不完整力学组的运动方程. 力学学报, 第 7 卷, 第 2 期, 1964.

〔15〕 Савин Г Н, Путята Т В, Фрадлин Б Н. Очерки развития некоторых фундаментальных проблем механики. Киев; Наукова думка, 1964.

〔16〕 Неймарк Ю И, Фуфаев Н А. Динамика неголономных систем. М; Наука, 1967.

〔17〕 梅凤翔. 非完整动力学研究. 北京: 北京工业学院出版社, 1987.

〔18〕 Whittaker E T. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. 4th ed. New York; The Macmillan Co., 1944.

〔19〕 Pars L A. A treatise on analytical dynamics. London; Heinmann, 1965.

〔20〕 甘特马赫 Φ P. 分析力学讲义. 钟奉俄, 薛问西译. 北京: 高等教育出版社, 1964.

〔21〕 汪家訸. 分析力学. 北京: 高等教育出版社, 1983.

〔22〕 王光远. 应用分析动力学. 北京: 高等教育出版社, 1982.

〔23〕 黄昭度, 纪辉玉. 分析力学. 北京: 清华大学出版社, 1985.

〔24〕 刘永. 分析力学. 哈尔滨: 黑龙江科技出版社, 1984.

〔25〕 谈开孚. 分析力学. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1985.

〔26〕 吴镇. 分析力学. 上海: 上海交通大学, 1984.

〔27〕 梅凤翔, 刘桂林. 分析力学基础. 西安: 西安交通大学出版社, 1987.

〔28〕 Vujanović B. ZAMM., Vol. 55, p321, 1975.

第二章　分析力学的变分原理

分析力学的变分原理分为两大类：一类是微分变分原理，另一类是积分变分原理。微分变分原理是研究力学系统在某状态邻近无限小时间间隔中真实运动和其它可能运动之间所做的局部比较。比较结果表明，对真实运动来说，某函数取极值。积分变分原理是研究力学系统在一段有限时间内真实运动与可能运动之间的比较。比较结果表明，对真实运动来说，某泛函取极值。

分析力学的变分原理是整个分析力学的基础和出发点。同时又有相当的概括性，对坐标变换的不变性以及比微分方程有更广泛的适应性等优点。

在这一章里，我们介绍微分变分原理，完整系统在广义坐标下的积分变分原理，完整系统在准坐标下的积分变分原理，非完整系统的积分变分原理，一类新型积分变分原理，新型交换关系下的 Hamilton 原理，最后给出一些历史资料。

§2.1　微分变分原理

本节讨论 D'Alembert-Lagrange 原理，Jourdain 原理，Gauss 原理和万有 D'Alembert 原理等各种微分变分原理，最后讨论微分变分原理的应用。

2.1.1 D'Alembert-Lagrange 原理

1. D'Alembert 原理

设力学系统由 N 个质量为 $m_i(i=1,\cdots,N)$ 的质点组成，质点的加速度为 $\boldsymbol{a}_i=\ddot{\boldsymbol{r}}_i$，我们把 $\boldsymbol{\Phi}_i=-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 称为惯性力。D'Alem-

bert 原理指出，在每一瞬时，作用在质点上的主动力 $\boldsymbol{F}_i$，约束反力 $\boldsymbol{R}_i$，以及假想的惯性力 $\boldsymbol{\Phi}_i$，必满足平衡条件

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{\Phi}_i+\boldsymbol{R}_i=0, \qquad (i=1,\cdots,N) \tag{2.1.1}$$

D'Alembert 原理 (2.1.1)有重要的理论意义和应用价值。首先，它把动力学问题用静力平衡方法来求解，形成所谓“动静法”。用这个方法思考问题简单，而且有时解题很方便。其次，D'Alembert 原理与虚位移原理联合而构成动力学普遍方程——D'Alembert-Lagrange 原理。

2．虚位移原理

虚位移原理可表述如下：在理想双面约束下，力学系统平衡的必要和充分条件是作用在系统上的主动力在任何为约束允许的虚位移中所作元功之和等于零，即

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{2.1.2}$$

虚位移原理，亦称虚功原理，它是分析静力学的基础，用它来解静力学问题有许多方便之处。虚位移原理与 D'Alembert 原理联合而构成 D'Alembert-Lagrange 原理。

3．D'Alembert-Lagrange 原理

根据 D'Alembert 原理，加在系统的点上的主动力 $\boldsymbol{F}_i$，约束反力 $\boldsymbol{R}_i$，以及假想的惯性力 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 所组成的力系，在每一瞬时，即在运动系统的每个位置上，都满足平衡条件。但是，对于满足平衡条件的力系可以应用由虚位移原理所表示的平衡条件。因此，D'Alembert 原理与虚位移原理相结合，就得到 D'Alembert-Lagrange 原理。这个原理可表述如下：在理想双面约束下，在所有时刻真实运动不同于运动学上可能的运动仅在于，对真实运动来说，主动力和假想的惯性力在系统任何虚位移中所作的元功之和等于零。

由 D'Alembert 原理和虚位移原理，我们有

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{2.1.3}$$

在理想约束下，即当

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{2.1.4}$$

时，式（2.1.3）成为

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{2.1.5}$$

这是D'Alembert-Lagrange原理的矢量形式。原理（2.1.5）在直角坐标下表为

$$\sum_{i=1}^{N}\{(-m_i\ddot{x}_i+F_{ix})\delta x_i+(-m_i\ddot{y}_i+F_{iy})\delta y_i$$
$$+(-m_i\ddot{z}_i+F_{iz})\delta z_i\}=0 \tag{2.1.6}$$

4. D'Alembert-Lagrange 原理在广义坐标中的表达

现在变换惯性力在虚位移上所作元功之和 $-\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i$。为此，引进系统的动能 $T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i$，并且暂时不考虑非完整约束的限制。

命题1 我们有

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s \tag{2.1.7}$$

〔证明〕

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{n}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_s}\right)-m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}\right\}\delta q_s$$

利用经典Lagrange关系（1.2.8）及关系（1.4.3），上式右端

成为

$$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\delta q_s\right)=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i$$

‖

根据命题1，D'Alembert-Lagrange 原理（2.1.5）可表为 Euler-Lagrange 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}+Q_s\right)\delta q_s=0 \tag{2.1.8}$$

其中

$$Q_s=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \tag{2.1.9}$$

为广义力。若引进 Euler 算子

$$E_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s},\qquad (s=1,\cdots,n) \tag{2.1.10}$$

则式（2.1.8)写成

$$\sum_{s=1}^{n}\{-E_s(T)+Q_s\}\delta q_s=0 \tag{2.1.11}$$

命题2 我们有

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_s}-2\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s \tag{2.1.12}$$

〔证明〕

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_s}-2\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{n}\left(m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_s}+m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_s}-2m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}\right)\delta q_s$$

据经典 Nielsen 关系（1.2.12）以及关系（1.2.8）的第一式，上式右端与式（2.1.12）左端一致。‖

根据命题2，D'Alembert-Lagrange 原理（2.1.5）可表为

Nielsen 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(2\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}+Q_s\right)\delta q_s=0 \qquad (2.1.13)$$

若引进 Nielsen算子[1]

$$N_s=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-2\frac{\partial}{\partial q_s}, \qquad (s=1,\cdots,n) \quad (2.1.14)$$

则式（2.1.13）写成

$$\sum_{s=1}^{n}\{-N_s(T)+Q_s\}\delta q_s=0 \qquad (2.1.15)$$

现在引进系统的加速度能量

$$S=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_i \qquad (2.1.16)$$

命题 3 我们有

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}\delta q_s \qquad (2.1.17)$$

〔证明〕

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}\delta q_s=\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \ddot{q}_s}\delta q_s=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i \qquad \|$$

根据命题 3，D'Alembert-Lagrange 原理（2.1.5）可表为 Appell 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}+Q_s\right)\delta q_s=0 \qquad (2.1.18)$$

在建立命题 1—命题 3 时，并未考虑到非完整约束的限制。但原理（2.1.8)、(2.1.13）和（2.1.18）对非完整系统仍然有效。实际上，在许多情况下仅在得到这些形式后才考虑到非完整约束，从而推导出非完整系统的运动微分方程。

用 D'Alembert-Lagrange 原理可推导完整系统和一阶非完

整系统的运动微分方程。对于线性非完整约束系统来说，约束对于虚位移的限制乃是关于 δq_s 的线性式，因此可直接应用原理(2.1.8)、(2.1.13) 和 (2.1.18)。对于非线性非完整系统，则需采用Appell–Четаев 定义。

2.1.2 Jourdain 原理

1. Jourdain 原理

在 D'Alembert–Lagrange 原理中变分是坐标的变分，即通常所指的虚位移。在 Jourdain 原理中变分是速度的变分，即速度空间的虚位移[2]。Jourdain 原理可表示为

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i=0 \tag{2.1.19}$$

此原理对约束所加限制是 Jourdain 意义下的理想性，即

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i=0 \tag{2.1.20}$$

2. Jourdain 原理在广义坐标中的表达

在 2.1.1 中的命题 1—命题 3，对速度空间的虚位移仍然成立，即有下述结果

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}E_s(T)\delta\dot{q}_s=\sum_{s=1}^{n}N_s(T)\delta\dot{q}_s=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_s}\delta\dot{q}_s \tag{2.1.21}$$

利用这些结果容易将 Jourdain 原理（2.1.9）表为 Euler–Lagrange 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}+Q_s\right)\delta\dot{q}_s=0 \tag{2.1.22}$$

Nielsen 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(2\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_s}+Q_s\right)\delta\dot{q}_s=0 \tag{2.1.23}$$

以及 Appell 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}+Q_s\right)\delta\dot{q}_s=0 \qquad (2.1.24)$$

利用 Jourdain 原理（2.1.22）—（2.1.24）可以推导完整系统的运动微分方程。考虑到非完整约束对速度空间虚位移的限制，它们还可用于推导一阶非完整系统的运动微分方程。利用二阶 Appell-Четаев 定义（1.4.20），还可用于推导二阶非完整系统的运动微分方程。

2.1.3 Gauss 原理

1．Gauss 原理

Gauss 原理的物理基础是最小拘束的概念。力学系统的拘束可表为

$$Z_w=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\ddot{\boldsymbol{r}}_i-\frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\right)^2 \qquad (2.1.25)$$

Gauss 原理可表述如下：在每一时刻处于主动力及理想双面约束下的系统，其真实运动不同于所有同样初位置、同样初速度的运动学可能的运动之处在于，真实运动对自由运动的偏离的量度（拘束）是极小。

Gauss 原理的数学表示为

$$\delta Z_w=0$$

或

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i=0 \qquad (2.1.26)$$

而 Gauss 意义下的理想约束条件为

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i=0 \qquad (2.1.27)$$

2．Gauss 原理在广义坐标中的表达

在 2.1.1 中的命题 1—命题 3， 对加速度空间的虚位移仍然成立，即有下述结果

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{s=1}^{n} E_s(T) \delta \ddot{q}_s = \sum_{s=1}^{n} N_s(T) \delta \ddot{q}_s = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} \delta \ddot{q}_s \tag{2.1.28}$$

利用这些结果容易将 Gauss 原理(2.1.26)表为 Euler-Lagrange 形式

$$\sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + Q_s \right) \delta \ddot{q}_s = 0 \tag{2.1.29}$$

Nielsen 形式

$$\sum_{s=1}^{n} \left(2 \frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s} + Q_s \right) \delta \ddot{q}_s = 0 \tag{2.1.30}$$

以及 Appell 形式

$$\sum_{s=1}^{n} \left(- \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} + Q_s \right) \delta \ddot{q}_s = 0 \tag{2.1.31}$$

利用 Gauss 原理可以推导完整系统和一阶非完整系统的运动微分方程。Gauss 原理 (2.1.29)—(2.1.31) 联同加速度空间的虚位移定义，还可推导二阶非完整系统的运动微分方程。Gauss 原理 (2.1.29)—(2.1.31) 联同三阶 Appell-Четаев 定义(1.4.19)($m=3$)，还可推导三阶非完整系统的运动微分方程。

2.1.4 万有 D'Alembert 原理

1. 万有 D'Alembert 原理

万有 D'Alembert 原理是最一般的微分变分原理，其形式为[3]

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i - m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \overset{(m)}{\delta} \boldsymbol{r}_i = 0$$

$$\delta t = 0, \ \delta \boldsymbol{r}_i = \delta \dot{\boldsymbol{r}}_i = \cdots = \overset{(m-1)}{\delta} \boldsymbol{r}_i = 0, \ \overset{(m)}{\delta} \boldsymbol{r}_i \neq 0, \qquad (m=0,1,2,\cdots) \tag{2.1.32}$$

其中 $\overset{(m)}{\boldsymbol{r}_i}$ 是点的矢径 $\boldsymbol{r}_i$ 对时间 t 的 m 阶导数。原理（2.1.32）对约束的理想性限制可表为

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\overset{(m)}{\boldsymbol{r}_i}=0 \tag{2.1.33}$$

万有 D'Alembert 原理（2.1.32）是罗马尼亚学者 Mangeron 和 Deleanu 于 1962 年提出的。它表示，系统的主动力和惯性力在 m 次速度空间中的虚位移上所作“元功”之和等于零。

万有 D'Alembert 原理(2.1.32)是最一般的微分变分原理。当 $m=0$ 时，原理（2.1.32）成为 D'Alembert-Lagrange 原理（2.1.5）；当 $m=1$ 时，原理（2.1.32）成为 Jourdain 原理(2.1.19)；而当 $m=2$ 时，原理(2.1.32)成为 Gauss 原理(2.1.26)。

2．万有 D'Alembert 原理在广义坐标中的表达

在 2.1.1 中的命题 1—命题 3，对 m 次速度空间中的虚位移仍然成立，即有下述结果

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\overset{(m)}{\boldsymbol{r}_i}=\sum_{s=1}^{n}E_s(T)\delta\overset{(m)}{q_s}=\sum_{s=1}^{n}N_s(T)\delta\overset{(m)}{q_s}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_s}\delta\overset{(m)}{q_s} \tag{2.1.34}$$

利用这些结果容易将万有 D'Alembert 原理(2.1.32)表为 Euler-Lagrange 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}+Q_s\right)\delta\overset{(m)}{q_s}=0 \tag{2.1.35}$$

Nielsen 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(2\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_s}+Q_s\right)\delta\overset{(m)}{q_s}=0 \tag{2.1.36}$$

以及 Appell 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_s}+Q_s\right)\delta\overset{(m)}{q_s}=0 \tag{2.1.37}$$

下面将万有 D'Alembert 原理(2.1.32)表为Mangeron-Deleanu形式。

命题4 我们有

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \overset{(m)}{\boldsymbol{r}_i} = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{m} \left\{ \frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} - (m+1) \frac{\partial T}{\partial q_s} \right\} \delta \overset{(m)}{q_s}, \quad (m=1,2,\cdots) \qquad (2.1.38)$$

其中$\overset{(m)}{T}$为动能T对时间t的m阶导数。

〔证明〕 将点的矢径$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_s,t)$对时间$t$求$m$阶导数，得到

$$\overset{(m)}{\boldsymbol{r}_i} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \overset{(m)}{q_s} + m\left(\sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s \partial q_k} \overset{(m-1)}{q_s} \dot{q}_k + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s \partial t} \overset{(m-1)}{q_s} \right) + \cdots \qquad (2.1.39)$$

其中未写出之项不含$\overset{(m)}{q_s}$，$\overset{(m-1)}{q_s}$。由此得到下述重要关系

$$\frac{\partial \overset{(m)}{\boldsymbol{r}_i}}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}} = m \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial \overset{(m)}{\boldsymbol{r}_i}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \qquad (2.1.40)$$

将动能$T=(1/2)\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i$对时间$t$求$m$阶导数，得

$$\overset{(m)}{T} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \overset{(m+1)}{\boldsymbol{r}_i} + m \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \overset{(m)}{\boldsymbol{r}_i} + \cdots \qquad (2.1.41)$$

其中未写出之项不含$\overset{(m)}{\boldsymbol{r}_i}$，$\overset{(m+1)}{\boldsymbol{r}_i}$。由式(2.1.41)，得

$$\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \overset{(m+1)}{\boldsymbol{r}_i}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} + m \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \overset{(m)}{\boldsymbol{r}_i}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} \qquad (2.1.42)$$

又

$$\frac{\partial T}{\partial q_s} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s} \qquad (2.1.43)$$

由式(2.1.42)、(2.1.43)和(2.1.40)，并注意到

$$\overset{(m)}{\delta}\boldsymbol{r}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_s} \delta \overset{(m)}{q}_s \tag{2.1.44}$$

便得式(2.1.38)。 ‖

推论 1 当$m=1$时，命题4成为命题2。

推论 2 当$m=2$时，命题4给出二阶 Ценов 形式

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_s} - 3\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta \ddot{q}_s \tag{2.1.45}$$

推论 3 当$m=3$时，命题4给出三阶 Ценов 形式

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \dddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \dddot{T}}{\partial \dddot{q}_s} - 4\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta \dddot{q}_s \tag{2.1.46}$$

根据命题4，万有 D'Alembert 原理(2.1.32)可表为 Mangeron-Deleanu 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\frac{1}{m}\left[(m+1)\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\right] + Q_s\right\}\delta \overset{(m)}{q}_s = 0 \tag{2.1.47}$$

根据推论2和推论3，万有 D'Alembert 原理可表为二阶 Ценов 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}\left(3\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_s}\right) + Q_s\right\}\delta \ddot{q}_s = 0 \tag{2.1.48}$$

和三阶 Ценов 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\frac{1}{3}\left(4\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\partial \dddot{T}}{\partial \dddot{q}_s}\right) + Q_s\right\}\delta \dddot{q}_s = 0 \tag{2.1.49}$$

下面给出万有 D Alembert 原理的 Долапчиев 形式。取广义 Ценов 函数

$$K = \frac{1}{m}\left\{\overset{(m)}{T} - (m+1)\overset{(m)}{T}_0\right\} - \sum_{s=1}^{n} Q_s \overset{(m)}{q}_s, \quad (m=1,2,\cdots) \tag{2.1.50}$$

其中

$$\overset{(m)}{T}_0 \triangleq \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_s} \overset{(m)}{q_s} \tag{2.1.51}$$

命题5 我们有

$$\sum_{i=1}^{N} (-m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i + \boldsymbol{F}_i) \cdot \delta \overset{(m)}{\boldsymbol{r}_i} = -\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial K}{\partial \overset{(m)}{q_s}} \delta \overset{(m)}{q_s} \tag{2.1.52}$$

〔证明〕

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial K}{\partial \overset{(m)}{q_s}} \delta \overset{(m)}{q_s} = \sum_{s=1}^{n} \left\{ \frac{1}{m} \left[\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} - (m+1) \frac{\partial \overset{(m)}{T_0}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} \right] - Q_s \right\} \delta \overset{(m)}{q_s}$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \left\{ \frac{1}{m} \left[\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} - (m+1) \frac{\partial T}{\partial q_s} \right] - Q_s \right\} \delta \overset{(m)}{q_s}$$

利用命题 4，便证明了命题 5。

根据命题 5，万有 D'Alembert 原理可表为 Долапчиев 形式

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial K}{\partial \overset{(m)}{q_s}} \delta \overset{(m)}{q_s} = 0 \tag{2.1.53}$$

利用万有 D'Alembert 原理的各种表达（2.1.35）—（2.1.37），（2.1.47）—（2.1.49）和（2.1.53），以及 m 次速度空间的虚位移定义，可以推导出任意阶非完整系统的运动方程。

2.1.5 微分变分原理的应用

各种微分变分原理都可表为某函数取极值这一共性，因此微分变分原理在非线性力学，多刚体与机器人动力学等领域得到广泛应用。

1. Gauss 原理在机器人动力学中的应用

解决力学问题有两种方法："一种方法是根据平衡或运动规律的直接方法；另一种方法是运用极大值或极小值的公式，通过求极大值或极小值的方法求出这些公式的解"（Euler）。描述构件

之间具有各种约束的机器人非常复杂的空间机构时，确定闭式的动力学方程有不少困难。而建立相应的极值问题并不困难，这种极值问题作为很一般的数学规划问题。如果写成泛函，通过选取所有未知量使之取极小值，并确定对这些未知量所加的全部约束，那么就每一具体情况用数字计算机求这种极值问题的数值解，要比寻求解的解析式容易得多[5]。

选质量为 m^ν 的质点的齐次坐标 $\boldsymbol{r}^\nu=[r_1^\nu, r_2^\nu, r_3^\nu, 1]^T$，力 $\boldsymbol{F}^\nu=[F_1^\nu, F_2^\nu, F_3^\nu, 0]^T$，则拘束可写成

$$Z_w=\frac{1}{2}\sum_\nu m^\nu\left(\ddot{\boldsymbol{r}}^\nu-\frac{\boldsymbol{F}^\nu}{m^\nu}\right)^T\left(\ddot{\boldsymbol{r}}^\nu-\frac{\boldsymbol{F}^\nu}{m^\nu}\right)$$

据两矢量的标积可表为方阵的迹，上式可写成

$$\begin{aligned}Z_w&=\frac{1}{2}\sum_\nu m^\nu\mathrm{tr}\left\{\left(\ddot{\boldsymbol{r}}^\nu-\frac{\boldsymbol{F}^\nu}{m^\nu}\right)\left(\ddot{\boldsymbol{r}}^\nu-\frac{\boldsymbol{F}^\nu}{m^\nu}\right)^T\right\}\\&=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\sum_\nu m^\nu\ddot{\boldsymbol{r}}^\nu(\ddot{\boldsymbol{r}}^\nu)^T\right\}-\mathrm{tr}\left\{\sum_\nu\boldsymbol{F}^\nu(\ddot{\boldsymbol{r}}^\nu)^T\right\}+\cdots\end{aligned}\tag{2.1.54}$$

其中未写出之项不含 $\ddot{\boldsymbol{r}}^\nu$。现在研究由 n 个刚体组成的多刚体系统。对刚体之上每一质点在连体基中的矢径为 $\boldsymbol{\rho}_i^\nu=[\rho_{i1}^\nu, \rho_{i2}^\nu, \rho_{i3}^\nu, 1]^T$，在绝对坐标系中的加速度为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i^\nu=\ddot{\boldsymbol{T}}_i\boldsymbol{\rho}_i^\nu\tag{2.1.55}$$

其中 $\ddot{\boldsymbol{T}}_i$ 为位姿变换矩阵 $\boldsymbol{T}_i$ 对时间的二阶导数。将式(2.1.55)代入式(2.1.54)，得

$$Z_w=\sum_{i=1}^n\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\{\ddot{\boldsymbol{T}}_i\boldsymbol{H}_i\ddot{\boldsymbol{T}}_i^T\}-\mathrm{tr}\{\boldsymbol{\Phi}_i\ddot{\boldsymbol{T}}_i^T\}+\cdots\tag{2.1.56}$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}_i=\sum_\nu\boldsymbol{F}_i^\nu(\boldsymbol{\rho}_i^\nu)^T\tag{2.1.57}$$

为作用于刚体 i 上的作用力的 4×4 阶矩阵，而

$$\boldsymbol{H}_i=\sum_\nu m_i^\nu\boldsymbol{\rho}_i^\nu(\boldsymbol{\rho}_i^\nu)^T\tag{2.1.58}$$

为广义惯量的 4×4 阶矩阵。

下面研究具有简单开链的操作机器人机构。设机构中每个驱动器通过具有固定传动比的减速器操纵一个广义坐标 q_i 的变化。如果驱动器装在机构构件上，那么在机构运动过程中与回转着的转子轴方位的可能变化有关的附加动态效应不予考虑。这种无分支的简单开链，运动副数目等于刚体构件数目，构件之间有递推的结构关系

$$\boldsymbol{T}_i=\boldsymbol{T}_{i-1}\boldsymbol{A}_i(q_i) \tag{2.1.59}$$

其中 $\boldsymbol{T}_i$ 为第 i 个刚体在参考基中的位姿矩阵，A_i 为两邻接刚体的相对位姿矩阵。利用

$$\dot{\boldsymbol{A}}_i=\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{A}_i\dot{q}_i \tag{2.1.60}$$

则有

$$\ddot{\boldsymbol{T}}_i=\ddot{\boldsymbol{T}}_{i-1}\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\ddot{q}_i+\boldsymbol{C}_i \tag{2.1.61}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_i=\boldsymbol{T}_{i-1}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{A}_i,\quad \boldsymbol{C}_i=2\dot{\boldsymbol{T}}_{i-1}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{A}_i\dot{q}_i+\boldsymbol{T}_{i-1}\boldsymbol{\theta}^2\boldsymbol{A}_i\dot{q}_i^2 \tag{2.1.62}$$

这里机座的位形和运动 $\boldsymbol{T}_0,\dot{\boldsymbol{T}}_0,\ddot{\boldsymbol{T}}_0$ 可认为是已知的，式(2.1.61)称为运动副约束条件。令 d_i 是第 i 个驱动器转子的转化转动惯量，Q_i 是该驱动器力矩（力）的转化值，则拘束可表为

$$Z_w=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{tr}\left\{\frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{T}}_i\boldsymbol{H}_i\ddot{\boldsymbol{T}}_i^T-\boldsymbol{\Phi}_i\ddot{\boldsymbol{T}}_i^T\right\}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}d_i\ddot{q}_i^2-\sum_{i=1}^{n}Q_i\ddot{q}_i \tag{2.1.63}$$

于是，Gauss 原理所建立的机器人机构动力学模型可表述如下：在所研究时刻，当已知机器人机构的位形、速度时，在满足运动副约束条件（2.1.61）的所有可能运动中，机构的真实加速度使拘束（2.1.63）取极小值。

上述有约束的极小值问题，在引入 Lagrange 乘子后可变为无约束的极小值问题。

利用 Gauss 原理解机器人动力学问题的主要优点有：(1)可以利用各种有效的数学规划方法寻求泛函的极值；(2)动力学分析可与系统优化结合进行；(3)对树形和非树形系统可用同一方

法研究。

2．用 Gauss 原理建立非线性振动方程的近似解

首先研究下述非线性方程

$$m\ddot{x}=F(t,x,\dot{x}) \tag{2.1.64}$$

其中 m 为质点的质量，x 为直线运动的坐标，F 为作用在质点上的力。假设质点在区间$[0,\tau]$中的运动有形式

$$x(t)=\sum_{k=1}^{m}a_k f_k(t) \tag{2.1.65}$$

其中 $f_k(t)$是线性独立的函数，a_k 为需确定的参数。式(2.1.65)中给出的函数 $x(t)$，一般说来，不满足微分方程(2.1.64)，因此将其代入得到

$$m\ddot{x}-F(t,x,\dot{x})=R \tag{2.1.66}$$

其中R是误差。这个误差从力学观点看需当作力来研究，此力加在质点上使其运动精确地满足方程(2.1.64)。形如式(2.1.65)的运动没有完全给定，因 a_k 没有给定。为确定这些参数只需对加速度变分，使得 R 在$[0,\tau]$中的均方值为极小，即

$$\delta\int_0^{\tau}\{m\ddot{x}-F(t,x,\dot{x})\}^2\mathrm{d}t=0$$

这里的 δ 是 Gauss 意义下的变分。换言之，由要求区间$[0,\tau]$上均方差取极小来求得系数 a_k。因 Gauss 原理中仅加速度变更，于是

$$\int_0^{\tau}\{m\ddot{x}-F(t,x,\dot{x})\}\delta\ddot{x}\mathrm{d}t=0$$

将式(2.1.65)代入上式，得到

$$\sum_{\nu=1}^{m}\delta a_\nu\int_0^{\tau}\left\{m\sum_{k=1}^{m}a_k\ddot{f}_k-F\left(t,\sum_{k=1}^{m}a_k f_k,\ \sum_{k=1}^{m}a_k\dot{f}_k\right)\right\}\ddot{f}_\nu\mathrm{d}t=0 \tag{2.1.67}$$

量 δa_ν 是线性独立的，由式(2.1.67)得到

$$\int_0^\tau \left\{ m\sum_{k=1}^{m} a_k \ddot{f}_k - F\left(t, \sum_{k=1}^{m} a_k f_k, \sum_{k=1}^{m} a_k \dot{f}_k\right)\right\} \dot{f}_\nu \mathrm{d}t = 0$$

$$(\nu = 1, \cdots, m) \qquad (2.1.68)$$

上述代数方程组有非零解的条件依赖于函数 $F(t,x,\dot{x})$ 的形式，也依赖于函数 $f_k(t)$的 形式。

公式（2.1.66）中引出的量R，前面当作力来研究。现在把它当作误差，在此误差下形式（2.1.65）给出的函数 $x(t)$满足方程(2.1.64)。用这种办法，相对参数 a_k 的方程组（2.1.68）成为在确定条件下来求方程（2.1.64）的形如式（2.1.65）的特殊近似解的方程组。

应用这个方法来确定方程（2.1.64）的近似周期解。为简单起见，周期解取为

$$x(t) = a_1\cos\omega t + a_2\sin\omega t \qquad (2.1.69)$$

此时，时间 τ 应取为周期 $2\pi/\omega$，方程组（2.1.68）写成形式

$$\int_0^{2\pi/\omega} \{-m\omega^2(a_1\cos\omega t + a_2\sin\omega t) - F(t, a_1\cos\omega t + a_2\sin\omega t, -a_1\omega\sin\omega t + a_2\omega\cos\omega t)\}\cos\omega t\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \{-m\omega^2(a_1\cos\omega t + a_2\sin\omega t) - F(t, a_1\cos\omega t + a_2\sin\omega t, -a_1\omega\sin\omega t + a_2\omega\cos\omega t)\}\sin\omega t\mathrm{d}t = 0$$

$$(2.1.70)$$

这些方程可用来求方程（2.1.64）的形如式(2.1.69)的近似解。这与由动力学方程出发通常采用的 Галёркин 方法一致。

其次，研究多自由度系统。上述方法容易推广到具有多自由度的完整力学系统。将 Gauss 原理的 Euler-Lagrange 形式（2.1.29）对 t 由 0 至 τ 积分，得

$$\int_0^\tau \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + Q_s\right)\delta\ddot{q}_s\mathrm{d}t = 0 \qquad (2.1.71)$$

函数 $q_s(t)$ 按下述形式给出

$$q_s(t)=\sum_{k=1}^{m}a_{sk}f_k(t),\qquad (s=1,\cdots,n) \tag{2.1.72}$$

如果参数 a_{sk} 满足方程

$$\int_0^\tau\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+Q_s\right)f_k\mathrm{d}t=0,$$

$$(s=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,m) \tag{2.1.73}$$

其中函数 $q_s(t)$ 按式（2.1.72）给出，那么 $q_s(t)$ 可当作 Lagrange 方程的近似解来研究[6]。

§2.2 完整系统在广义坐标下的积分变分原理

积分变分原理中最著名的是 Hamilton 原理和 Lagrange 原理。对完整保守系统来说，它们都是泛函的极值问题。本节讨论完整系统在广义坐标下的 Hamilton 原理和 Lagrange 原理。

2.2.1 Hamilton 原理

1. Hamilton原理

研究具有双面、理想、完整约束的力学系统，所受广义力是有势的。系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定。系统的动势，即 Lagrange 函数为 $L=T-V=L(q_s,\dot{q}_s,t)$，其中 T 为系统的动能，V 为系统的势能。

定义1 Lagrange 函数在时间 t_0 至 t_1 的积分

$$S=\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t \tag{2.2.1}$$

称为 Hamilton 意义下的作用量。

Hamilton 作用量是一个泛函，此泛函由选取 n 个时间的函数 $q_s(t)$ 的总合来确定。在系统的真实路径上，作用量 S 取完全

确定的值，此时出现于被积函数 L 的表达式中的 $q_s(t),\dot{q}_s(t)$ 就是真实运动中的广义坐标和广义速度。Hamilton 原理能够指出，系统真实运动与可能运动相比较时，真实运动所具有的性质。

在 Hamilton 原理中，所有可比较的运动有三个共同点：（1）约束是双面、理想、完整的，广义力是有势的。（2）所有可比较运动在同一时刻 t_0 开始，并在同一时刻 t_1 结束。因此，比较运动在同一时间间隔 t_1-t_0 内完成。在所有运动中，时间的变化规律一样，即时间 t 不变更。因此，变量的变分是等时的。（3）既然所有比较运动由同一点在同一时刻 t_0 开始，并在同一点在同一时刻 t_1 结束，亦即所有广义坐标在这些时刻彼此相等。因此，广义坐标的等时变分在这些边值上恒等于零，即

$$(\delta q_s)_{t=t_0}=0,\ (\delta q_s)_{t=t_1}=0, \qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (2.2.2)$$

为讨论方便起见，把完整系统的运动与一个以 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 为坐标的 n 维空间中的质点运动相对应。因此，两个相比较的运动用具有共同的起点和共同的终点的两条空间曲线来描述。因为在相比较的运动中系统在同样的时间内经过不同的路径，那么在相应时刻的广义速度是不同的，因此在相应时刻的动能的数值也不同。而依赖于坐标的势能的值也不相同。

在所列举的加在比较运动上的三个条件下，Hamilton 原理表述如下：

在相同的时间、相同的起始和终了位置和相同的约束条件下，双面、完整、广义力有势的系统，在所有可能的各种运动中真实运动是使 Hamilton 作用量具有稳定值，即

$$\delta S=\delta\int_{t_0}^{t_1}L(q_s,\dot{q}_s,t)\mathrm{d}t=0 \qquad (2.2.3)$$

Hamilton 原理（2.2.3）也是力学的基本原理，并且它把力学原理归结为更一般的形式。同时，它和坐标选择无关．因此更有普遍性并在多方面应用上更为方便。

2．利用 Hamilton 原理推导完整保守系统的 Lagrange 方

程

现在由Hamilton原理（2.2.3）来推导Lagrange方程。我们有

$$0=\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_s\right)\right\}dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s\right\}dt+\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}$$

这里用到分部积分法以及交换关系

$$\frac{d}{dt}(\delta q_s)=\delta\dot{q}_s,\qquad (s=1,\cdots,n)\tag{2.2.4}$$

考虑到端点条件(2.2.2)，则有

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s\right\}dt=0$$

这个等式对任何的积分区间都是对的。因此，被积函数为零，即

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s=0\tag{2.2.5}$$

因所研究的系统是完整的，式(2.2.5)中的δq_s就是彼此独立的，任意的，于是得到Lagrange方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0,\qquad (s=1,\cdots,n)\tag{2.2.6}$$

3. Hamilton原理的极值特性

Hamilton原理表示Hamilton作用量在真实路径上具有稳定值(极值)。那么，这个极值是极大还是极小呢？有如下命题。

命题 如果积分区间充分小，那么在定常约束下，Hamilton原理的泛函在真实路径上具有极小值[7]。

〔证明〕 我们写出Hamilton作用量的二次变分，注意到$\delta^2(*)=\frac{1}{2}\delta(\delta(*))$，有

$$\delta^2\int_{t_0}^{t_1} L\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2(T-V)}{\partial q_s\partial q_k}\delta q_s\delta q_k$$

$$+2\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_s\partial q_k}\delta\dot{q}_s\delta q_k+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}\delta\dot{q}_s\delta\dot{q}_k\Big\}\mathrm{d}t \tag{2.2.7}$$

因约束是定常的，动能为广义速度的齐二次式，于是有

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}\delta\dot{q}_s\delta\dot{q}_k=T(\delta\dot{q})$$

其中 $T(\delta\dot{q})$是动能T中以 $\delta\dot{q}_s$ 代替 $\dot{q}_s$ 时得到的表达式。考虑到 $\delta q_s(t_0)=0$，有

$$|\delta q_s(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_{t_0}^{t}\delta\dot{q}_s\mathrm{d}t\right|<\beta_s(t-t_0)$$

其中 β_s 为 $\delta\dot{q}_s$ 在 $t_0<t<t_1$ 中的最大模。因此，在充分小的时间间隔 t_1-t_0 内，式(2.2.7)的符号由 $T(\delta\dot{q})$来确定，即式(2.2.7)可写成

$$\delta^2\int_{t_0}^{t_1} L\,\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}T(\delta\dot{q})\mathrm{d}t+O(t_1-t_0)^2 \tag{2.2.8}$$

因 $T(\delta\dot{q})$是正定的，故得

$$\delta^2\int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t\approx\int_{t_0}^{t_1}T(\delta\dot{q})\mathrm{d}t>0 \tag{2.2.9}$$ ‖

下面举例说明 Hamilton 作用量对真实运动来说可以取极小。

例 1 研究单位质量的质点在有力函数 $U(x)$的势力场中的一维运动。

问题的运动微分方程为

$$\ddot{x}=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$$

设 $x(t)$ 为真实运动，并且有 $x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1$，$t_1-t_0>0$。设 $x'(t)$ 是满足同样条件的、与真实运动相比较的运动。因此，有

$$x'(t)=x(t)+\alpha(t)$$

其中 $\alpha(t)$ 为任意函数，但 $\alpha(t_0)=\alpha(t_1)=0$。用 S 和 S' 表记对真实运动和比较运动的 Hamilton 作用量，相应的动能为 T 和 T'，力函数为 U 和 U'。我们有

$$\begin{aligned}S'-S&=\int_{t_0}^{t_1}\{(T'+U')-(T+U)\}\mathrm{d}t\\&=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{1}{2}(\dot{x}+\dot{\alpha})^2-\frac{1}{2}\dot{x}^2+U(x+\alpha)-U(x)\right\}\mathrm{d}t\\&=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2+U(x+\alpha)-U(x)-\alpha\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}\right\}\mathrm{d}t\qquad(a)\end{aligned}$$

将力函数展开为 Taylor 级数

$$U(x+\alpha)=U(x)+\alpha\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{2}\alpha^2\frac{\mathrm{d}^2U(x+\theta\alpha)}{\mathrm{d}x^2},\quad 0<\theta<1$$

则式（a）成为

$$S'-S=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left\{\dot{\alpha}^2+\alpha^2\frac{\mathrm{d}^2U(x+\theta\alpha)}{\mathrm{d}x^2}\right\}\mathrm{d}t\qquad(b)$$

如果在整个力场中有 $\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}\geqslant 0$，那么式（$b$）的被积函数是正的，有 $S'-S>0$，因此 Hamilton 作用量对真实运动来说取极小。‖

上述结论，对点在均匀重力场中的直线运动 $\left(\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}=0\right)$ 以及具有距离的单调不减函数（例如，$U=a^2x^2$）的中心斥力场中的直线运动，都是正确的。

4. Hamilton 原理对近似解法的应用

Hamilton 原理特别适用于近似解法，在连续介质力学，结

构力学等领域中用得很广泛。下面举例说明近似解法的基本思想。

例 2 单位质量的质点在 xy 平面上运动，外力的势能由 $V=xy$ 给出。在 $t=0$ 时，它在原点(0,0)，在 $t=1$ 时，它在(2,0)。求质点的运动规律[8]。

我们先求精确解，以便与近似解作比较。问题的 Lagrange 函数是

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-xy$$

由 Lagrange 方程（2.2.6）给出的运动微分方程为

$$\ddot{x}+y=0,\quad \ddot{y}+x=0$$

它的通解是

$$x=c_1\sin t+c_2\cos t+c_3\operatorname{sh}t+c_4\operatorname{ch}t$$

$$y=c_1\sin t+c_2\cos t-c_3\operatorname{sh}t-c_4\operatorname{ch}t$$

满足问题端点条件的特解是

$$x=\frac{\sin t}{\sin 1}+\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}1},\quad y=\frac{\sin t}{\sin 1}-\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}1} \tag{a}$$

这是精确解。这个解使 Hamilton 作用量

$$S=\int_0^1\left\{\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-xy\right\}\mathrm{d}t \tag{b}$$

取极小值

$$S_{\min}=\operatorname{ctg}1+\operatorname{cth}1=1.955128 \tag{c}$$

下面用 Ritz 法来求近似解。在 x-t 图上和 y-t 图上联结两给定端点的直线方程为

$$x=2t,\quad y=0$$

现在再加上两端均为零的函数，这种在 $t=0$ 和 $t=1$ 都为零的最简单函数是 $t(1-t)$。因此，取

$$x=2t+\alpha t(1-t),\quad y=\beta t(1-t) \tag{d}$$

作为可能运动的集合。这里 α,β 是参数，它们是 $x(t)$ 和 $y(t)$ 偏离直线的一种度量。将式(d)代入式(b)，求得 Hamilton 作用量

$$S=S(\alpha,\beta)=\int_0^1\left\{\frac{1}{2}(2+\alpha-2\alpha t)^2+\frac{1}{2}\beta^2(1-2t)^2\right.$$
$$\left.-(2t+\alpha t-\alpha t^2)\beta t(1-t)\quad\right\}\mathrm{d}t$$

下面求使 $S(\alpha,\beta)$取极值的 α 和 β。令

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha}=0\ ,\quad\frac{\partial S}{\partial\beta}=0$$

得

$$\int_0^1\{(2+\alpha-2\alpha t)(1-2t)-(t-t^2)\beta t(1-t)\}\mathrm{d}t=0$$

$$\int_0^1\{\beta(1-2t)^2-(2t+\alpha t-\alpha t^2)t(1-t)\}\mathrm{d}t=0$$

积分后，得

$$\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{30}\beta=0,\qquad-\frac{1}{30}\alpha+\frac{1}{3}\beta=\frac{1}{6}$$

解得

$$\alpha=\frac{5}{99},\quad\beta=\frac{50}{99}$$

将其代回式(d)，求得近似解

$$x=2t+\frac{5}{99}t(1-t),\ \ y=\frac{50}{99}t(1-t)\qquad\qquad(e)$$

这组近似解（e）与精确解（a）在时间的大范围内性质极不一样，但在所关心的时间间隔（0,1）内，两者差别不大。相应于式（e）的 S 值为 12793/6534≐1.957912。 ‖

5. 一般完整系统的 Hamilton 原理

完整系统的 Hamilton 原理（2.2.3)要求广义力是有势的，即存在一个势能 V，使得

$$Q_s=-\frac{\partial V}{\partial q_s},\qquad(s=1,\cdots,n)\qquad\qquad(2.2.10)$$

一般完整系统的 Hamilton 原理有形式

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta T+\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta q_s\right)\mathrm{d}t=0 \qquad (2.2.11)$$

原理（2.2.11）本质上不同于广义力有势情形的 Hamilton 原理（2.2.3），因为一般说来不存在某个量使其变分等于式(2.2.11)的左端。当然，原理（2.2.11）比原理（2.2.3）更普遍。如果式（2.2.11）中的广义力满足条件(2.2.10)，则原理（2.2.11）成为原理（2.2.3）。进而，如果广义力具有广义势，即存在某函数 V 使得

$$Q_s=-\frac{\partial V}{\partial q_s}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_s},\qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (2.2.12)$$

则原理（2.2.11）也成为原理（2.2.3）。

虽然原理（2.2.11）一般不是稳定作用量原理，但仍可由它出发导出完整系统的运动微分方程。实际上，原理（2.2.11）可写成

$$\begin{aligned}0&=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\delta\dot{q}_s\right)+\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta q_s\right\}\mathrm{d}t\\&=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+Q_s\right)\delta q_s\right\}\mathrm{d}t+\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}\\&=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+Q_s\right)\delta q_s\right\}\mathrm{d}t\end{aligned} \qquad (2.2.13)$$

这里用到交换关系(2.2.4)，分部积分法以及端点条件(2.2.2)。因式（2.2.13）对任何积分区间都是对的，并且 δq_s 是彼此独立的，于是导出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s,\qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (2.2.14)$$

这就是一般完整系统的第二类 Lagrange 方程。

2.2.2 Lagrange 原理

1. 非等时变分

前面提到的变分 δ 是指时间不变的变分，即等时变分。但是，在比较真实运动与邻近运动的位形时不一定属于同一时刻。换言之，用广义坐标 $q_s(t)$ 给定系统在真实运动中的位置，我们可用函数 $q_s^*(t+\Delta t)$ 给定在邻近运动中无限接近的、为约束所允许的位置，并且差

$$q_s^*(t)-q_s(t)=\delta q_s \qquad (2.2.15)$$

就是前面引出的广义坐标的等时变分。当只考虑一阶小量时，我们有

$$q_s^*(t+\Delta t)=q_s^*(t)+\dot{q}_s^*(t)\Delta t=q_s(t)+\delta q_s+\dot{q}_s(t)\Delta t$$

因此

$$q_s^*(t+\Delta t)-q_s(t)=\Delta q_s=\delta q_s+\dot{q}_s(t)\Delta t \qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (2.2.16)$$

记号 Δ 表示非等时变分，它可应用于任何函数 f，有

$$\Delta f=\delta f+\dot{f}\Delta t \qquad (2.2.17)$$

特别地，有

$$\Delta\dot{q}_s=\delta\dot{q}_s+\ddot{q}_s\Delta t=(\delta q_s)^{\cdot}+\ddot{q}_s\Delta t \qquad (2.2.18)$$

在关系（2.2.16）中量 Δt 是时间的任意可微无限小函数。因为

$$(\Delta f)^{\cdot}=(\delta f)^{\cdot}+\ddot{f}\Delta t+\dot{f}(\Delta t)^{\cdot}$$

所以

$$(\Delta q_s)^{\cdot}=(\delta q_s)^{\cdot}+\ddot{q}_s\Delta t+\dot{q}_s(\Delta t)^{\cdot}=\Delta\dot{q}_s+\dot{q}_s(\Delta t)^{\cdot} \qquad (2.2.19)$$

于是可知运算 Δ 和 d 是不可交换的。对积分的非等时变分，有[9]

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1}F\,\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\{\Delta F+F(\Delta t)^{\cdot}\}\,\mathrm{d}t \qquad (2.2.20)$$

2. Lagrange 原理

定义 2 动能的两倍在时间 t_0 至 t_1 的积分

$$W=\int_{t_0}^{t_1} 2T\mathrm{d}t \tag{2.2.21}$$

称为Lagrange意义下的作用量。

我们来研究带有定常约束的完整力学系统，广义力有势，因此在运动过程中系统的总机械能保持为常数 h

$$T+V=h \tag{2.2.22}$$

这个关系在联结真实路径上两固定位置 $q_s^{(0)}$ 和 $q_s^{(1)}$ 的所有邻近路径上成立。既然条件（2.2.22）是对系统在邻近运动中加在点的速度上的某个限制，那么，把与真实路径上的位形 q_s 相应的邻近路径上的位形 q_s^* 认为属于同一时刻就不对了。具体地说，不可要求系统沿邻近路径由初始位置到终了位置的过渡同沿真实路径在同一时间间隔 t_1-t_0 内完成。于是，条件（2.2.22）必须应用非等时变分。考虑到式（2.2.17），有

$$\Delta(T+V)=\delta(T+V)+(T+V)^{\cdot}\Delta t=\delta(T+V)=\Delta h=\delta h=0 \tag{2.2.23}$$

完整系统的Lagrange原理表述如下：在系统的两个固定位置之间，Lagrange作用量在真实路径上与具有同一总机械能常数的邻近路径上相比较而有稳定值。Lagrange原理的数学表达为

$$\Delta W=\Delta\int_{t_0}^{t_1} 2T\mathrm{d}t=0 \tag{2.2.24}$$

Lagrange原理（2.2.24）的条件是：（1）系统所受约束是双面、理想、定常、完整的，广义力是有势的；（2）可比较的运动具有同样的能量常数 $h,\Delta h=0$；（3）在端点坐标的非等时变分等于零

$$(\Delta q_s)_{t=t_0}=0,\quad (\Delta q_s)_{t=t_1}=0 \tag{2.2.25}$$

3. Lagrange原理的其它形式[10]

Lagrange原理（2.2.24）可有多种表达形式，其中有的形式在数学上极其简明，在物理上极有概括性。

因动能

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{v}_i^2$$

故 Lagrange 作用量可写成

$$W=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{v}_i^2\right)\mathrm{d}t$$

注意到

$$\boldsymbol{v}_i=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}_i}{\mathrm{d}t},\qquad (i=1,\cdots,N)$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_i$ 为第 i 个质点在笛卡儿参考系中运动的路径弧元矢量。于是有

$$W=\sum_{i=1}^{N}\int_{s_i^0}^{s_i^1}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}_i \tag{2.2.26}$$

这就是 Lagrange 作用量的 Maupertuis 形式。它表明，Lagrange 作用量乃是系统各质点的动量沿其路径所作“功”之和。

现在设法消去 W 中的时间变元。根据假设，动能 T 为广义速度的齐二次式

$$T=T_2=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k \tag{2.2.27}$$

又

$$2T=2(h-V)$$

于是

$$\mathrm{d}t=\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\mathrm{d}q_s\mathrm{d}q_k\right)^{1/2}\Big/\sqrt{2(h-V)}$$

将其代入式 (2.2.21)，得到

$$W=\int_{A}^{B}\sqrt{2(h-V)}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\mathrm{d}q_s\mathrm{d}q_k\right)^{1/2} \tag{2.2.28}$$

这就是 Lagrange 作用量的 Jacobi 形式。利用 Lagrange 原理的 Jacobi 形式可直接来寻求系统的运动轨道而不涉及时间变元。

引进度量

$$(\mathrm{d}s)^2=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\mathrm{d}q_s\mathrm{d}q_k \tag{2.2.29}$$

则动能（2.2.27）写成

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

即系统的动能等于表现点在以 $\|A_{sk}\|$ 为 Riemann 度规的广义坐标位形空间内运动的动能。于是 Lagrange 作用量为

$$W=\int_A^B\sqrt{2\{h-V(q_s)\}}\,\mathrm{d}s \tag{2.2.30}$$

如改变 Riemann 度规的取法，令

$$(\mathrm{d}s)^2=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(h-V)A_{sk}\mathrm{d}q_s\mathrm{d}q_k \tag{2.2.31}$$

则 Lagrange 作用量可取形式

$$W=\int_A^B\mathrm{d}s \tag{2.2.32}$$

它代表表现点的弧长。Lagrange 原理此时表现为 Riemann 短程线。

4．由 Lagrange 原理导出 Lagrange 方程

利用公式（2.2.20），Lagrange 原理（2.2.24）可写成

$$\int_{t_0}\{\Delta(2T)+2T(\Delta t)^{\cdot}\}\mathrm{d}t=0 \tag{2.2.33}$$

利用式（2.2.23）及（2.2.19），我们有

$$\Delta(2T)=\Delta(2T-h)=\Delta L=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\Delta\dot q_s$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\{(\Delta q_s)^{\cdot}-\dot q_s(\Delta t)^{\cdot}\}$$

$$= \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\Delta q_s + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta q_s\right)$$

$$- \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s(\Delta t)^{\cdot}$$

考虑到式（2.2.27)，有

$$2T(\Delta t)^{\cdot} = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s(\Delta t)^{\cdot} = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s(\Delta t)^{\cdot}$$

于是式（2.2.33）可化成形式

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\Delta q_s \mathrm{d}t + \left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta q_s\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1} = 0 \tag{2.2.34}$$

考虑到端点条件（2.2.25)，则式（2.2.34）为

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\Delta q_s\right\}\mathrm{d}t = 0 \tag{2.2.35}$$

由积分区间的任意性以及 Δq_s 的独立性，得到Lagrange方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{2.2.36}$$

5. Lagrange 原理对非保守系统的推广及其应用

现在求作用量 W 的全变分。由式（2.2.17）和（2.2.20)，我们有

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1}\delta(2T)\mathrm{d}t + (2T\Delta t)\Big|_{t_0}^{t_1} \tag{2.2.37}$$

将完整系统的 Lagrange 方程（2.2.14）写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = -\frac{\partial V}{\partial q_s} + Q'_s, \quad (s=1,\cdots,n) \tag{2.2.38}$$

其中 Q'_s 为非势广义力。考虑到式（2.2.38)，我们有

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta T\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s\,\mathrm{d}t + \left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta V-\sum_{s=1}^{n}Q'_s\delta q_s\right)\mathrm{d}t+\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}, \tag{2.2.39}$$

将式（2.2.39）代入式（2.2.37），得[11]

$$\Delta W=\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta h-\sum_{s=1}^{n}Q'_s\delta q_s\right)\mathrm{d}t+\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s+2T\Delta t\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1} \tag{2.2.40}$$

或者写成

$$\Delta W=\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta h-\sum_{s=1}^{n}Q'_s\delta q_s\right)\mathrm{d}t+\left\{\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\Delta q_s+\left(2T-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\Delta t\right\}\Bigg|_{t_0}^{t_1} \tag{2.2.41}$$

其中

$$h=T+V$$

原理（2.2.40）或（2.2.41）可称为Lagrange原理对非保守系统的推广形式，其中对端点条件未加限制。

如果系统是保守的，即非势力 Q'_s 不存在，$\delta h=0$，$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=2T$，再加上端点条件 $(\Delta q_s)_{t=t_0}=(\Delta q_s)_{t=t_1}=0$，则原理（2.2.41）给出Lagrange原理（2.2.24）。

原理（2.2.40）或（2.2.41）可用于求振动问题的近似解。

例3 有非线性弹性项的Van der Pol方程的近似解[11]。

无量纲运动方程为

$$\ddot{q}+\varepsilon(q^2-1)\dot{q}+q+\varepsilon kq^3=0 \tag{a}$$

其中 ε 为小参数，k 是给定常数，因此

$$T=\frac{1}{2}\dot{q}^2,\quad V=\frac{1}{2}q^2+\frac{1}{4}\varepsilon kq^4,\quad Q'=\varepsilon(1-q^2)\dot{q} \tag{b}$$

假定解和频率为

$$q=2\sin\psi+\varepsilon(\alpha\cos 3\psi+k\beta\sin 3\psi),\quad \omega=1+\varepsilon k\gamma,\quad \psi\equiv\omega t,\tag{c}$$

其中 α,β,γ 为待定（一阶）校正常数。我们有

$$\dot q=\frac{\partial T}{\partial \dot q}=2\omega\cos\psi+\varepsilon(-3\alpha\omega\sin 3\psi+3k\beta\omega\cos 3\psi)$$

$$\delta q=(\varepsilon\cos 3\psi)\delta\alpha+(\varepsilon k\sin 3\psi)\delta\beta+(2\cos\psi-3\varepsilon\alpha\sin 3\psi+3\varepsilon k\beta\cos 3\psi)t\delta\omega$$

$$\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot q}\delta q\right\}\Bigg|_0^{\pi/\omega}=(2+3\varepsilon k\beta)^2\pi\delta\omega$$

令 $T|_{t_0=0}=T|_{t_1=\frac{\pi}{\omega}}\equiv\bar T$，则

$$\{2T\Delta t\}\Bigg|_0^{\pi/\omega}=-(2+3\varepsilon k\beta)^2\pi\delta\omega$$

于是式（2.2.40）成为

$$\Delta W-\int_0^{\pi/\omega}\delta h\mathrm{d}t+\int_0^{\pi/\omega}Q'\delta q\mathrm{d}t=0\tag{d}$$

计算得

$$W=\frac{\pi}{2}\omega(4+9\varepsilon^2\alpha^2+9\varepsilon^2k^2\beta^2)$$

$$\Delta W=\pi\left\{(9\varepsilon^2\omega\alpha)\delta\alpha+(9\varepsilon^2k^2\beta\omega)\delta\beta+\left(2+\frac{9}{2}\varepsilon^2\alpha^2+\frac{9}{2}\varepsilon^2k^2\beta^2\right)\delta\omega\right\}$$

当忽略 $\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta$ 等二阶小量时，有

$$\int_0^{\pi/\omega}\delta T\,\mathrm{d}t=\left(\frac{9}{2}\pi\varepsilon^2\alpha\omega\right)\delta\alpha+\left(\frac{9}{2}\pi\varepsilon^2k^2\beta\omega\right)\delta\beta+(3\pi+6\pi\varepsilon k\beta)\delta\omega$$

$$\int_0^{\pi/\omega}\delta V\mathrm{d}t=\pi\left(\frac{1}{2}\varepsilon^2+3\varepsilon^3k\right)\alpha\omega^{-1}\delta\alpha$$

$$+\pi\left(\frac{1}{2}\beta-1+3\,\varepsilon k\beta\right)\varepsilon^2k^2\omega^{-1}\delta\beta$$

$$+\pi\left(-1-\frac{3}{2}\varepsilon k+\varepsilon^2k^2\beta\right)\omega^{-2}\delta\omega$$

$$\int_0^{\pi/\omega}Q'\delta q\mathrm{d}t=\pi\left(1-\frac{3}{2}\varepsilon k\beta\right)\varepsilon^2\delta\alpha+\pi\left(\frac{3}{2}\varepsilon^3k\alpha\right)\delta\beta$$

$$+\pi\left(\frac{5}{6}\alpha+2\,\pi k\beta\right)\omega^{-1}\varepsilon^2\delta\omega$$

将这些表达式代入式（d），得

$$\pi\left\{9\,\varepsilon^2\omega\alpha-\frac{9}{2}\varepsilon^2\omega\alpha-\left(\frac{1}{2}\varepsilon^2+3\,\varepsilon^3k\right)\omega^{-1}\alpha+\varepsilon^2\left(1-\frac{3}{2}k\varepsilon\beta\right)\right\}\delta\alpha$$

$$+\pi\left\{9\varepsilon^2k^2\beta\omega-\frac{9}{2}\varepsilon^2k^2\beta\omega-\varepsilon^2k^2\omega^{-1}\left(\frac{1}{2}\beta-1+3\,\varepsilon k\beta\right)\right.$$

$$\left.+\varepsilon^2k\left(\frac{3}{2}\varepsilon\alpha\right)\right\}\delta\beta+\pi\left\{2+\frac{9}{2}\varepsilon^2\alpha^2+\frac{9}{2}\varepsilon^2k^2\beta^2-(3+6\,\varepsilon k\beta)\right.$$

$$\left.-\omega^{-2}\left(-1-\frac{3}{2}\varepsilon k+\varepsilon^2k^2\beta\right)+\varepsilon\omega^{-1}\left(\frac{5}{6}\varepsilon\alpha+2\,\pi\varepsilon k\beta\right)\right\}\delta\gamma=0$$

因此，$\delta\alpha,\delta\beta,\delta\gamma$ 前系数为零。由 $\delta\alpha$ 前系数为零，去掉高阶小量，得

$$\frac{9}{2}\omega\alpha-\left(\frac{1}{2}+3\,\varepsilon k\right)\alpha\omega^{-1}+1-\frac{3}{2}\varepsilon k\beta=0$$

将 $\omega=1+\varepsilon k\gamma$ 代入，忽略高阶小量，得

$$\alpha=-\frac{1}{4}\tag{e}$$

类似地，由 $\delta\beta$ 前系数为零，得到

$$\beta=-\frac{1}{4}\tag{f}$$

由 $\delta\gamma$ 前系数为零，得到

$$\gamma=\frac{3}{2} \tag{g}$$

最后，将式(e)、(f)和(g)代入(c)，得到近似解为

$$q=2\sin\psi-\frac{\varepsilon}{4}(\cos 3\psi+k\sin 3\psi),\ \omega=1+\frac{3}{2}\varepsilon k,\ \psi\equiv\omega t$$ ‖

§2.3 完整系统在准坐标下的积分变分原理

本节讨论完整系统在准坐标下的Hamilton原理和Lagrange原理。

2.3.1 完整系统在准坐标下的Hamilton原理

1. Hamilton原理

我们引入n个相对广义速度$\dot{q}_s(s=1,\cdots,n)$为独立的关系

$$\omega_k=\omega_k(q_s,\dot{q}_s,t),\qquad (s,k=1,\cdots,n) \tag{2.3.1}$$

作为准速度。因式(2.3.1)各式彼此独立，故矩阵$\left\|\frac{\partial\omega_k}{\partial\dot{q}_s}\right\|$的行列式异于零。设由式(2.3.1)可反解出广义速度

$$\dot{q}_s=\dot{q}_s\ (q_k,\omega_k,t),\qquad (s,k=1,\cdots,n) \tag{2.3.2}$$

由此，广义坐标的独立变分可用n个任意准坐标的变分$\delta\pi_k$表出

$$\delta q_s=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\omega_k}\delta\pi_k,\qquad (s=1,\cdots,n) \tag{2.3.3}$$

反过来，则有

$$\delta\pi_k=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_k}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s,\qquad (k=1,\cdots,n) \tag{2.3.4}$$

令L^*为Lagrange函数L中借助关系(2.3.2)消去$\dot{q}_s$而用准速度ω_k表示的表达式，即

$$L^*(q_k,\omega_k,t)=L(q_s,\dot{q}_s(q_k,\omega_k,t),t) \tag{2.3.5}$$

因此

$$\delta L^* = \delta L \tag{2.3.6}$$

于是，Hamilton 原理（2.2.3）可表为形式

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L^* \mathrm{d}t = 0 \tag{2.3.7}$$

由式（2.2.2）和（2.3.4），得到准坐标下的端点条件

$$(\delta\pi_s)_{t=t_0} = 0, \quad (\delta\pi_s)_{t=t_1} = 0 \tag{2.3.8}$$

下面由准坐标下的 Hamilton 原理（2.3.7）出发来推导完整系统准坐标下的运动微分方程，为此先研究微分运算与变分运算的交换性问题。

2．交换关系

首先，研究准坐标下的交换关系用广义坐标下的交换关系及准坐标的变分来表示的问题。将式（2.3.4）对时间求导数，再对式（2.3.1）取变分，将所得结果相减并注意到式（2.3.3），得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\pi_s) - \delta\omega_s = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\omega_s}{\partial\dot{q}_k}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_k) - \delta\dot{q}_k\right\}$$
$$+ \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\omega_s}{\partial\dot{q}_r} - \frac{\partial\omega_s}{\partial q_r}\right)\frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_k}\delta\pi_k \tag{2.3.9}$$

这就是式（1.6.16）。

其次，研究广义坐标下的交换关系用准坐标下的交换关系及准坐标的变分来表示的问题。将式（2.3.3）对时间求导数，再对式（2.3.2）取变分，将所得结果相减，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s) - \delta\dot{q}_s = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\omega_k}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\pi_k) - \delta\omega_k\right\}$$
$$+ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\omega_k} - \frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\pi_k}\right)\delta\pi_k \tag{2.3.10}$$

这就是式（1.6.28）。

如果准速度选为广义速度的线性齐次式，即

$$\omega_k = \sum_{s=1}^{n} a_{ks}\dot{q}_s \tag{2.3.11}$$

且 a_{ks} 仅依赖于坐标，广义速度反解出为

$$\dot{q}_s = \sum_{k=1}^{n} b_{sk}\omega_k \tag{2.3.12}$$

那么式（2.3.9）与（2.3.10）分别为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\pi_s) - \delta\omega_s = \sum_{k=1}^{n} a_{sk}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_k) - \delta\dot{q}_k\right\} + \sum_{t=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \gamma^s_{tm}\omega_t\delta\pi_m \tag{2.3.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s) - \delta\dot{q}_s = \sum_{k=1}^{n} b_{sk}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\pi_k) - \delta\omega_k\right\} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial b_{sk}}{\partial\pi_m} - \frac{\partial b_{sm}}{\partial\pi_k}\right)\omega_m\delta\pi_k \tag{2.3.14}$$

其中

$$\gamma^s_{tm} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{sk}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{sr}}{\partial q_k}\right)b_{rt}b_{km} \tag{2.3.15}$$

称为Boltzmann三标记号。

考虑到交换关系（2.2.4）时，关系（2.3.9）、（2.3.10）、（2.3.13）及（2.3.14）分别为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\pi_s) - \delta\omega_s = \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\omega_s}{\partial\dot{q}_r} - \frac{\partial\omega_s}{\partial q_r}\right)\frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_k}\delta\pi_k \tag{2.3.16}$$

$$O = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\omega_k}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\pi_k) - \delta\omega_k\right\} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\omega_k} - \frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\pi_k}\right)\delta\pi_k \tag{2.3.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\pi_s) - \delta\omega_s = \sum_{t=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\gamma^s_{tm}\omega_t\delta\pi_m \tag{2.3.18}$$

$$O = \sum_{k=1}^{n} b_{sk}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\pi_k) - \delta\omega_k\right\} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial b_{sk}}{\partial\pi_m} - \frac{\partial b_{sm}}{\partial\pi_k}\right)\omega_m\delta\pi_k \tag{2.3.19}$$

3. 由准坐标下的 Hamilton 原理推导完整系统准坐标下的运动微分方程

我们有

$$
\begin{aligned}
\delta L^* &= \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \pi_s}\delta\pi_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_s}\delta\omega_s \\
&= \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \pi_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_s}\right)\delta\pi_s+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_s}\delta\pi_s\right) \\
&\quad+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_s}\left\{\delta\omega_s-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\pi_s)\right\}
\end{aligned}
\tag{2.3.20}
$$

将式（2.3.16）代入式（2.3.20），得到

$$
\begin{aligned}
\delta L^* &= \sum_{s=1}^{n}\left\{\frac{\partial L^*}{\partial \pi_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_s}-\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot q_r}\right.\right. \\
&\quad\left.\left.-\frac{\partial \omega_k}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot q_r}{\partial \omega_s}\right\}\delta\pi_s+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_s}\delta\pi_s\right)
\end{aligned}
\tag{2.3.21}
$$

将式（2.3.21）代入 Hamilton 原理（2.3.7），并利用端点条件（2.3.8），得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial L^*}{\partial \pi_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_s}-\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot q_r}\right.\right.\right. \\
&\quad\left.\left.\left.-\frac{\partial \omega_k}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot q_r}{\partial \omega_s}\right]\delta\pi_s\right\}\mathrm{d}t=0
\end{aligned}
\tag{2.3.22}
$$

考虑式（2.3.22）的积分区间是任取的，且 $\delta\pi_s$ 是彼此独立的，便得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_s}-\frac{\partial L^*}{\partial \pi_s}+\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot q_r}-\frac{\partial \omega_k}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot q_r}{\partial \omega_s}=0
$$

$$
(s=1,\cdots,n) \tag{2.3.23}
$$

方程（2.3.23）是完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程。特别地，在式（2.3.11）和（2.3.12）下，方程（2.3.23）成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_s}-\frac{\partial L^*}{\partial \pi_s}+\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_k}\gamma_{rs}^{k}\omega_r=0, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{2.3.24}$$

考虑到

$$\frac{\partial L^*}{\partial \omega_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s} \tag{2.3.25}$$

则式（2.3.20）可表为

$$\delta L^*=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \pi_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_s}\right)\delta\pi_s+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_s}\delta\pi_s\right)$$
$$+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s}\left\{\delta\omega_s-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\pi_s)\right\} \tag{2.3.26}$$

将式（2.3.17）代入式（2.3.26），得

$$\delta L^*=\sum_{s=1}^{n}\left\{\frac{\partial L^*}{\partial \pi_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_s}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s}-\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \pi_s}\right)\right\}\delta\pi_s$$
$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_s}\delta\pi_s\right) \tag{2.3.27}$$

将式（2.3.27）代入 Hamilton 原理（2.3.7），并利用端点条件（2.3.8），得到

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial L^*}{\partial \pi_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_s}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s}-\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \pi_s}\right)\right]\delta\pi_s\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{2.3.28}$$

考虑到式（2.3.28）的积分区间是任取的，且 $\delta\pi_s$ 是彼此独立的，便得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_s}-\frac{\partial L^*}{\partial \pi_s}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s}-\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \pi_s}\right)=0$$
$$(s=1,\cdots,n) \tag{2.3.29}$$

方程（2.3.29）可称为完整系统准坐标下的 Чаплыгин 方程。特别地，在式（2.3.12）下，方程（2.3.29）成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial\omega_s}-\frac{\partial L^*}{\partial\pi_s}-\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\left(\frac{\partial b_{ks}}{\partial\pi_r}-\frac{\partial b_{kr}}{\partial\pi_s}\right)\omega_r=0$$

$$(s=1,\cdots,n) \qquad (2.3.30)$$

4. 一般完整系统的 Hamilton 原理

如果广义力不是有势的，则准坐标下的 Hamilton 原理可以写成形式

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta T^*+\sum_{s=1}^{n}P_s^*\delta\pi_s\right)\mathrm{d}t=0 \qquad (2.3.31)$$

其中

$$P_s^*=\sum_{k=1}^{n}Q_k\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\omega_s} \qquad (2.3.32)$$

为准坐标下的广义力。

原理（2.3.31）比原理（2.3.7）更一般，因为当广义力有势时，由式（2.3.31）可导出式（2.3.7）。

2.3.2 完整系统在准坐标下的 Lagrange 原理

1. Lagrange 原理

考虑理想、双面、完整、有势系统。令 T^* 为用准速度表达的动能，即

$$T^*(q_k,\omega_k,t)=T(q_s,\dot{q}_s(q_k,\omega_k,t),t) \qquad (2.3.33)$$

则有

$$\Delta T^*=\Delta T \qquad (2.3.34)$$

将式（2.3.34）代入 Lagrange 原理（2.2.24），得到

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1}2T^*\mathrm{d}t=0 \qquad (2.3.35)$$

这就是完整系统在准坐标下的 Lagrange 原理。

下面研究原理（2.3.35）的端点条件。由式（2.2.17），我们有

$$\Delta\pi_s = \delta\pi_s + \omega_s \Delta t, \quad \Delta q_s = \delta q_s + \dot{q}_s \Delta t$$

由此并利用式（2.3.4），有

$$\begin{aligned}\Delta\pi_s &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k + \omega_s \Delta t \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_k} (\Delta q_k - \dot{q}_k \Delta t) + \omega_s \Delta t \end{aligned} \tag{2.3.36}$$

因此，端点条件（2.2.25）成为

$$\begin{aligned}(\Delta\pi_s)_{t=t_0} &= \left\{ \left(\omega_s - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) \Delta t \right\}_{t=t_0} \\ (\Delta\pi_s)_{t=t_1} &= \left\{ \left(\omega_s - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) \Delta t \right\}_{t=t_1} \end{aligned} \tag{2.3.37}$$

特别地，当准速度按广义速度的线性齐次式选取时，式(2.3.37)成为

$$(\Delta\pi_s)_{t=t_0} = 0, \quad (\Delta\pi_s)_{t=t_1} = 0 \tag{2.3.38}$$

2. 由 Lagrange 原理推导运动微分方程

由原理（2.3.35）同样可以推导出完整系统准坐标下的运动微分方程（2.3.23）和（2.3.29）。

§2.4 非完整系统的积分变分原理

对于双面、理想、完整、有势系统，Hamilton 作用量和 Lagrange 作用量沿系统的真实运动具有稳定值性质。但是，对于非完整来说，一般没有这个结论，仅在极特殊情况下作用量才有稳定值性质。本节讨论变分 $\delta\dot{q}_s$ 的定义，非完整系统在广义坐标下的 Hamilton 原理和 Lagrange 原理，以及非完整系统在准坐标下的 Hamilton 原理和 Lagrange 原理等问题。

2.4.1 变分 $\delta\dot{q}_s$ 的定义

1. 非完整系统需对广义速度的变分下定义

设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定，并受有 g 个理想非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0, \qquad (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n) \qquad (2.4.1)$$

根据 Appell-Четаев 定义，约束（2.4.1）加在虚位移 δq_s 上的条件为式（1.4.9），即

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0 \qquad (\beta=1,\cdots,g) \qquad (2.4.2)$$

对完整系统来说，因约束方程中不出现广义速度，故

$$\delta f_\beta=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\delta q_s$$

坐标的变分满足条件

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\delta q_s=0$$

它与关系 $\delta f_\beta=0$ 是一回事。但对非完整系统来说，有

$$\delta f_\beta=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_s\right), \qquad (\beta=1,\cdots,g) \quad (2.4.3)$$

比较式（2.4.3）与(2.4.2)就会发现，关系 $\delta f_\beta=0$ 与式(2.4.2)并不是一回事。不同于完整系统，在非完整系统中仅在变分 $\delta\dot{q}_s$ 的确定定义下，关系 $\delta f_\beta=0$ 才能满足[12]。变分 $\delta\dot{q}_s$ 的定义有两种：Суслов 定义与 Hölder 定义。

2. Суслов 定义

设由式（2.4.1）可解出后面 g 个广义速度

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t) \qquad \begin{pmatrix} s=1,\cdots,n;\ \sigma=1,\cdots,\varepsilon; \\ \varepsilon=n-g;\ \beta=1,\cdots,g \end{pmatrix} \quad (2.4.4)$$

定义 1 对独立的变分取交换关系

$$\delta\dot{q}_\sigma=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_\sigma), \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \qquad (2.4.5)$$

以及条件

$$\delta f_\beta = 0, \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \qquad (2.4.6)$$

由式（2.4.5）和（2.4.6）来确定 $\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$。这种定义称为Суслов定义。

下面来求 $\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$。条件（2.4.6）成为

$$\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma + \sum_{\gamma=1}^{g} \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}\delta q_{\varepsilon+\gamma} + \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma \qquad (2.4.7)$$

对式（2.4.4）利用Appell–Четаев定义，有

$$\delta q_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma \qquad (2.4.8)$$

于是

$$\frac{d}{dt}(\delta q_{\varepsilon+\beta}) = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\frac{d}{dt}(\delta q_\sigma) \qquad (2.4.9)$$

由式（2.4.7）和（2.4.9），得

$$\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \frac{d}{dt}(\delta q_{\varepsilon+\beta}) + \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\left\{\delta\dot{q}_\sigma - \frac{d}{dt}(\delta q_\sigma)\right\} - \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} T_\sigma^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma \qquad (2.4.10)$$

其中

$$T_\sigma^{\varepsilon+\beta} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma} - \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma} - \sum_{\gamma=1}^{g} \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial\dot{q}_\sigma} \qquad (2.4.11)$$

注意到式（2.4.5），则

$$\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \frac{d}{dt}(\delta q_{\varepsilon+\beta}) - \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} T_\sigma^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma \qquad (2.4.12)$$

因此，在Суслов定义下，变更轨道满足约束方程，但d,δ运算的可交换性仅对与独立的广义速度相应的坐标才是对的。

3. Hölder 定义

定义2 对所有变分采用交换关系

$$\delta\dot{q}_s = \frac{d}{dt}\delta q_s, \qquad (s = 1, \cdots, n) \qquad (2.4.13)$$

由此来确定 δf_β。这种定义称为 Hölder 定义。

现在按 Hölder 定义来计算 δf_β。我们有

$$\begin{aligned}\delta f_\beta &= \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\delta q_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_s \\ &= \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\delta q_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s) \\ &= \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right)\end{aligned}$$

注意到条件（2.4.2），则有

$$\delta f_\beta = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s \tag{2.4.14}$$

对于非完整系统来说，一般没有 $\delta f_\beta = 0$。

因此，在 Hölder 定义下，d, δ 运算的可交换性对所有坐标都对，但一般说来，变更轨道不满足约束方程。

2.4.2 非完整系统广义坐标下的积分变分原理

这里讨论非完整系统广义坐标下的 Hamilton 原理的各种形式，它成为稳定作用量原理的充要条件，利用它来推导非完整系统的运动方程，以及非完整系统广义坐标下的 Lagrange 原理等问题。

1. 非完整系统广义坐标下的 Hamilton 原理

现在我们将 D'Alembert-Lagrange 原理在 t_0 至 t_1 内对时间积分，来考察非完整系统的 Hamilton 原理应该有怎样的形式。如果广义力是有势的，则 D'Alembert-Lagrange 原理（2.1.8）可写成形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s = 0 \tag{2.4.15}$$

它可变形为

$$\delta L-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s)-\delta \dot{q}_s\right\}=0$$

(2.4.16)

将式(2.4.16) 对 t 由 t_0 至 t_1 积分，并注意到端点条件(2.2.2)，得到

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta L+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s)-\delta \dot{q}_s\right]\right\}\mathrm{d}t=0 \quad (2.4.17)$$

由式（2.4.17）出发，根据对 $\delta\dot{q}_s$ 的两种不同定义，可以得到非完整系统两种不同形式的 Hamilton 原理。

将 Суслов 定义的式（2.4.5）和(2.4.12)代入式(2.4.17)，我们得到

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\delta L)_C+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma\right\}\mathrm{d}t=0, \quad (2.4.18)$$

其中 $(\delta L)_C$ 表示 Суслов 意义下的 δL。由式（2.4.5）和（2.4.12)，我们有

$$\begin{aligned}(\delta L)_C&=\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta \dot{q}_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\delta \dot{q}_{\varepsilon+\beta}\right)_C\\&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_\sigma)\\&\quad+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_{\varepsilon+\beta})-\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma\right\}\end{aligned} \quad (2.4.19)$$

原理（2.4.18）称为非完整系统在 Суслов 定义下的广义坐标形式的 Hamilton 原理。这个原理与完整系统的 Hamilton 原理（2.2.3）的差异是明显的，被积函数多出了一项

$$\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma$$

将 Hölder 定义的式（2.4.13）代入式（2.4.17），我们得到

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta L)_H \mathrm{d}t=0 \tag{2.4.20}$$

其中 $(\delta L)_H$ 表示 Hölder 意义下的 δL，我们有

$$(\delta L)_H=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_\sigma)+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_{\varepsilon+\beta}) \tag{2.4.21}$$

原理（2.4.20）称为非完整系统在 Hölder 定义下的广义坐标形式的 Hamilton 原理。这个原理与完整系统的 Hamilton 原理（2.2.3）有类似形式。但是，原理（2.4.20）中的 δ 不能写在积分号之前，而且其中的 δq_s 也不是独立的。

如果广义力不是有势的，则非完整系统的 Hamilton 原理的 Суслов 形式为

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\delta T)_C+\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{2.4.22}$$

而 Hölder 形式为

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\delta T)_H+\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta q_s\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{2.4.23}$$

关于 Hamilton 原理的两种形式（2.4.18）与（2.4.20）之间的关系，有下述命题。

命题 1 我们有

$$(\delta L)_C+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma=(\delta L)_H \tag{2.4.24}$$

〔证明〕 比较关系（2.4.19）与（2.4.21），便得结论。‖

由这个命题可知，非完整系统 Hamilton 原理的两种形式（2.4.18）和（2.4.20）是等价的。类似地，式（2.4.22）和

(2.4.23) 也是等价的。

现在将原理 (2.4.18) 写成另外的形式。为此，利用下述命题。

命题 2 我们有

$$(\delta L)_C=(\delta\tilde{L})_C, \tag{2.4.25}$$

其中

$$\tilde{L}(q_s,\dot{q}_\sigma,t)=L(q_s,\dot{q}_\sigma,\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\cdot,t),t) \tag{2.4.26}$$

〔证明〕 因

$$\delta\tilde{L}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\delta\varphi_\beta$$

而

$$\delta L=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$$

故

$$\delta\tilde{L}=\delta L-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}(\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}-\delta\varphi_\beta) \tag{2.4.27}$$

在 Суслов 意义下，有

$$\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\delta\varphi_\beta \tag{2.4.28}$$

于是

$$(\delta\tilde{L})_C=(\delta L)_C$$

‖

根据命题 2，Суслов 形式 (2.4.18) 还可写成

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\delta\tilde{L})_C+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_\sigma^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma\right\}dt=0 \tag{2.4.29}$$

2. 非完整系统 Hamilton 原理为稳定作用量原理的充要条件

一般说来，非完整系统 Hamilton 原理的两种形式 (2.4.18)

和（2.4.20）都不是稳定作用量原理，即不能成为某泛函的极值。现在研究这两种形式成为稳定作用量原理的充要条件。

首先，研究 Hölder 形式(2.4.20)。把它与作用积分$\int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t$在条件（2.4.1）下取稳定值的 Lagrange 问题作一比较。引入不定乘子 $K_\beta(t)$，这个问题变成下述变分问题

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(L+\sum_{\beta=1}^{g}K_\beta f_\beta\right)\mathrm{d}t=0 \qquad (2.4.30)$$

而变分问题的 Euler 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=\sum_{\beta=1}^{g}K_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{K}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s},$$
$$(s=1,\cdots,n) \qquad (2.4.31)$$

由式（2.4.20），引入不定乘子 λ_β，可导出非完整系统带乘子的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}, \qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (2.4.32)$$

非完整系统的运动方程（2.4.32）和（2.4.1）不等价于变分问题（2.4.30）的方程（2.4.31）和（2.4.1），但这并不意味着两个方程组没有共同解。现在导出两个方程组有共同解的充要条件。如果方程组（2.4.32）、(2.4.1)和方程组(2.4.31)、(2.4.1)有共同解，则有

$$\sum_{\beta=1}^{g}(\lambda_\beta+\dot{K}_\beta)\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}=\sum_{\beta=1}^{g}K_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right),$$
$$(s=1,\cdots,n) \qquad (2.4.33)$$

将这些方程两边乘以虚位移 δq_s，并对 s 求和，考虑到式(2.4.2)，便得到[13]

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{g}K_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s=0 \qquad (2.4.34)$$

这是两个方程组有共同解的必要条件。同时，这个条件也是充分的。实际上，方程组（2.4.31）、（2.4.1）的解 $q_s(t)$ 满足条件（2.4.34），那么将式（2.4.31）两端同时乘以 δq_s，并对 s 求和，将式（2.4.2）乘以 λ_β 并对 β 求和，然后相加，再考虑到式（2.4.34）和（2.4.2），我们得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s=0$$

这说明解 $q_s(t)$ 也满足方程组（2.4.32）、（2.4.1）。

命题3 非完整系统Hamilton原理的Hölder形式（2.4.20）为稳定作用量原理的充要条件是式（2.4.34）。

这样，在条件（2.4.34）下，非完整系统的运动方程（2.4.32）取Euler方程（2.4.31）的形式。因此，对于满足条件（2.4.34）的非完整系统的所有运动，Hamilton原理的Hölder形式（2.4.20）成为稳定作用量原理。

其次，研究Сyслов形式（2.4.18）。使原理（2.4.18）成为稳定作用量原理的充要条件是

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_\sigma^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma\right)\mathrm{d}t=0 \qquad (2.4.35)$$

而由 δq_σ 的任意性，可归结为

$$\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}T_\sigma^{\varepsilon+\beta}=0, \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \qquad (2.4.36)$$

于是有下述命题。

命题4 非完整系统Hamilton原理的Сyслов形式（2.4.18）为稳定作用量原理的充要条件是式（2.4.36）。

使Hamilton原理成为稳定作用量原理的充要条件（2.4.34）或（2.4.36），仅对极个别的非完整系统才成立。

例 对Appell-Hamel例，Hamilton原理是稳定作用量原理。

令 $q_1=x, q_2=y, q_3=z$，我们有

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)-mgq_3$$

约束方程为

$$\dot{q}_3=\frac{b}{a}\sqrt{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2}$$

于是

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}T_1^3=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_3}{\partial \dot{q}_1}-\frac{\partial \dot{q}_3}{\partial q_1}-\frac{\partial \dot{q}_3}{\partial q_3}\frac{\partial \dot{q}_3}{\partial \dot{q}_1}\right)$$

$$=m\dot{q}_3\frac{b}{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{q}_1}{\sqrt{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2}}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}T_2^3=m\dot{q}_3\frac{b}{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{q}_2}{\sqrt{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2}}\right)$$

对 Appell-Hamel 例，方程（2.4.32）给出

$$m\ddot{q}_1=-\lambda\frac{b}{a}\frac{\dot{q}_1}{\sqrt{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2}},\quad m\ddot{q}_2=-\lambda\frac{b}{a}\frac{\dot{q}_2}{\sqrt{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2}},\quad m\ddot{q}_3=-mg+\lambda$$

由此得到

$$\ddot{q}_1\dot{q}_2-\dot{q}_1\ddot{q}_2=0$$

因此有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}T_1^3=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}T_2^3=0$$

于是条件（2.4.36）成立。Hamilton 原理对 Appell-Hamel 例是稳定作用量原理。 ‖

3．利用 Hamilton 原理导出非完整系统的运动方程

非完整系统的 Hamilton 原理（2.4.18）、（2.4.29）和（2.4.20）尽管一般说来不是稳定作用量原理，但是，可以根据它们来推导非完整系统的运动微分方程。

首先，利用原理（2.4.29）。考虑到 Appell-Четаев 定义（2.4.8），我们有

$$(\delta\tilde{L})_C=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma$$
$$+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_\sigma)=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}$$
$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_\sigma}\Big)\delta q_\sigma+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma\Big)$$

将上式代入式（2.4.29），考虑到端点条件，便得

$$\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_\sigma}$$
$$+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}T_\sigma^{\varepsilon+\beta}\Big)\delta q_\sigma\Big\}\mathrm{d}t=0$$

由此，考虑到积分区间的任意性以及 δq_σ 的独立性，便得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}T_\sigma^{\varepsilon+\beta}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}=0,$$
$$(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\qquad(2.4.37)$$

方程（2.4.37）是非完整系统广义坐标下的广义 Чаплыгин 方程[12]。

其次，利用原理（2.4.20）。原理（2.4.20）可写成形式

$$\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\sum_{s=1}^{n}\Big(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\Big)\delta q_s\Big\}\mathrm{d}t+\Big(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s\Big)\Big|_{t_0}^{t_1}=0$$

考虑到原理的端点条件，上式第二项为零。利用式（2.4.2），引入不定乘子 λ_β，由此得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\qquad(s=1,\cdots,n)\qquad(2.4.38)$$

这是非完整系统带乘子的 Lagrange 方程。

4．非完整系统广义坐标下 Hamilton 原理的一般形式

如果广义力不是有势的，则非完整系统 Hamilton 原理

Суслов 意义下的一般形式为

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\delta T)_C+\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\epsilon+\beta}}\sum_{\sigma=1}^{\epsilon}T_\sigma^{\epsilon+\beta}\delta q_\sigma\right\}\mathrm{d}t=0$$

或者写成

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\delta\tilde{T})_C+\sum_{\sigma=1}^{\epsilon}\tilde{Q}_\sigma\delta q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\epsilon+\beta}}\sum_{\sigma=1}^{\epsilon}T_\sigma^{\epsilon+\beta}\delta q_\sigma\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{2.4.39}$$

其中

$$\tilde{Q}_\sigma=Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\epsilon+\beta}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma} \tag{2.4.40}$$

而 Hölder 意义下的一般形式为

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\delta T)_H+\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta q_s\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{2.4.41}$$

由原理（2.4.39）容易导出非完整系统一般形式的广义坐标下的广义 Чаплыгин 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\epsilon+\beta}}T_\sigma^{\epsilon+\beta}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma$$

$$(\sigma=1,\cdots,\epsilon) \tag{2.4.42}$$

由原理（2.4.41）容易导出非完整系统一般形式的带乘子的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s},\qquad(s=1,\cdots,n) \tag{2.4.43}$$

若将广义力 Q_s 分成两部分，一部分是有势的 Q''_s，另一部分是非势的Q'_s：

$$Q_s=Q'_s+Q''_s$$

$$Q''_s=-\frac{\partial V}{\partial q_s}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial\dot{q}_s}$$

并令 $L=T-V$，则式（2.4.43）可写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q'_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}, \qquad (s=1,\cdots,n)$$

(2.4.44)

5．非完整系统广义坐标下的Lagrange原理

现在讨论非完整系统广义坐标下的Lagrange原理。与完整系统一样，要求可比较的运动有同样的总机械能常数。我们来讨论在什么条件下非完整系统具有能量积分。

命题5 如果非完整系统满足条件

（1）约束方程中 f_β 对 $\dot{q}_s$ 是齐次的，即

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=k_\beta f_\beta \qquad (2.4.45)$$

其中 k_β 为齐次性阶指数；

（2）非势力 Q'_s 是陀螺力或者不存在，即

$$\sum_{s=1}^{n}Q'_s\dot{q}_s=0 \qquad (2.4.46)$$

（3）Lagrange函数不显含时间 t，即

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0 \qquad (2.4.47)$$

则存在广义能量积分

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L=h \qquad (2.4.48)$$

〔证明〕 按照式（2.4.44），求式（2.4.48）左端对时间的导数，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L\Big)=\sum_{s=1}^{n}Q'_s\dot{q}_s+\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{s=1}^{n}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-\frac{\partial L}{\partial t}$$

将条件（2.4.45）—(2.4.47) 代入上式，便得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L\Big)=0$$

于是括号内表达式为常数。命题得证。

推论 非完整系统若满足条件（2.4.45)—(2.4.47)，且所受完整约束是定常的，则存在能量积分 $T+V=h$。

非完整系统的 Lagrange 原理仍具有形式（2.2.31)，即

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1} 2\,T\mathrm{d}t=0 \tag{2.4.49}$$

或者写成

$$\int_{t_0}^{t_1}\{\Delta L+2\,T(\Delta t)^{\boldsymbol{\cdot}}\}\mathrm{d}t=0 \tag{2.4.50}$$

对于非完整系统来说，由于变更运动一般不满足约束方程，因而 Lagrange 原理一般不是稳定作用量原理。非完整系统的 Lagrange 原理是稳定作用量原理的充要条件仍然是条件（2.4.34)。

非完整系统的 Lagrange 原理（2.4.50）可用于推导非完整系统的运动方程。为此，将式（2.4.50）引向更明显的形式。

命题 6 原理（2.4.50）等价于下列形式

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}\right\}\Delta q_\sigma\mathrm{d}t=0 \tag{2.4.51}$$

〔证明〕 由条件（2.4.47）知，L 不显含 t，故

$$\begin{aligned}\Delta L&=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\Delta q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\Delta q_{\varepsilon+\beta}\\&\quad+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\Delta \dot{q}_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\Delta \dot{q}_{\varepsilon+\beta}\\&=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\Delta q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\Delta q_{\varepsilon+\beta}\end{aligned}$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}\{(\Delta q_\sigma)^{\cdot}-\dot{q}_\sigma(\Delta t)^{\cdot}\}$$

$$+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\{(\Delta q_{\varepsilon+\beta})^{\cdot}-\dot{q}_{\varepsilon+\beta}(\Delta t)^{\cdot}\} \qquad (2.4.52)$$

将约束表为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t)$$

则条件（2.4.45）成为

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma=\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$$

于是

$$\Delta q_{\varepsilon+\beta}=\delta q_{\varepsilon+\beta}+\dot{q}_{\varepsilon+\beta}\Delta t=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma\Delta t=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\Delta q_\sigma \qquad (2.4.53)$$

而

$$(\Delta q_{\varepsilon+\beta})^{\cdot}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\Delta q_\sigma+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}(\Delta q_\sigma)^{\cdot} \qquad (2.4.54)$$

将式（2.4.53）和（2.4.54）代入式（2.4.52），得到

$$\Delta L=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\right)\Delta q_\sigma\right\}$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\right\}\Delta q_\sigma$$

$$-\left(\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\dot{q}_{\varepsilon+\beta}\right)(\Delta t)^{\cdot} \qquad (2.4.55)$$

因所受完整约束是定常的，动能为广义速度的齐二次式，有

$$2T(\Delta t)^{\cdot}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s(\Delta t)^{\cdot} \qquad (2.4.56)$$

联合式（2.4.55）和（2.4.56），有

$$\Delta L+2T(\Delta t)^{\cdot}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)\Delta q_\sigma\right\}$$
$$+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}\right\}\Delta q_\sigma \qquad (2.4.57)$$

将式(2.4.57)代入式(2.4.50)，并考虑到端点条件$(\Delta q_\sigma)_{t=t_0}=0$，$(\Delta q_\sigma)_{t=t_1}=0$，便得式（2.4.51）。

2.4.3 非完整系统准坐标下的积分变分原理

1. 非完整系统准坐标下的 Hamilton 原理

对受有形如式（2.4.1）的非完整约束的力学系统，我们选准速度如下

$$\begin{aligned}&\omega_\sigma=\omega_\sigma(q_s,\dot{q}_s,t), && (\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\\ &\omega_{\varepsilon+\beta}=f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t), && (\beta=1,\cdots,g)\end{aligned} \qquad (2.4.58)$$

也就是说，前面ε个准速度任意彼此独立地选取，后面g个准速度按约束方程的左边选取。因此有$\omega_{\varepsilon+\beta}=0$，但在许多情形中，这些条件仅在最终所得结果中才允许应用。

为建立非完整系统在准坐标中的 Hamilton 原理，可对完整系统准坐标下的 Hamilton 原理增加条件

$$\omega_{\varepsilon+\beta}=0,\quad \delta\pi_{\varepsilon+\beta}=0$$

即有

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L^{*}\mathrm{d}t=0$$
$$\omega_{\varepsilon+\beta}=0,\quad \delta\pi_{\varepsilon+\beta}=0,\qquad (\beta=1,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g) \qquad (2.4.59)$$
$$(\delta\pi_\sigma)_{t=t_0}=(\delta\pi_\sigma)_{t=t_1}=0,\qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon)$$

利用原理（2.4.59）可以推导非完整系统准坐标下的运动方程。类似于式（2.3.28），原理（2.4.59）可化成形式

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left[\frac{\partial L^*}{\partial \pi_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_\sigma}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_\sigma}-\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \pi_\sigma}\right)\right]\delta\pi_\sigma\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{2.4.60}$$

由此，注意到积分区间的任意性以及 $\delta\pi_\sigma$ 的彼此独立性，便得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_\sigma}-\frac{\partial L^*}{\partial \pi_\sigma}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_\sigma}-\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \pi_\sigma}\right)=0$$

$$(\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \quad (2.4.61)$$

这是非完整系统准坐标下的广义Чаплыгин方程。

类似于式（2.3.22），原理（2.4.59）还可写成形式

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left[\frac{\partial L^*}{\partial \pi_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_\sigma}-\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_k}\times\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial \omega_k}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_\sigma}\right]\delta\pi_\sigma\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{2.4.62}$$

由此，注意到积分区间的任意性以及 $\delta\pi_\sigma$ 的彼此独立性，便得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_\sigma}-\frac{\partial L^*}{\partial \pi_\sigma}+\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial \omega_k}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_\sigma}=0,\quad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{2.4.63}$$

这是非完整系统的Boltzmann-Hamel方程。值得注意的是，在方程（2.4.63）中，仅在计算$\frac{\partial L^*}{\partial \omega_k}$之后才可应用 $\omega_{\varepsilon+\beta}=0$。

2．非完整系统准坐标下的Lagrange原理

当准速度按广义速度的线性齐次式选取时，非完整系统准坐标下的Lagrange原理可表为

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1}2T^*\mathrm{d}t=0$$

$$\omega_{\epsilon+\beta}=0,\ \Delta\pi_{\epsilon-\beta}=0, \qquad (\beta=1,\cdots,g;\ \epsilon=n-g)$$

(2.4.64)

$$(\Delta\pi_\sigma)_{t=t_0}=(\Delta\pi_\sigma)_{t=t_1}=0, \qquad (\sigma=1,\cdots,\epsilon)$$

§2.5 一类新型积分变分原理

现在我们来研究一类新型积分变分原理，不同于前面讨论的 Hamilton 原理和 Lagrange 原理，它们不是在通常位形空间中，而是在m次速度空间中讨论的。当然，使用高阶变分空间时，对可取函数的光滑度要求较高。本节讨论m次速度空间中的积分变分原理，二次速度空间中的积分变分原理及其极值特性，以及新型变分原理的应用。

2.5.1 m 次速度空间中的积分变分原理

1. m 次速度空间的基本假定

定义 1 取 $\overset{(m)}{x}{}^i$ $(i=1,\cdots,N)$ 为 $3N$ 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}(0;\ \boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_{3N})$中的坐标变量，在此 3 N 维空间中任意一点的矢径 $\boldsymbol{x}$ 为

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{3N}\overset{(m)}{x}{}^i\boldsymbol{e}_i \tag{2.5.1}$$

其中$\overset{(m)}{x}{}^i=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overset{(m-1)}{x}{}^i$，称此空间为$m$次速度空间[14]。

当 $m=0,1,2$ 时，上述空间分别称为坐标空间、速度空间和加速度空间[2]。

在m次速度空间中的变分规则为

$$\begin{aligned}&\delta x^i=\delta\dot{x}^i=\cdots=\delta\overset{(m-1)}{x}{}^i=0\\&\delta\overset{(m)}{x}{}^i\neq0,\ \delta\overset{(m+1)}{x}{}^i\neq0\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

在广义坐标下写成

$$\delta \overset{(m-k)}{q_s} = 0, \quad (k=1, \cdots, m)$$
$$\delta \overset{(m)}{q_s} \neq 0, \quad \delta \overset{(m+1)}{q_s} \neq 0, \quad (s=1, \cdots, n) \tag{2.5.3}$$

定义 2 若在m次速度空间中，某个约束产生的约束反力沿着约束方程在该空间所确定的超曲面的法线方向，则称之为理想约束。

因此，当力学系统受有约束

$$F_\beta(t, x^i, \dot{x}^i, \cdots, \overset{(m)}{x}{}^i) = 0, \quad (\beta=1,\cdots,g; i=1,\cdots,3N) \tag{2.5.4}$$

时，其约束反力为

$$R_i = \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta \frac{\partial F_\beta}{\partial \overset{(m)}{x}{}^i} \tag{2.5.5}$$

若将约束用广义坐标表示，则有

$$f_\beta(t, q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(m)}{q_s}) = 0, \quad (\beta=1, \cdots, g; s=1, \cdots, n) \tag{2.5.6}$$

约束（2.5.6）是对$\overset{(m)}{q_s}$的限制，因此在m次速度空间中，约束(2.5.6)加在该空间中虚位移$\delta \overset{(m)}{q_s}$上的限制条件为

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial \overset{(m)}{q_s}} \delta \overset{(m)}{q_s} = 0, \quad (\beta=1, \cdots, g) \tag{2.5.7}$$

定义 3 m次速度空间中的交换关系为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta \overset{(m)}{q_s} - \delta \overset{(m+1)}{q_s} = 0 \tag{2.5.8}$$

2. m次速度空间中的积分变分原理

命题 1[15] 如果力学系统受有双面、理想、完整约束，所受广义力是有势的，其势能为$V=V(t, q_s)$，那么，在m次速度空间中系统真实运动将使泛函

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\overset{(m)}{T} + m \overset{(m)}{T_z} - \overset{(m)}{V} \right) \mathrm{d}t \tag{2.5.9}$$

取稳定值。这里T为系统的动能，$\overset{(m)}{T}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overset{(m-1)}{T}$，$\overset{(m)}{T}_{*}\overset{\Delta}{=}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\cdot\overset{(m+1)}{q}_s$，而$m$为不等于1的自然数。$m$次速度空间中轨道端点满足条件

$$\left(\delta \overset{(m)}{q}_s\right)_{t=t_0}=0,\quad \left(\delta \overset{(m)}{q}_s\right)_{t=t_1}=0 \qquad (2.5.10)$$

〔证明〕

$$\begin{aligned}
\delta I&=\int_{t_0}^{t_1}(\delta\overset{(m)}{T}+m\,\delta\overset{(m)}{T}_{*}-\delta\overset{(m)}{V})\mathrm{d}t\\
&=\int_{t_0}^{t_1}\Bigg\{\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m)}{T}}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\delta\overset{(m)}{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m)}{T}}{\partial\overset{(m+1)}{q}_s}\delta\overset{(m+1)}{q}_s\\
&\quad+m\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\delta\overset{(m+1)}{q}_s-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m)}{V}}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\delta\overset{(m)}{q}_s\Bigg\}\mathrm{d}t\\
&=(m+1)\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m)}{T}}{\partial\overset{(m+1)}{q}_s}\delta\overset{(m)}{q}_s\Bigg|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\Bigg\{\frac{\partial\overset{(m)}{T}}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\\
&\quad-\frac{\partial V}{\partial q_s}-(m+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\Bigg\}\delta\overset{(m)}{q}_s\,\mathrm{d}t\\
&=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\Bigg\{\frac{\partial\overset{(m)}{T}}{\partial\overset{(m)}{q}_s}-\frac{\partial V}{\partial q_s}-(m+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\Bigg\}\delta\overset{(m)}{q}_s\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

(2.5.11)

这里已用到交换关系（2.5.8）、端点条件（2.5.10）以及下述明显关系

$$\frac{\partial\overset{(m)}{T}}{\partial\overset{(m+1)}{q}_s}=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s} \qquad (2.5.12)$$

容易证明

$$\frac{\partial\overset{(m)}{T}}{\partial\overset{(m)}{q}_s}=\frac{\partial T}{\partial q_s}+m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s} \qquad (2.5.13)$$

将式（2.5.13）代入式（2.5.11），得到

$$\delta I=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\partial V}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta \overset{(m)}{q_s}\right\}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{m+1}{m}\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\partial V}{\partial q_s}-\frac{1}{m}\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\right)\delta \overset{(m)}{q_s}\right\}\mathrm{d}t \tag{2.5.14}$$

利用原理（2.1.35）或（2.1.47），便得 $\delta I=0$。

推论 如果 $m=0$，则命题 1 给出 Hamilton 原理

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T-V)\mathrm{d}t=0 \tag{2.5.15}$$

若在（$m-1$）次速度空间中的广义力是非势的，即

$$Q_s=Q_s(t,q_k,\cdots,\overset{(m-1)}{q_k}),\qquad (s,k=1,\cdots,n) \tag{2.5.16}$$

那么它们在 m 次速度空间中就具有广义势，只要取

$$\overset{(m)}{V}=-\sum_{s=1}^{n}Q_s\overset{(m)}{q_s} \tag{2.5.17}$$

就有

$$Q_s=-\frac{\partial \overset{(m)}{V}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} \tag{2.5.18}$$

于是有下述命题。

命题 2 [15] 对于（$m-1$）次速度空间中为非势力(2.5.16)的系统，命题 1 仍成立。

下面研究非完整系统。设系统受有 g 个非完整约束(2.5.6)，我们有下述命题。

命题 3 [15] 若系统受有双面、理想非完整约束（2.5.6），且广义力是有势的，则在 m 次速度空间中系统真实运动使泛函

$$A=\int_{t_0}^{t_1}\left(\overset{(m)}{T}+m\overset{(m)}{T_x}-\overset{(m)}{V}-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta f_\beta\right)\mathrm{d}t \tag{2.5.19}$$

取稳定值，其中 m 为不等于 1 的自然数，λ_β 为不定乘子。

〔证明〕 类似于命题 1 的讨论，有

$$\delta A=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{m+1}{m}\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\partial V}{\partial q_s}-\frac{1}{m}\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\right)\delta \overset{(m)}{q_s}\right.$$

$$\left.-\sum_{s=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\delta \overset{(m)}{q_s}-\sum_{\beta=1}^{g}f_\beta\delta\lambda_\beta\right\}\mathrm{d}t$$

考虑到式（2.5.6），则有

$$\delta A=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{m+1}{m}\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\partial V}{\partial q_s}-\frac{1}{m}\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\right)\delta \overset{(m)}{q_s}\right\}\mathrm{d}t \qquad (2.5.20)$$

由原理（2.1.47）和虚位移方程（2.5.7），利用 Lagrange 乘子法，容易得到方程

$$\frac{1}{m}\left\{\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}-(m+1)\frac{\partial T}{\partial q_s}\right\}=-\frac{\partial V}{\partial q_s}-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \overset{(m)}{q_s}}$$

$$(s=1,\cdots,n) \qquad (2.5.21)$$

将式（2.5.21）代入式（2.5.20），便得 $\delta A=0$。

命题 4 对于（$m-1$）次速度空间中为非势力的系统，命题 3 仍然成立。

2.5.2 二次速度空间中的积分变分原理及其极值特性

1. 二次速度空间中的积分变分原理

当 $m=2$ 时，命题 2 和命题 4 分别给出

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(\ddot{T}+2\ddot{T}_*-\ddot{V})\mathrm{d}t=0 \qquad (2.5.22)$$

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\ddot{T}+2\ddot{T}_*-\ddot{V}-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta f_\beta\right)\mathrm{d}t=0 \qquad (2.5.23)$$

2. 积分变分原理的极值特性

下面研究原理（2.5.22）和（2.5.23）的极值特性。我们有

如下命题。

命题 5 [15] 对于受有双面、理想、定常、完整约束的系统，二次速度空间中的泛函

$$I=\int_{t_0}^{t_1}(\ddot{T}+2\ddot{T}_*-\ddot{V})\mathrm{d}t \tag{2.5.24}$$

在其真实路径上取极大值。

〔证明〕 在二次速度空间中，式（2.5.24）的二次变分为

$$\delta^2 I=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{3}{2}\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{1}{2}\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_s}+\frac{\partial \ddot{V}}{\partial \ddot{q}_s}\right)\delta^2\ddot{q}_s\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\ddot{T}}{\partial\ddot{q}_s\partial\ddot{q}_k}\delta\ddot{q}_s\delta\ddot{q}_k+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\ddot{T}}{\partial\ddot{q}_s\partial\dddot{q}_k}\delta\ddot{q}_s\delta\dddot{q}_k\right)\right\}\mathrm{d}t \tag{2.5.25}$$

由运动方程知上式右端第一项为零。据假设，系统动能为广义速度的齐二次式

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k$$

故

$$\frac{\partial^2\ddot{T}}{\partial\ddot{q}_s\partial\ddot{q}_k}=2A_{sk},\quad \frac{\partial^2\ddot{T}}{\partial\ddot{q}_s\partial\dddot{q}_k}=0 \tag{2.5.26}$$

将式（2.5.26）代入式（2.5.25），得到

$$\delta^2 I=-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\delta\ddot{q}_s\delta\ddot{q}_k\right)\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}T(\delta\ddot{q})\mathrm{d}t \tag{2.5.27}$$

其中 $T(\delta\ddot{q})$ 为 T 中 $\dot{q}_s$ 用 $\delta\ddot{q}_s$ 替代的结果。因 T 是正定的，故 $T(\delta\ddot{q})>0$，而 $\delta^2 I<0$。命题得证。 ‖

命题 6 [15] 对受有 g 个非完整约束

$$f_\beta(t, q_s, \dot{q}_s, \ddot{q}_s)=0, \quad (\beta=1, \cdots, g; s=1, \cdots, n)$$

(2.5.28)

的力学系统，如所受完整约束是定常的，那么二次速度空间中的泛函

$$A=\int_{t_0}^{t_1}\left(\ddot{T}+2\ddot{T}_x-\ddot{V}-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta f_\beta\right)\mathrm{d}t \qquad (2.5.29)$$

取极大值的条件归结为

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\ddot{T}}{\partial\ddot{q}_s\partial\ddot{q}_k}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial^2 f_\beta}{\partial\ddot{q}_s\partial\ddot{q}_k}\right)\delta\ddot{q}_s\delta\ddot{q}_k>0 \quad (2.5.30)$$

推论 若 f_β 为 $\ddot{q}_s$ 的线性函数时，泛函 A 取极大值。

2.5.3 新型积分变分原理的应用[16]

1. 在弹性力学中的应用

设弹性系统的位形由位移矢量 $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t)$ 确定，系统的控制方程为

$$\ddot{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{x}, t)+D_x[\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t)]=0 \qquad (2.5.31)$$

其中 D_x 为线性偏微分算子，边界条件为

$$\{U_n[\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t)]\}_B=0 \qquad (2.5.32)$$

当 D_x 为自伴算子时，式（2.5.31）就是弹性保守系统的运动微分方程；当 D_x 非自伴时，式（2.5.31）就是弹性非保守系统的运动微分方程。

对式（2.5.31）和（2.5.32）的情形，有如下命题。

命题 7 在二次速度空间中，弹性系统的真实运动使泛函

$$I=\int_{t_0}^{t_1}\int_V\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{W}}^2(\boldsymbol{x}, t)\right]+2\dot{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{x}, t)\cdot\dddot{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{x}, t)\right.$$

$$\left.-D_x[\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t)]\cdot\ddot{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{x}, t)\right\}\mathrm{d}v\mathrm{d}t \qquad (2.5.33)$$

取极大值，而使泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\int_V\left\{\frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{W}}^2(\boldsymbol{x}, t)+D_x[\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t)]\cdot\ddot{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{x}, t)\right\}\mathrm{d}v\mathrm{d}t$$

(2.5.34)

取极小值。

〔证明〕

$$\delta I=\int_{t_0}^{t_1}\int_V \{2\dot{W}(x,t)\cdot\delta\dot{W}(x,t)+3\dot{W}(x,t)\cdot\delta\ddot{W}(x,t)-D_x[W(x,t)]\cdot\delta\ddot{W}(x,t)\}\mathrm{d}v\mathrm{d}t$$

$$=-\int_{t_0}^{t_1}\int_V \{\ddot{W}(x,t)+D_x[W(x,t)]\}\cdot\delta\ddot{W}\mathrm{d}v\mathrm{d}t+\int_V 3\dot{W}(x,t)\cdot\delta\dot{W}(x,t)\mathrm{d}v\Big|_{t_0}^{t_1}$$

这里已用到交换关系 $\delta\ddot{W}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\dot{W})$。利用端点条件 $(\delta\dot{W})_{t=t_0}=(\delta\dot{W})_{t=t_1}=0$，以及方程 (2.5.31)，便得 $\delta I=0$。再计算二次变分，有

$$\delta^2 I=-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_V \delta\ddot{W}\cdot\delta\ddot{W}\mathrm{d}v\mathrm{d}t<0$$

因此，I 取极大值。

又有

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_1}\int_V \{\ddot{W}(x,t)+D_x[W(x,t)]\}\cdot\delta\ddot{W}(x,t)\mathrm{d}v\mathrm{d}t=0$$

$$\delta^2 J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_V \delta\ddot{W}\cdot\delta\ddot{W}\mathrm{d}v\mathrm{d}t>0$$

因此，J 取极小值。

2. 在热传导问题中的应用

设在热传导问题中物体内的温度分布为 T，物体中有内热源 Q，则不稳态有内热源的热平衡方程为

$$a\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\dot{Q} \qquad (2.5.35)$$

其中 λ/a 称为热扩散率。对这类问题，我们有下述命题。

命题 8 在 m 次速度空间中，对于有内热源的不稳态热传导问题，系统的真实物理状态使泛函

$$I=\int_{t_0}^{t_1}\int_V\left\{a\frac{\partial T}{\partial t}\overset{(m)}{T}+\frac{\lambda}{2}\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)^2\right]^{(m)}-\dot{Q}\overset{(m)}{T}\right\}\mathrm{d}v\mathrm{d}t \tag{2.5.36}$$

取稳定值，其中 $m=2, 3, \cdots, x_1=x, x_2=y, x_3=z$。

〔证明〕 按 m 次速度空间的变分规则，有

$$\delta I=\int_{t_0}^{t_1}\int_V\left\{a\frac{\partial T}{\partial t}\delta\overset{(m)}{T}-\dot{Q}\delta\overset{(m)}{T}+\sum_{i=1}^{3}\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\delta\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)^{(m)}\right\}\mathrm{d}v\mathrm{d}t \tag{2.5.37}$$

利用 Stokes 定理和边界变分条件，有

$$\begin{aligned}\int_V\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i}\delta\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)^{(m)}\mathrm{d}v&=\int_V\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}(\delta\overset{(m)}{T})\mathrm{d}v\\&=\int_S\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i}n_i\delta\overset{(m)}{T}\mathrm{d}s-\int_V\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}\delta\overset{(m)}{T}\mathrm{d}v\\&=-\int_V\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}\delta\overset{(m)}{T}\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{2.5.38}$$

将式（2.5.38）代入式（2.5.37），得

$$\delta I=\int_{t_0}^{t_1}\int_V\left\{a\frac{\partial T}{\partial t}-\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)-\dot{Q}\right\}\delta\overset{(m)}{T}\mathrm{d}v\mathrm{d}t \tag{2.5.39}$$

考虑到方程（2.5.35），便有 $\delta I=0$。 ‖

§2.6 新型交换关系下的 Hamilton 原理和高阶非完整系统的 Hamilton 原理

本节讨论两个彼此独立的问题，一个是新型交换关系下的 Hamilton 原理，另一个是高阶非完整系统的 Hamilton 原理。

2.6.1 完整非保守系统的 Hamilton 原理

首先讨论第一个问题：新型交换关系下的 Hamilton 原理。

1. Vujanović 形式的 Hamilton 原理

现在研究在 Vujanović 交换关系下完整非保守系统的 Hamilton 原理。Vujanović 交换关系（1.6.48）实际上给出了 $\delta\dot{q}_s$ 的定义，它可写成

$$\delta\dot{q}_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s)+\frac{\dot{q}_s}{2L_2+L_1}\sum_{k=1}^{n}Q'_k\delta q_k, \qquad (s=1, \cdots, n) \tag{2.6.1}$$

现在由 D'Alembert-Lagrange 原理（2.1.8）出发，来导出 Vujanović 的 Hamilton 原理。原理（2.1.8）可改写为下列形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}+Q'_s\right)\delta q_s=0 \tag{2.6.2}$$

其中广义力分成有势的 Q''_s 和非势的 Q'_s

$$Q_s=Q'_s+Q''_s, \quad Q''_s=-\frac{\partial V}{\partial q_s}, \quad L=T-V \tag{2.6.3}$$

将式（2.6.2）改写为如下形式

$$\delta L-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right)$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s)-\delta\dot{q}_s\right\}+\sum_{s=1}^{n}Q'_s\delta q_s=0 \tag{2.6.4}$$

将式（2.6.1）代入式（2.6.4），并注意到

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=2L_2+L_1 \tag{2.6.5}$$

得到

$$(\delta L)_{\mathrm{V}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right)=0 \tag{2.6.6}$$

其中 $(\delta L)_V$ 为在交换关系 (2.6.1) 下的 δL。将式(2.6.6) 由 t_0 至 t_1 对 t 积分，并注意到端点条件

$$(\delta q_s)_{t=t_0}=0,\quad (\delta q_s)_{t=t_1}=0 \tag{2.6.7}$$

便得

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta L)_V\mathrm{d}t=0 \tag{2.6.8}$$

这就是 Vujanović 提出的完整非保守系统的 Hamilton 原理。

一般完整系统通常形式的 Hamilton 原理为式 (2.2.11)，考虑到式 (2.6.3)，它可表为

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta L+\sum_{s=1}^{n}Q'_s\delta q_s\right)\mathrm{d}t=0 \tag{2.6.9}$$

原理 (2.6.8) 与 (2.6.9) 虽然形式不同，但其实质是一样的。之所以形式不同，是因为所采用的交换关系不同，或者说所定义的 $\delta\dot{q}_s$ 不同。在式 (2.6.8) 中的 $\delta\dot{q}_s$ 由式 (2.6.1) 给出，而在式 (2.6.9) 中的 $\delta\dot{q}_s$ 为

$$\delta\dot{q}_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_s,\qquad (s=1,\cdots,n) \tag{2.6.10}$$

比较式 (2.6.8) 与 (2.6.9)，得到下述命题。

命题 1 我们有

$$(\delta L)_V=\delta L+\sum_{s=1}^{n}Q'_s\delta q_s \tag{2.6.11}$$

2. 原理 (2.6.8) 的应用

利用 Vujanović 形式的 Hamilton 原理 (2.6.8) 可以推导完整非保守系统的运动微分方程。

例 1 一质量为 m 的质点在平面 (x, y) 上运动，其 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-mgy \tag{a}$$

而非势广义力为

$$Q'_x=-c_1\dot{x},\quad Q'_y=-c_2\dot{y},\quad (c_1, c_2 \text{ 为常数}) \tag{b}$$

试用原理（2.6.8）来建立质点的运动微分方程。

据交换关系（2.6.1），我们有

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x) + \frac{\dot{x}}{m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}(-c_1\dot{x}\delta x - c_2\dot{y}\delta y) \\
\delta\dot{y} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta y) + \frac{\dot{y}}{m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}(-c_1\dot{x}\delta x - c_2\dot{y}\delta y)
\end{aligned} \tag{c}
$$

而

$$
\delta L = m\dot{x}\delta\dot{x} + m\dot{y}\delta\dot{y} - mg\delta y \tag{d}
$$

将式（c）代入式（d），得到

$$
(\delta L)_V = m\dot{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x) + m\dot{y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta y) - c_1\dot{x}\delta x - c_2\dot{y}\delta y - mg\delta y
$$

于是原理（2.5.8）成为

$$
\int_{t_0}^{t_1}\left\{m\dot{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x) + m\dot{y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta y) - c_1\dot{x}\delta x - c_2\dot{y}\delta y - mg\delta y\right\}\mathrm{d}t = 0 \tag{e}
$$

分部积分，得

$$
(m\dot{x}\delta x)\Big|_{t_0}^{t_1} + (m\dot{y}\delta y)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}(m\ddot{x} + c_1\dot{x})\delta x\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1}(m\ddot{y} + c_2\dot{y} + mg)\delta y\mathrm{d}t = 0 \tag{f}
$$

由此，据端点条件，积分区间的任意性以及 δx 与 δy 的独立性，得到

$$
m\ddot{x} + c_1 x = 0,\quad m\ddot{y} + c_2 y + mg = 0
$$

2.6.2 非完整非保守系统的 Hamilton 原理

1. 非完整系统的 Hamilton 原理

现在研究在交换关系（1.6.51）下非完整系统的 Hamilton

原理。交换关系（1.6.51）实际上给出了 $\delta\dot{q}_s$ 的定义，它可写成形式

$$\delta\dot{q}_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s)+\frac{\dot{q}_s}{2L_2+L_1}\sum_{k=1}^{n}\left(Q'_k+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\right)\delta q_k \tag{2.6.12}$$

将式（2.6.12）代入式（2.6.4），并注意到式（2.6.5），得到

$$(\delta L)_Z-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s\right)-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k=0 \tag{2.6.13}$$

其中 $(\delta L)_Z$ 为在交换关系（2.6.12）下的 δL。将式（2.6.13）由 t_0 至 t_1 对 t 积分，并利用端点条件（2.6.7），得到

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\delta L)_Z-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{2.6.14}$$

据 Appell-Четаев 定义，有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s=0,\qquad(\beta=1,\cdots,g) \tag{2.6.15}$$

将式（2.6.15）代入式（2.6.14），得到[18]

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta L)_Z\mathrm{d}t=0 \tag{2.6.16}$$

这就是非完整非保守系统在交换关系（2.6.12）下的 Hamilton 原理。

在 Hölder 交换关系（2.6.10）下，非完整非保守系统的 Hamilton 原理（2.4.23）可改写成形式

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\delta L)_H+\sum_{s=1}^{n}Q'_s\delta q_s\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{2.6.17}$$

比较式（2.6.16）和（2.6.17），得到下述命题。

命题 2　我们有

$$(\delta L)_Z=(\delta L)_H+\sum_{s=1}^{n}Q'_s\delta q_s \tag{2.6.18}$$

2. 原理（2.6.16）的应用

利用 Hamilton 原理（2.6.16）可以推导非完整系统的运动微分方程。

例 2 一质点在平面上运动，其 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2) \tag{a}$$

非势广义力为 Q'_1，Q'_2，它的运动受有非完整约束

$$f=\dot{q}_2-t\dot{q}_1=0 \tag{b}$$

现在利用原理（2.6.16）来导出问题的运动微分方程。按照式（2.6.12），有

$$\begin{aligned}\delta\dot{q}_1&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_1)+\frac{\dot{q}_1}{m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)}\{(Q'_1-\lambda t)\delta q_1\\&\quad+(Q'_2+\lambda)\delta q_2\}\\\delta\dot{q}_2&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_2)+\frac{\dot{q}_2}{m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)}\{(Q'_1-\lambda t)\delta q_1\\&\quad+(Q'_2+\lambda)\delta q_2\}\end{aligned} \tag{c}$$

由式（a）得

$$\delta L=m\dot{q}_1\delta\dot{q}_1+m\dot{q}_2\delta\dot{q}_2 \tag{d}$$

将式（c）代入式（d），得

$$\begin{aligned}(\delta L)_Z&=m\dot{q}_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_1)+m\dot{q}_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_2)\\&\quad+(Q'_1-\lambda t)\delta q_1+(Q'_2+\lambda)\delta q_2\end{aligned} \tag{e}$$

于是式（2.6.16）给出

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}(\delta L)_Z\mathrm{d}t&=(m\dot{q}_1\delta q_1+m\dot{q}_2\delta q_2)\Big|_{t_0}^{t_1}\\&\quad+\int_{t_0}^{t_1}\{(-m\ddot{q}_1+Q'_1-\lambda t)\delta q_1+(-m\ddot{q}_2\end{aligned}$$

$$+Q_2'+\lambda)\delta q_2\}\mathrm{d}t=0 \qquad (f)$$

由此得到问题的运动微分方程

$$m\ddot{q}_1=Q_1'-\lambda t,\quad m\ddot{q}_2=Q_2'+\lambda \qquad (g)$$ ||

2.6.3 高阶非完整系统的 Hamilton 原理

现在讨论第二个问题：高阶非完整系统的 Hamilton 原理。

我们由万有 D'Alembert 原理和高阶非完整系统的交换关系出发，来看高阶非完整系统的 Hamilton 原理有怎样的形式。

($m-1$) 阶万有 D'Alembert 原理的 Euler-Lagrange 形式，类似于式（2.1.35），可写成

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+Q_s\right)\delta \overset{(m-1)}{q_s}=0 \qquad (2.6.19)$$

容易证明下述关系

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}},\quad \frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}}-(m-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} \qquad (2.6.20)$$

将式（2.6.20）代入式（2.6.19），得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}}-m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}+Q_s\right)\delta \overset{(m-1)}{q_s}=0 \qquad (2.6.21)$$

采用 1.6.2 中的变分，即

$$\delta \overset{(k)}{q_s}=0 \qquad (k=0,1,\cdots,m-2),\ \delta t=0 \qquad (2.6.22)$$

则有

$$\delta \overset{(m-1)}{T}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}}\delta \overset{(m-1)}{q_s}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\delta \overset{(m)}{q_s} \qquad (2.6.23)$$

此时原理（2.6.21）可改写成形式

$$-m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\delta \overset{(m-1)}{q_s}\right)+\delta \overset{(m-1)}{T}+$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\left\{m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta \overset{(m-1)}{q}_s)-\delta \overset{(m)}{q}_s\right\}+\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta \overset{(m-1)}{q}_s=0 \qquad (2.6.24)$$

将式（2.6.24）从 t_0 至 t_1 对 t 积分，并取端点条件

$$(\delta \overset{(m-1)}{q}_s)_{t=t_0}=(\delta \overset{(m-1)}{q}_s)_{t=t_1}=0 \qquad (2.6.25)$$

便得

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta \overset{(m-1)}{T}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\left[m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta \overset{(m-1)}{q}_s)-\delta \overset{(m)}{q}_s\right]\right.$$
$$\left.+\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta \overset{(m-1)}{q}_s\right\}\mathrm{d}t=0 \qquad (2.6.26)$$

原理（2.6.26）可称为高阶非完整系统Hamilton原理的一般形式。

利用交换关系（1.6.34）和（1.6.35），有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\left\{m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta \overset{(m-1)}{q}_s)-\delta \overset{(m)}{q}_s\right\}$$
$$=(m-1)\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta \overset{(m-1)}{q}_s)+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}$$
$$\times\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}-\frac{\partial \varphi_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial \varphi_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\varepsilon+\gamma}}\frac{\partial \varphi_\gamma^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}\right)\delta \overset{(m-1)}{q}_\sigma$$
$$(2.6.27)$$

将式（2.6.27）代入式（2.6.26），并注意到条件（2.6.25），得到

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta \overset{(m-1)}{T}+\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta \overset{(m-1)}{q}_s+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\right.$$
$$\times\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}-\frac{\partial \varphi_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial \varphi_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\varepsilon+\gamma}}\frac{\partial \varphi_\gamma^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}\right)$$

$$\times \delta \overset{(m-1)}{q_\sigma} - (m-1)\sum_{s=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\right)\delta \overset{(m-1)}{q_s} \Bigg\}\mathrm{d}t = 0$$

$$(2.6.28)$$

原理（2.6.28）称为高阶非完整系统的 Hamilton 原理的第一种形式。

现在进一步变换原理（2.6.28）。令

$$\begin{aligned}&\overset{(\widetilde{m-1})}{T}(q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(m-1)}{q_s}, \overset{(m)}{q_\sigma}, t)\\ &= \overset{(m-1)}{T}(q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(m-1)}{q_s}, \overset{(m)}{q_\sigma},\\ &\varphi_\beta^{(m)}(q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(m-1)}{q_s}, \overset{(m)}{q_\sigma}, t), t)\end{aligned} \tag{2.6.29}$$

则

$$\frac{\partial \overset{(\widetilde{m-1})}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}} = \frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}} + \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_{\varepsilon+\beta}}} \frac{\partial \varphi_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}} \tag{2.6.30}$$

于是，利用式（1.6.30），有

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\right)\delta \overset{(m-1)}{q_s} &= \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}\right)\delta \overset{(m-1)}{q_\sigma}\\ &\quad + \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_{\varepsilon+\beta}}}\right)\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \varphi_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}} \delta \overset{(m-1)}{q_\sigma}\\ &= \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \overset{(\widetilde{m-1})}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}\right)\delta \overset{(m-1)}{q_\sigma} - \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_{\varepsilon+\beta}}} \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \varphi_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}} \delta \overset{(m-1)}{q_\sigma}\end{aligned}$$

$$(2.6.31)$$

将式（2.6.31）代入式（2.6.28），最终得到[18]

$$\int_{t_0}^{t_1} \Bigg\{\delta \overset{(m-1)}{T} + \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \tilde{Q}_\sigma \delta \overset{(m-1)}{q_\sigma} + \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Bigg[\sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_{\varepsilon+\beta}}}$$

$$\times\left(m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_{\beta}^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q_{\sigma}}}-\frac{\partial\varphi_{\beta}^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{q_{\sigma}}}-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial\varphi_{\beta}^{(m)}}{\partial \overset{(m-1)}{q_{\varepsilon+\gamma}}}\frac{\partial\varphi_{\gamma}^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q_{\sigma}}}\right)$$

$$-(m-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \overset{(\widetilde{m-1})}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_{\sigma}}}\Bigg]\delta \overset{(m-1)}{q_{\sigma}}\Bigg\}\mathrm{d}t=0 \qquad (2.6.32)$$

其中

$$\tilde{Q}_{\sigma}=Q_{\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial\varphi_{\beta}^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q_{\sigma}}} \qquad (2.6.33)$$

原理（2.6.32）称为高阶非完整系统 Hamilton 原理的第二种形式。

当 $m=1$ 时，原理（2.6.32）给出一阶非完整系统 Hamilton 原理的 Суслов 形式（2.4.22）。

利用原理（2.6.32）可以推导高阶非完整系统的运动微分方程。

§2.7 历史资料

2.7.1 名家介绍

J le R. D'Alembert（1717—1783） 法国数学家、力学家、哲学家。在他的著作《动力学》（Traité de dynamique, Paris, 1743）中指出 Newton 第二定律也适用于非自由物体，从此开始研究非自由质点系动力学。书中提出的原理，后来演变为 D'Alembert 原理的近代说法。

K. F. Gauss（1777—1855）德国数学家。他的主要成就在高等代数，数论，微分几何等方面。他所研究的行星轨道的计算方法至今仍是这类计算的基础。在他的论文《论力学的一个新的普遍原理》（Über ein neues allegemeines Grundgesetz der Mechanik, 1829）中提出著名的最小拘束原理。

W. R. Hamilton (1805—1865) 英国数学家、物理学家、力学家。他发展了分析力学，在他的两篇长论文(On a general method in dynamics, 1834; Second essay on a general method in dynamics, 1835)中提出了著名的Hamilton 原理和正则方程。

2.7.2 力学的变分原理发展简史

力学的变分原理以及与其相关的物理思想和数学方法的综合，在理论与应用力学以及物理中起重要作用。很难指出物理-数学科学的其它领域，把抽象的数学研究与具体的物理内容如此深刻地结合起来。力学的变分原理不仅是自然和技术的最复杂、多方面问题科学研究的精美工具，而且运动规则的独特表达形式远远超出了经典力学的限制。力学的变分原理与变换群理论，光-机相似，经典和量子物理场论，运动、平衡、稳定性以及物理系统结构等问题解的变分方法等密切相关。

1. 力学的变分原理的发展

文献〔17〕对力学的变分原理的发展史作了很好的总结与概括。主要有：

力学的变分原理和光-机相似的经过史；

Maupertuis 最小作用量原理；

18 世纪关于最小作用量原理的讨论；

Euler 最小作用量原理；

Laplace, Carnot 和 Poisson 与最小作用量原理相关的工作；

Hamilton 在几何光学和光-机相似领域中的研究；

Hamilton 动力学；

Jacobi 和 Остроградский 在力学的变分原理领域中的研究；

Lie 接触变换和 Hamilton-Jacobi 动力学；

19 世纪变分原理的分析力学的数学问题的发展；

Hamilton-Jacobi 分析力学的几何化；

19—20 世纪力学的变分原理的发展和推广；

Gauss 原理和 Hertz 原理。

2．力学的变分原理在经典物理和近代物理中的作用[17]。

3．力学与物理中变分原理的涵义和意义

文献[17]以较长篇幅论述了这一问题，主要有以下观点：

力学的变分原理的应用和物理意义的基础是两个定理：Hilbert 独立性定理和 Noether 定理。第一个定理给出变分原理的数学论据，第二个定理揭示它的物理意义。

物理中电磁场的表现不仅可以用法拉第模型来描述，而且其规律可借助 Lagrange 型方程来表达。

与 D'Alembert 原理相比较，Hamilton 原理的优越性在于研究一个唯一的标量 L，因此没有必要去计算每个质点的加速度和确定惯性力的虚功。

文献中大量出现的“原理的证明”无疑是不合理的，原理无需证明。

Hamilton 原理包罗了力学的以及一系列非力学的现象。

Hamilton 原理与最小作用量原理的相近没有排除它们之间的差别。

Hamilton 原理与经典力学中 Galilei-Newton 惯性原理密切相关。

以某积分和函数变分形式表达的原理构成动力学定律的真实极值性质。

用 Jacobi 形式的最小作用量原理确定的轨道归结为确定测地线的纯几何问题。

不同的力学公式有不同的意义。基于用微分形式表达的 Lagrange 力学中的公式对解工程力学问题是特别有效的，基于积分原理的 Hamilton，Jacobi 力学中的其它公式是研究无论宏

观世界还是微观世界一系列天文和物理问题的基本方法。

力学定律的基础是因果关系的确定类型——所谓动力学合理性，其在力学中的意义是：如果给定系统的初始条件和作用力，那么在任何时刻在轨道上的位置是单值确定的。力学的变分原理从内容和数学形式上看是一种“公理”。

总起来说，力学的变分原理不仅以简单不变形式表达运动方程和场方程，而且是运动的离散和连续观点的综合，是物理中广义因果原理的表达。

习　　题

1．试证明下述命题

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{r}_i\cdot\delta\overset{(m)}{r}_i=\sum_{s=1}^{n}\left(m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\overset{(m-1)}{T}}{\partial\overset{(m)}{q}_s}-\frac{\partial\overset{(m-1)}{T}}{\partial\overset{(m-1)}{q}_s}\right)\delta\overset{(m)}{q}_s$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\left\{m\frac{\partial\overset{(m)}{T}}{\partial\overset{(m)}{q}_s}-(m+1)\frac{\partial\overset{(m-1)}{T}}{\partial\overset{(m-1)}{q}_s}\right\}\delta\overset{(m)}{q}_s$$

2．引进非等时变分

$$\Delta\dot{q}_s=\delta\dot{q}_s+\ddot{q}_s\Delta t$$

以及

$$\Delta_1 q_s=0,\quad \Delta_1 t=0$$

试证明 Jourdain 非等时变分为

$$\Delta_1\dot{q}_s=\delta_1\dot{q}_s$$

$$(\Delta_1 q_s)^{\cdot}=\delta_1\dot{q}_s+\dot{q}_s(\Delta_1 t)^{\cdot}$$

$$\Delta_1\dot{q}_s=(\Delta_1 q_s)^{\cdot}-\dot{q}_s(\Delta_1 t)^{\cdot}$$

将无限小量 $(\Delta_1 q_s)^{\cdot}$ 和 $(\Delta_1 t)^{\cdot}$ 作为 Jourdain 无限小变换的构成元素，引进空间和时间的无限小变换生成函数

$$(\Delta_1 q_s)^{\cdot}=\varepsilon F_1^s(t,q_k,\dot{q}_k)$$

$$(\Delta_1 t)^{\cdot}=\varepsilon f_1(t,q_k,\dot{q}_k)$$

则 Jourdain 原理可表为

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\right)(F_1^*-\dot{q}_s f_1)=0$$

试证明之。

3．试证原理（2.2.11）在条件（2.2.12）下将成为原理（2.2.3）。

4．某单自由度完整系统的 Lagrange 函数为 $L=\frac{1}{2}e^{\gamma t}\dot{q}^2$，其运动方程为 $e^{\gamma t}(\ddot{q}+\gamma\dot{q})=0$，其中 γ 为一常数。试说明可由原理（2.2.3）导出问题的运动方程。

5．试用方程（2.3.24）和（2.3.30）导出刚体定点转动的 Euler 动力学方程。

6．试由完整系统准坐标下的一般 Hamilton 原理（2.3.31）导出系统的 Чаплыгин 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_s}-\frac{\partial T^*}{\partial \pi_s}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s}-\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \pi_s}\right)=P_s^*,$$

$$(s=1,\cdots,n)$$

和 Boltzmann-Hamel 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_s}-\frac{\partial T^*}{\partial \pi_s}+\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial \omega_k}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}$$

$$=P_s^*,\quad (s=1,\cdots,n)$$

7．一单位质量质点在空间中按惯性运动，并受有一个非完整约束

$$z\dot{x}-\dot{y}=0 \tag{a}$$

它的运动方程为

$$\ddot{x}-\lambda z=0,\quad \ddot{y}+\lambda=0,\quad \ddot{z}=0 \tag{b}$$

已知（a）、（b）的解为

$$x=AW^{-1}\theta,\quad y=AW^{-1}(\cosh\theta-1),\quad z=\sinh\theta=Wt \tag{c}$$

其中 A，W 为积分常数。试证解组（c）的任一特解都不能使泛函 $\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t$ 在约束条件（a）下具有稳定值。

8．试根据 Appell-Hamel 例的运动方程来证明 $\delta\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t=0$。

参 考 文 献

〔1〕 Mei Fengxiang. Nouvelles équations du mouvement des systèmes mécaniques non holonomes. Thèse d'Etat. Nantes: ENSM, Mai 1982.

〔2〕 牛青萍. 经典力学基本微分原理与不完整力学组的运动方程. 力学学报, 第7卷第2期, 1964.

〔3〕 Mangeron D, Deleanu S. Sur une classe d'équations de la mécanique analytique au sens de I. Tzénoff. Докл. Болг. АН, 15(1): 9—12, 1962.

〔4〕 Dolaptchiew B. Sur les systèmes mécaniques non holonomes assujettis à les liaisons arbitraires. C. R. Acad. Sc. Paris, 262(11), 1966.

〔5〕 Попов Е П, Верещагин АФ, Зенкевич СЛ. Манипуляционные работы. Динамика и алгоритмы. М: Наука, 1978.

〔6〕 Юшков МП. Построение приближенных решения уравнений нелинейных колебаний на основе принципа Гаусса, Вестн ЛГУ, (13): 121—123, 1984.

〔7〕 Лурье А И. Аналитическая механика. М: ТИФМЛ, 1961.

〔8〕 朱照宣, 周起钊, 殷金生. 理论力学. 北京: 北京大学出版社, 1982.

〔9〕 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京: 北京工业学院出版社, 1985.

〔10〕 陈滨. 分析动力学, 北京: 北京大学出版社, 1987.

〔11〕 Papastavridis J G, Chen G. The principle of "least" action in non-linear and/or non-conservative oscillations. Journal of Sound and Vibration, 109(2): 225—235, 1986.

〔12〕 Новоселов В С. Вариационные методы в механике. Л: ЛГУ, 1966.

〔13〕 Румянцев В В. О принципе Гамильтона для неголоно-

мных систем. П. М. М., 42(3), 1978.
〔14〕 赵国景．分析力学的基本微分原理．上海力学，(3)，1981.
〔15〕 赵跃宇．分析力学的新型变分原理．湘潭大学自然科学学报，(4)，1986.
〔16〕 赵跃宇．力学的新型变分原理及其应用．北京工业学院硕士论文，1987.
〔17〕 Полак Л С. Вариационные принципы механики. М: ГИФМЛ, 1959.
〔18〕 梅凤翔.非完整动力学研究.北京：北京工业学院出版社，1987.

第三章　分析力学的各种运动微分方程

根据分析力学的基本概念，由分析力学的变分原理出发导出力学系统的运动微分方程，是分析力学的方法，也是分析力学的重要内容。

在计算技术高度发达的今天，只要正确地建立了运动微分方程，则在给定的初始条件下，便有可能借助电子计算机求出近似解答。因此，正确地列写完整系统和非完整系统的运动微分方程就显得特别重要。

力学系统的运动微分方程有各种各样的形式。但大致可以分成三大体系：Euler-Lagrange 体系，Nielsen 体系和 Appell 体系。在 § 3.1— § 3.3 中研究这三个体系的方程。此外，还有混合形式的方程，它们在 § 3.4 中讨论。在 § 3.5 中讨论运动方程的正则形式。

§ 3.1　Euler-Lagrange 体系的方程

本节讨论完整系统的 Lagrange 方程，一阶非完整系统的 Routh 方程、Mac-Millan 方程、Volterra 方程、Чаплыгин 方程和 Boltzmann-Hamel 方程，以及高阶非完整系统的若干方程。

3.1.1　完整系统的 Lagrange 方程

这里研究第二类 Lagrange 方程，有多余坐标系统的 Lagrange 方程，准坐标下的 Lagrange 方程，以及耗散函数的 Lagrange 方程。

1. 第二类 Lagrange 方程

设力学系统所受约束是理想、双面、完整的，其位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定。D'Alembert-Lagrange 原理的 Euler-Lagrange 形式为式（2.1.8），即

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+Q_s\right)\delta q_s=0 \tag{3.1.1}$$

其中 T 为系统的动能，Q_s 为广义力。对完整系统来说，δq_s 是彼此独立的，任意的，于是由原理（3.1.1）得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{3.1.2}$$

方程（3.1.2）就是著名的第二类 Lagrange 方程。它对约束是否定常没有限制。

首先，如果广义力是有势的，即存在一函数 $V=V(q_s,t)$，使得

$$Q_s=-\frac{\partial V}{\partial q_s}, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{3.1.3}$$

那么，在引入 Lagrange 函数 $L=T-V$ 后，方程（3.1.2）可写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{3.1.4}$$

其次，如果广义力有广义势，即存在 V，使得

$$Q_s=-\frac{\partial V}{\partial q_s}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_s}, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{3.1.5}$$

那么方程（3.1.2）也可写成形式（3.1.4）。最后，对广义力为非势力的某些系统，也有可能将方程表为形式（3.1.4），但一般说来函数 L 已不再是动能减去势能了。对给定的二阶微分方程组，来构造函数 L 的问题，就是所谓 Lagrange 力学的逆问题[1,2]。

现在将方程（3.1.2）表为显形式。系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i=T_2+T_1+T_0$$

其中

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{ks}\dot{q}_s\dot{q}_k,\quad T_1=\sum_{s=1}^{n}B_s\dot{q}_s$$

$$T_0=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

$$A_{ks}=A_{sk}=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_k},\quad B_s=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial_t}$$

引进 Euler 算子

$$E_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s}\tag{3.1.6}$$

则有

$$E_s(T_2)=\sum_{k=1}^{n}A_{ks}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k\tag{3.1.7}$$

$$E_s(T_1)=\frac{\partial B_s}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k\tag{3.1.8}$$

$$E_s(T_0)=-\frac{\partial T_0}{\partial q_s}\tag{3.1.9}$$

其中

$$[k,m;s]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}+\frac{\partial A_{ms}}{\partial q_k}-\frac{\partial A_{km}}{\partial q_s}\right)\tag{3.1.10}$$

为系数矩阵 $[A_{ks}]$ 的第一类 Christoffel 符号。将式（3.1.7）—（3.1.9）代入 Lagrange 方程（3.1.2），便得

$$\sum_{k=1}^{n}A_{ks}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m$$

$$
=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k-\frac{\partial B_s}{\partial t}
$$

$$
+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k+Q_s, \qquad (s=1,\cdots,n)
$$

(3.1.11)

令矩阵$\|A_{ks}\|$的逆矩阵元素为A_{sl}^{-1}，将方程（3.1.11）两端乘以A_{sl}^{-1}并对s求和，得到

$$
\ddot{q}_l+\sum_{s=1}^{n}A_{sl}^{-1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m
$$

$$
=\sum_{s=1}^{n}A_{sl}^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k-\frac{\partial B_s}{\partial t}\right.
$$

$$
\left.+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k+Q_s\right\}, \qquad (l=1,\cdots,n)
$$

(3.1.12)

特别地，如果矢径$\boldsymbol{r}_i$中不显含时间t，则方程（3.1.11）和（3.1.12）分别为

$$
\sum_{k=1}^{n}A_{ks}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m=Q_s \qquad (3.1.13)
$$

$$
\ddot{q}_l+\sum_{s=1}^{n}A_{sl}^{-1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m=\sum_{s=1}^{n}A_{sl}^{-1}Q_s
$$

(3.1.14)

方程（3.1.11）－（3.1.14）称为Lagrange方程的显式。

例1 Beghin问题

一薄的铅垂矩形平板可无摩擦地绕其对称铅垂轴OZ转动，一质点M可无摩擦地沿平板对角线上的直槽移动。已知平板对轴OZ的转动惯量为J，质点M的质量为m，槽与转轴的夹角为α（$0<\alpha<\pi/2$）。在下列两种情形中研究系统的运动：（1）平板的初角速度$\dot{\psi}_0\neq0$；（2）平板以常角速度ω转动。

（1）取平板转角ψ以及质点M离平板中心的距离r为广义坐标。系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\psi}^2\sin^2\alpha)+\frac{1}{2}J\dot{\psi}^2$$

势能为

$$V=mgr\cos\alpha$$

Lagrange 方程（3.1.4）给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial L}{\partial r}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}-\frac{\partial L}{\partial \psi}=0$$

即

$$m\ddot{r}-mr\dot{\psi}^2\sin^2\alpha+mg\cos\alpha=0 \qquad (a)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(J+mr^2\sin^2\alpha)\dot{\psi}]=0 \qquad (b)$$

由方程（b）得积分

$$(J+mr^2\sin^2\alpha)\dot{\psi}=k=\text{const.} \qquad (c)$$

这就是循环积分。将方程（a）乘以$\dot{r}$，（b）乘以$\dot{\psi}$，然后相加并积分得

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}(J+mr^2\sin^2\alpha)\dot{\psi}^2+mgr\cos\alpha=h=\text{const.} \qquad (d)$$

这就是能量积分。由积分（c）、（d）就可求解运动。

（2）当平板以常角速度ω转动时，系统仅有一个自由度，取广义坐标r。系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\omega^2\sin^2\alpha)+\frac{1}{2}J\omega^2$$

Lagrange 方程（3.1.4）给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial L}{\partial r}=0$$

即

$$m\ddot{r}-mr\omega^2\sin^2\alpha+mg\cos\alpha=0 \qquad (e)$$

积分一次，得

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2-\frac{1}{2}mr^2\omega^2\sin^2\alpha+mgr\cos\alpha=h^*=\text{const.}$$

$$(f)$$

在 $t=0$，$r=r_0$，$\dot{r}=\dot{r}_0$ 下再积分一次，得

$$r=\left(r_0-\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin\alpha}\right)\text{ch}(\omega t\sin\alpha)$$

$$+\frac{\dot{r}_0}{\omega\sin\alpha}\text{sh}(\omega t\sin\alpha)+\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\qquad(g)$$

2.有多余坐标系统的 Lagrange 方程

设完整系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定。为方便计算，选 m 个多余坐标，记作 $q_{n+\nu}$ $(\nu=1,\cdots,m)$，此时有 m 个理想双面完整约束

$$f_\nu(q_s,q_{n+\mu},t)=0,\qquad(\nu,\mu=1,\cdots,m)\qquad(3.1.15)$$

约束（3.1.15）加在坐标变分上的条件为

$$\sum_{u=1}^{n+m}\frac{\partial f_\nu}{\partial q_u}\delta q_u=0\qquad(3.1.16)$$

由原理（3.1.1）和虚位移方程（3.1.16），利用通常的 Lagrange 乘子法，容易得到方程

$$\frac{\text{d}}{\text{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_u}-\frac{\partial T}{\partial q_u}=Q_u+\sum_{\nu=1}^{m}\lambda_\nu\frac{\partial f_\nu}{\partial q_u},\qquad(u=1,\cdots,n+m)$$

$$(3.1.17)$$

方程（3.1.17）称为有多余坐标的完整系统的 Lagrange 方程。它们联同约束（3.1.15），便可确定（$n+m$）个坐标 q_s，$q_{n+\nu}$ 和 m 个乘子 λ_ν。

例 2 一质量为 m 的小珠自由地在一光滑螺线上运动，螺线方程在柱坐标下写成 $r=a$，$z=b\varphi$。重力作用在 z 的正向。质点在点 $r=a$，$\varphi=0$，$z=0$ 处由静止开始运动。试确定螺线加给小珠的反力的 z 分量和 φ 分量。

问题有一个自由度。为确定约束反力，取 z 和 ψ 为广义坐标，即有多余坐标。动能写成

$$T=\frac{1}{2}ma^2\dot{\psi}^2+\frac{1}{2}m\dot{z}^2 \tag{a}$$

约束为

$$z-b\psi=0 \tag{b}$$

有多余坐标的 Lagrange 方程（3.1.17）给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}-\frac{\partial T}{\partial z}=Q_z+\lambda,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}-\frac{\partial T}{\partial \psi}=Q_\psi-\lambda b$$

而

$$Q_z=mg,\ Q_\psi=0$$

于是

$$m\ddot{z}=mg+\lambda,\ ma^2\ddot{\psi}=-\lambda b \tag{c}$$

由式（b）、（c）解得

$$\lambda=-\frac{mga^2}{a^2+b^2}$$

那么约束反力的广义分量为

$$R_z=\lambda=-\frac{mga^2}{a^2+b^2},\ R_\psi=-\lambda b=\frac{mga^2b}{a^2+b^2}$$

设螺线给小珠的反力分量为 F_z 和 F_ψ，则

$$F_z=R_z=-\frac{mga^2}{a^2+b^2},\quad F_\psi=\frac{R_\psi}{r}=\frac{mgab}{a^2+b^2} \tag{d}$$

3. 准坐标下的 Lagrange 方程

为得到完整系统准坐标下的 Lagrange 方程，我们先将 D'Alembert-Lagrange 原理（3.1.1）表为准坐标的形式。取彼此函数独立的准速度

$$\omega_s=\omega_s(q_k,\dot{q}_k,t),\qquad (s,k=1,\cdots,n) \tag{3.1.18}$$

设由此可反解出广义速度

$$\dot{q}_s=\dot{q}_s(q_k,\omega_k,t) \tag{3.1.19}$$

令 T^* 为用准速度表示的动能，即

$$T^*(q_s,\omega_s,t)=T(q_k,\dot{q}_k(q_s,\omega_s,t),t) \tag{3.1.20}$$

取准坐标下的 Euler 算子为

$$E_s^*=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\omega_s}-\frac{\partial}{\partial\pi_s} \tag{3.1.21}$$

命题 1 我们有

$$\sum_{s=1}^{n}E_s^*(T^*)\delta\pi_s=\sum_{s=1}^{n}E_s(T)\delta q_s+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}E_s^*(\dot{q}_k)\delta\pi_s \tag{3.1.22}$$

〔证明〕 由式（3.1.20）得

$$\frac{\partial T^*}{\partial\omega_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\omega_s}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial\pi_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial q_k}\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\omega_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_k}\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\omega_s}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\pi_s}$$

于是有

$$\sum_{s=1}^{n}E_s^*(T^*)\delta\pi_s=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}\right)\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\omega_s}\delta\pi_s$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\omega_s}-\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\pi_s}\right)\delta\pi_s$$

$$=\sum_{k=1}^{n}E_k(T)\delta q_k+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}E_s^*(\dot{q}_k)\delta\pi_s$$

命题 2 我们有

$$\sum_{s=1}^{n}E_s^*(T^*)\delta\pi_s=\sum_{s=1}^{n}E_s(T)\delta q_s$$

$$-\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial\omega_k}E_r(\omega_k)\frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_s}\delta\pi_s \tag{3.1.23}$$

〔证明〕 将式（3.1.19）代入式（3.1.18），得恒等式

$$\omega_s \equiv \omega_s(q_k, \dot{q}_k(q_l, \omega_l, t), t)$$

上式两端对 ω_r 求偏导数，得

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_r}, \quad (r \neq s), \quad 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s}$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_k} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_r} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_k} \tag{3.1.24}$$

类似地，有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \pi_r} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial q_k} \tag{3.1.25}$$

将式（3.1.24）和（3.1.25）代入命题 1，并注意到

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_s} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_k} \tag{3.1.26}$$

便得命题 2。 ‖

根据命题 1，D'Alembert-Lagrange 原理可写成准坐标形式

$$\sum_{s=1}^{n} \left\{ -E_s^*(T^*) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} E_s^*(\dot{q}_k) + P_s^* \right\} \delta \pi_s = 0 \tag{3.1.27}$$

其中

$$P_s^* = \sum_{k=1}^{n} Q_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s} \tag{3.1.28}$$

为准坐标下的广义力。

根据命题 2，D'Alembert-Lagrange 原理可写成

$$\sum_{s=1}^{n} \left\{ -E_s^*(T^*) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} E_r(\omega_k) \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s} + P_s^* \right\} \delta \pi_s = 0 \tag{3.1.29}$$

由原理（3.1.27）中 $\delta\pi_s$ 的彼此独立，得到

$$E_s^*(T^*) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} E_s^*(\dot{q}_k) = P_s^*, \qquad (s=1,\cdots,n)$$

（3.1.30）

此方程可称为完整系统准坐标下的Чаплыгин方程。由原理（3.1.29），得到

$$E_s^*(T^*) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} E_r(\omega_k) \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s} = P_s^*,$$

$$(s=1,\cdots,n) \qquad (3.1.31)$$

此方程可称为完整系统的Boltzmann-Hamel方程。

由方程（3.1.30）和（3.1.31）可以看出，完整系统准坐标下的方程形式上没有广义坐标下的Lagrange方程那样简单。但它们仍有意义。从理论上讲，它们比Lagrange方程更一般，因为当取准速度为广义速度时，它们就是Lagrange方程；从应用上讲，它们在推导像刚体定点转动的Euler动力学方程时，会带来方便。

例3 一质量为 m 的质点 M 在指向定点 O 的有心力作用下在一平面内运动。力的大小为 $f(r)$，其中 r 为 O 和 M 间的距离。研究质点在变量 r，θ，$\dot{r}$ 和 $\dot{A}$ 下的运动方程，其中 r，θ 为点的极坐标，$\dot{A}$ 是面积速度[3]。

取广义坐标 q_1，q_2，准速度 ω_1，ω_2 为

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad \omega_1 = \dot{r}, \quad \omega_2 = \dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

质点的动能

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

用准速度表为

$$T^* = \frac{1}{2} m \left(\omega_1^2 + \frac{4\omega_2^2}{r^2} \right)$$

方程（3.1.30）给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_s}-\frac{\partial T^*}{\partial \pi_s}-\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s}-\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \pi_s}\right)=P_s^*$$

$$(s=1,2) \qquad (a)$$

进行下列计算

$$\frac{\partial T^*}{\partial \omega_1}=m\omega_1,\quad \frac{\partial T^*}{\partial \omega_2}=4m\frac{\omega_2}{r^2}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \pi_1}=\frac{\partial T^*}{\partial r}\frac{\partial \dot{r}}{\partial \omega_1}+\frac{\partial T^*}{\partial \theta}\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \omega_1}=-\frac{4m\omega_2^2}{r^3},\quad \frac{\partial T^*}{\partial \pi_2}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial \omega_1}-\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial \pi_1}=0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_2}{\partial \omega_1}-\frac{\partial \dot{q}_2}{\partial \pi_1}=-\frac{4\omega_2}{r^3},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial \omega_2}-\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial \pi_2}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_2}{\partial \omega_2}-\frac{\partial \dot{q}_2}{\partial \pi_2}=-\frac{4\omega_1}{r^3},\quad P_1^*=Q_1\frac{\partial \dot{r}}{\partial \omega_1}+Q_2\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \omega_1}=Q_r,$$

$$P_2^*=0$$

将这些表达式代入方程（a），简化得

$$m\ddot{r}-\frac{4m\dot{A}}{r^3}=f(r),\quad \dot{A}=0 \qquad (b)$$

可见，$\dot{A}$ 是常数。

4．耗散函数的 Lagrange 方程

考虑系统的每个质点上作用有与其速度相关的阻力

$$\boldsymbol{F}'_i=-k_i f_i(v_i)\frac{\boldsymbol{v}_i}{v_i} \qquad (3.1.32)$$

其中 v_i 为点的速度的大小，k_i 是点的坐标和时间的正函数

$$k_i=k_i(x_j,y_j,z_j,t)>0 \qquad (3.1.33)$$

f_i 满足

$$f_i(v_i)>0 \qquad (3.1.34)$$

与式（3.1.32）相应的广义力为

$$Q_s' = -\sum_{i=1}^{N} k_i f_i(v_i) \frac{\boldsymbol{v}_i}{v_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} = -\sum_{i=1}^{N} k_i f_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_s}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \sum_{i=1}^{N} k_i \int_0^{v_i} f_i(u) \mathrm{d}u \tag{3.1.35}$$

定义 1 函数

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} k_i \int_0^{v_i} f_i(u) \mathrm{d}u \tag{3.1.36}$$

称为 Лурье 耗散函数。

系统所受阻力的广义力用 Лурье 函数表为

$$Q_s' = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s}, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{3.1.37}$$

如果广义力分成有势的 Q_s'' 和与阻力对应的广义力 Q_s'，则 Lagrange 方程写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s}, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{3.1.38}$$

其中 $L = T - V$，$Q_s'' = -\dfrac{\partial V}{\partial q_s}$。

如果阻力大小与速度的 m 次方成比例，即

$$f(v_i) = v_i^m$$

此时有

$$\Phi = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^{N} k_i v_i^{m+1} = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^{N} k_i \left| \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \right|^{m+1} \tag{3.1.39}$$

于是

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s = (m+1)\Phi \tag{3.1.40}$$

假设系统所受约束是定常的，且$\frac{\partial V}{\partial t}=0$。将式（3.1.38）两端乘以$\dot{q}_s$并对$s$求和，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\dot{q}_s=-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s$$

即

$$\frac{\mathrm{d}(T+V)}{\mathrm{d}t}=-(m+1)\Phi<0 \qquad (3.1.41)$$

这说明系统单位时间内减少的总机械能是Лурье函数的$(m+1)$倍。当$m=0$时为干摩擦，当$m=1$时为线性阻尼，当$m=2$时为平方阻尼，等等。

例 4 耗散函数的计算[4]。

研究带平方阻尼的双数学摆问题。设悬挂点以速度$\boldsymbol{v}_0$运动，摆长为l_1和l_2，与铅垂轴夹角为φ_1和φ_2，两质点的质量为m_1和m_2，则两质点的绝对速度平方为

$$v_1^2=v_0^2+l_1^2\dot{\varphi}_1^2+2v_0l_1\dot{\varphi}_1\sin(\alpha-\varphi_1)$$

$$v_2^2=v_1^2+l_2^2\dot{\varphi}_2^2+2v_0l_2\dot{\varphi}_2\sin(\alpha-\varphi_2)+2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

其中α为$\boldsymbol{v}_0$与铅垂轴夹角。此时有

$$\int_0^u f(u)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}u^3$$

Лурье耗散函数为

$$\Phi=\frac{1}{3}k_1v_1^3+\frac{1}{3}k_2v_2^3 \qquad (a)$$

广义力为

$$Q_1'=-\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_1}=-k_1v_1[l_1^2\dot{\varphi}_1+v_0l_1\sin(\alpha-\varphi_1)]$$

$$-k_2v_2[l_1^2\dot{\varphi}_1+v_0l_1\sin(\alpha-\varphi_1)+l_1l_2\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)]$$

$$(b)$$

$$Q_2' = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_2} = -k_2 v_2 [l_2^2 \dot{\varphi}_2 + v_0 l_2 \sin(\alpha - \varphi_2)$$

$$+ l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

在相对平衡时，$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$，广义力为

$$Q_{10}' = (k_1 + k_2) v_0^2 l_1 \sin(\varphi_1^0 - \alpha), \quad Q_{20}' = k_2 v_0^2 l_2 \sin(\varphi_2^0 - \alpha)$$

重力的广义力容易计算得

$$Q_1^* = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin\varphi_1^0, \quad Q_2^* = -m_2 g l_2 \sin\varphi_2^0$$

由平衡方程

$$Q_{10}' + Q_1^* = 0, \quad Q_{20}' + Q_2^* = 0$$

可求得值 φ_1^0 和 φ_2^0：

$$\operatorname{ctg}\varphi_1^0 = \operatorname{ctg}\alpha - \frac{(m_1 + m_2) g}{(k_1 + k_2) v_0^2 \sin\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\varphi_2^0 = \operatorname{ctg}\alpha - \frac{m_2 g}{k_2 v_0^2 \sin\alpha} \tag{c}$$

研究系统在相对平衡位置附近的小振动。令 $\varepsilon_1 = \varphi_1 - \varphi_1^0$，$\varepsilon_2 = \varphi_2 - \varphi_2^0$，并取 $\alpha = \pi/2$，得

$$v_1 = v_0 + l_1 \dot{\varepsilon}_1 \cos\varphi_1^0, \quad v_2 = v_0 + l_1 \dot{\varepsilon}_1 \cos\varphi_1^0 + l_2 \dot{\varepsilon}_2 \cos\varphi_2^0$$

进而有

$$\operatorname{tg}\varphi_1^0 = -\frac{k_1 + k_2}{(m_1 + m_2) g} v_0^2, \quad \operatorname{tg}\varphi_2^0 = -\frac{k_2}{m_2 g} v_0^2$$

因此

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_1^0 \left(1 + \varepsilon_1 \frac{k_1 + k_2}{(m_1 + m_2) g} v_0^2\right),$$

$$\cos\varphi_2 = \cos\varphi_2^0 \left(1 + \varepsilon_2 \frac{k_2}{m_2 g} v_0^2\right),$$

$$\cos(\varphi_1^0 - \varphi_2^0) = \cos\varphi_1^0 \cos\varphi_2^0 \left(1 + \frac{(k_1 + k_2) k_2}{(m_1 + m_2) m_2 g^2} v_0^4\right)$$

将其代入式（b），得

$$Q_1' = -(k_1 + k_2) v_0^2 l_1 \left[\cos\varphi_1^0 \left(1 + \varepsilon_1 \frac{k_1 + k_2}{(m_1 + m_2) g} v_0^2\right)\right.$$

$$+\frac{l_1}{v_0}(1+\cos^2\varphi_1^0)\dot{\varepsilon}_1\Bigg]$$

$$-2k_2v_0l_1l_2\cos\varphi_1^0\cos\varphi_2^0\left[1+\frac{1}{2}\frac{(k_1+k_2)k_2}{(m_1+m_2)m_2g^2}v_0^4\right]\dot{\varepsilon}_2$$

$$Q_2'=-2k_2v_0l_1l_2\cos\varphi_1^0\cos\varphi_2^0\left[1+\frac{1}{2}\frac{(k_1+k_2)k_2}{(m_1+m_2)m_2g^2}v_0^4\right]\dot{\varepsilon}_1$$

$$-k_2v_0^2l_2\left[\cos\varphi_2^0\left(1+\varepsilon_2\frac{k_2}{m_2g}v_0^2\right)+\frac{l_2}{v_0}(1+\cos^2\varphi_2^0)\dot{\varepsilon}_2\right]$$

这些公式在 v_0 异于零并充分大时才有意义。

3.1.2 非完整系统带乘子的 Lagrange 方程

1. 一阶非线性非完整系统带乘子的 Lagrange 方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定，并受到 g 个理想双面非线性非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0,\qquad(\beta=1,\cdots,g;s=1,\cdots,n)\tag{3.1.42}$$

约束（3.1.42）对速度空间虚位移的限制条件为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta\dot{q}_s=0,\qquad(\beta=1,\cdots,g)\tag{3.1.43}$$

Jourdain 原理的 Euler-Lagrange 形式为式（2.1.22），即

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}+Q_s\right)\delta\dot{q}_s=0\tag{3.1.44}$$

由式（3.1.43）和（3.1.44），利用通常的Lagrange乘子法，容易得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s},\qquad(s=1,\cdots,n)\tag{3.1.45}$$

方程（3.1.45）就是一个非线性非完整系统带乘子的Lagrange

方程，亦称Routh方程[5,6]。它们联同约束（3.1.42）便可解出 q_s 和 λ_β。这类方程的缺点在于方程数目比自由度数目多 g 个，其优点是物理意义明显，因为方程右边第二项就是广义约束反力。如果所提问题要求求出约束反力来，那么利用 Routh 方程最合适。

2. 一阶线性非完整系统带乘子的 Lagrange 方程

如果系统所受约束是一阶线性的

$$\sum_{s=1}^{n} a_{\varepsilon+\beta,s}\dot{q}_s + a_{\varepsilon+\beta} = 0, \qquad (\beta = 1, \cdots, g; \varepsilon = n-g) \tag{3.1.46}$$

则

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} = a_{\varepsilon+\beta,s}$$

将此式代入方程（3.1.45），便得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta a_{\varepsilon+\beta,s}, \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{3.1.47}$$

3. 理想约束反力的求法

在 Routh 方程（3.1.45）中出现带不定乘子的约束反力项。我们可在运动微分方程积分之前，将约束反力表为主动力、系统的坐标、速度、质量、时间以及约束系数的函数。这样，就可以简化 Routh 方程。更重要的是，由于分析力学的方法已应用到控制理论中，而在控制理论中特别重要的是希望能够求出约束反力来，以便作为控制程序之用。

寻求约束反力的问题归结为求不定乘子 λ_β 的问题。为此，可将约束方程（3.1.42）对时间求一次导数，得到广义加速度用广义坐标、广义速度及时间表达的关系式；再将 Routh 方程（3.1.45）写成显式，也得到广义加速度用广义速度、广义坐标、时间及不定乘子表达的关系式；最后由这两组关系式中消去

广义加速度，便求得不定乘子 λ_β。

用类似于得到第二类 Lagrange 方程的显式（3.1.12）的方法，可得到方程（3.1.45）的显式为

$$\ddot{q}_l+\sum_{s=1}^{n}A_{sl}^{-1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m$$
$$=\sum_{s=1}^{n}A_{sl}^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k+Q_s-\frac{\partial B_s}{\partial t}+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right\},\qquad (l=1,\cdots,n)$$
$$(3.1.48)$$

将非完整约束方程（3.1.42）对时间 t 求导数，得到

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l}\dot{q}_l+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\ddot{q}_l+\frac{\partial f_\gamma}{\partial t}=0,\qquad (\gamma=1,\cdots,g)$$
$$(3.1.49)$$

将由方程（3.1.48）解得的 $\ddot{q}_l$ 代入式（3.1.49），便得[7]

$$\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}A_{sl}^{-1}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\lambda_\beta+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial f_\gamma}{\partial t}$$
$$+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\sum_{s=1}^{n}A_{sl}^{-1}\left\{-\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k+Q_s+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k\right\}=0,$$
$$(\gamma=1,\cdots,g)\qquad (3.1.50)$$

由此可解出 $\lambda_\beta(\beta=1,\cdots,g)$ 作为广义速度、广义坐标、时间、质量及与约束有关的系数之函数，因而可求出理想约束反力来。

例 5 Appell–Hamel 例

质量为 m 的质点在重力作用下在空间中运动，其运动受有非完整约束

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\frac{a^2}{b^2}\dot{z}^2\qquad (a)$$

Routh 方程（3.1.45）给出

$$m\ddot{x}=2\lambda\dot{x},\ m\ddot{y}=2\lambda\dot{y},\ m\ddot{z}=-mg-2\lambda\frac{a^2}{b^2}\dot{z} \qquad (b)$$

首先研究运动。假设 $\dot{z}>0$。在（b）中消去乘子 λ，得

$$\ddot{x}+\frac{b^2\dot{x}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}=-\frac{gb\dot{x}}{a\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},$$

$$\ddot{y}+\frac{b^2\dot{y}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}=-\frac{gb\dot{y}}{a\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \qquad (c)$$

由此解得

$$\ddot{x}\dot{y}-\dot{x}\ddot{y}=0 \qquad (d)$$

$$\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}=-\frac{gab}{a^2+b^2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \qquad (e)$$

由方程（d）积分得

$$\dot{y}=C\dot{x} \qquad (f)$$

$$y-y_0=C(x-x_0) \qquad (g)$$

其中 C 为积分常数，x_0，y_0 为 x，y 的初值。引入 $v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$，积分方程（$e$）得

$$v=v_0-\frac{gab}{a^2+b^2}t \qquad (h)$$

其中 v_0 为 $t=0$ 时质点速度水平分量的大小。将式（h）代入约束方程（a），并注意 $\dot{z}>0$，则

$$\dot{z}=\frac{b}{a}v=\frac{b}{a}v_0-\frac{gb^2}{a^2+b^2}t \qquad (i)$$

积分得

$$z=z_0+\frac{b}{a}v_0t-\frac{gb^2}{2(a^2+b^2)}t^2 \qquad (j)$$

其中 z_0 为 z 的初值。由式（f）、（h）解得

$$\sqrt{C^2+1}\ \dot{x}=v_0-\frac{gab}{a^2+b^2}t,$$

$$\frac{\sqrt{C^2+1}}{C}\dot{y}=v_0-\frac{gab}{a^2+b^2}t$$

积分之，得

$$\sqrt{C^2+1}\,(x-x_0)=v_0 t-\frac{gab}{2(a^2+b^2)}t^2 \qquad (k)$$

$$\frac{\sqrt{C^2+1}}{C}(y-y_0)=v_0 t-\frac{gab}{2(a^2+b^2)}t^2 \qquad (l)$$

公式（j）、（k）和（l）即为所求运动。

其次，利用方程（3.1.50）求解约束反力。令 $q_1=x$，$q_2=y$，$q_3=z$，则

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2) \qquad (m)$$

故

$$A_{ks}=\begin{cases} m & (k=s) \\ 0 & (k\neq s) \end{cases}, \qquad (k, s=1,2,3)$$

而

$$A^{sl}=\begin{cases} \dfrac{1}{m} & (s=l) \\ 0 & (s\neq l) \end{cases}, \qquad (s, l=1,2,3) \quad (n)$$

以及

$$[k,m;s]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}+\frac{\partial A_{ms}}{\partial q_k}-\frac{\partial A_{km}}{\partial q_s}\right)=0,$$

$$(k, m, s=1,2,3) \qquad (o)$$

由动能表达式得知

$$B_s=T_0=\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}=0 \qquad (p)$$

质点所受约束表为

$$f=\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2-\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_3^2=0$$

于是

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1}=2\dot{q}_1,\ \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_2}=2\dot{q}_2,\ \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_3}=-2\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_s}=0\,(s=1,2,3),\quad \frac{\partial f}{\partial t}=0 \qquad (q)$$

而广义力为

$$Q_1=0,\ Q_2=0,\ Q_3=-mg \tag{r}$$

将式（n）−（r）代入方程（3.1.50），得

$$\lambda m^{-1}\left[(2\dot{q}_1)^2+(2\dot{q}_2)^2+\left(-2\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_3\right)^2\right]$$

$$+m^{-1}\left(-2\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_3\right)(-mg)=0$$

由此解得

$$\lambda=-\frac{mg\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_3}{2\left(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\frac{a^4}{b^4}\dot{q}_3^2\right)} \tag{s}$$

当然，直接由式（b）和（a）也可求得式（s）。 ‖

3.1.3 非完整系统的 Mac-Millan 方程

1．一阶非线性非完整系统的广义 Mac-Millan 方程

设系统受有 g 个理想一阶非线性非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\ \dot{q}_\sigma,\ t),\qquad (\beta=1,\cdots,g;\sigma=1,\cdots,\varepsilon;$$
$$\varepsilon=n-g;s=1,\cdots,n) \tag{3.1.51}$$

令 $(\dot{\boldsymbol{r}}_i)$ 为 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 中借助约束（3.1.51）消去 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 所得表达式，令 $\widetilde{T}$ 为 T 中借助约束（3.1.51）消去 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 所得表达式。

命题 3 我们有

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{E_\sigma(\widetilde{T})-\sum_{i=1}^{N}m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot E_\sigma((\dot{\boldsymbol{r}}_i))\right\}\delta\dot{q}_\sigma \tag{3.1.52}$$

〔证明〕 因

$$\widetilde{T}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}_i)$$

故

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{E_\sigma(\tilde{T})-\sum_{i=1}^{N}m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot E_\sigma((\dot{\boldsymbol{r}}_i))\right\}\delta\dot{q}_\sigma$$

$$=\sum_{i=1}^{N}m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_i)}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i$$

将命题 3 的结果代入原理（2.1.19），便得

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{\tilde{Q}_\sigma-E_\sigma(\tilde{T})+\sum_{i=1}^{N}m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot E_\sigma((\dot{\boldsymbol{r}}_i))\right\}\delta\dot{q}_\sigma=0 \tag{3.1.53}$$

其中

$$\tilde{Q}_\sigma=Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma} \tag{3.1.54}$$

因原理（3.1.53）中的 $\delta\dot{q}_\sigma$ 是彼此独立的，故得

$$E_\sigma(\tilde{T})-\sum_{i=1}^{N}m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot E_\sigma((\dot{\boldsymbol{r}}_i))=\tilde{Q}_\sigma,\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.1.55}$$

方程（3.1.55）就是一阶非线性非完整系统的广义 Mac-Millan 方程[8]。此类方程数目等于系统自由度数目，但计算左边第二项比较麻烦。

2. 一阶线性非完整系统的 Mac-Millan 方程

如果所受约束是一阶线性非完整的，则方程（3.1.55）成为 Mac-Millan 方程[9]。

3.1.4 非完整系统的 Volterra 方程

1. 一阶非线性非完整系统的广义 Volterra 方程

设力学系统由N个质点组成，点的直角坐标为 $x_1,y_1,z_1,\cdots,x_N,y_N,z_N$，点的质量为 $M_1,\cdots,M_N$。令 $\xi_1=x_1$，$\xi_2=y_1$，$\xi_3=z_1$，$\cdots$，$\xi_{3N-2}=x_N$，$\xi_{3N-1}=y_N$，$\xi_{3N}=z_N$；$m_1=m_2=m_3=M_1,\cdots,m_{3N-2}=m_{3N-1}=m_{3N}=M_N$；作用于质点上的主动力为 X_1，X_2，

X_3，…，X_{3N-2}，X_{3N-1}，X_{3N}。这样，Jourdain 原理（2.1.19）可写成形式

$$\sum_{i=1}^{3N}(X_i-m_i\ddot{\xi}_i)\delta\dot{\xi}_i=0 \tag{3.1.56}$$

设系统受有 l 个完整约束

$$F_\alpha(\xi_i,\ t)=0,\qquad (\alpha=1,\ \cdots,\ l;\ i=1,\ \cdots,\ 3N) \tag{3.1.57}$$

以及 g 个非线性非完整约束

$$f_\beta(\xi_i,\ \dot{\xi}_i,\ t)=0,\qquad (\beta=1,\ \cdots,g;\ i=1,\cdots,3N) \tag{3.1.58}$$

将约束（3.1.57）对时间 t 求导数，得

$$\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial F_\alpha}{\partial \xi_i}\dot{\xi}_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial t}=0,\qquad (\alpha=1,\ \cdots,\ l) \tag{3.1.59}$$

引入 $\varepsilon=n-g$ $(n=3N-l)$ 个运动学特性●p_σ，使点的速度表为

$$\dot{\xi}_i=\varphi_i(\xi_j,p_\sigma,t),\qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon;i,j=1,\cdots,3N) \tag{3.1.60}$$

而式（3.1.58）和（3.1.59）成为恒等式。按速度空间虚位移的定义，有

$$\delta\dot{\xi}_i=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_\sigma}\delta p_\sigma \tag{3.1.61}$$

命题 4 我们有

$$\sum_{i=1}^{3N}m_i\ddot{\xi}_i\delta\dot{\xi}_i=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial p_\sigma}-\sum_{i=1}^{3N}m_i\dot{\xi}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_\sigma}\right)\delta p_\sigma \tag{3.1.62}$$

其中 T 为用运动学特性 p_σ 表示的动能。

〔证明〕

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial p_\sigma}-\sum_{i=1}^{3N}m_i\dot{\xi}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_\sigma}\right)\delta p_\sigma$$

● 这里采用 Volterra 的说法，实际上就是准速度。

$$=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{3N} m_i\ddot{\xi}_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_\sigma}\right)\delta p_\sigma=\sum_{i=1}^{3N}m_i\ddot{\xi}_i\delta\dot{\xi}_i \quad .$$ ‖

定义 2　对准坐标 π_σ 的偏导数定义为

$$\frac{\partial}{\partial\pi_\sigma}\triangleq\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_\sigma}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\tag{3.1.63}$$

注意到关系

$$\frac{\partial T}{\partial\pi_\sigma}=\sum_{i=1}^{3N}m_i\dot{\xi}_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial\pi_\sigma}\tag{3.1.64}$$

可由命题 4 得到下述命题。

命题 5　我们有

$$\sum_{i=1}^{3N}m_i\ddot{\xi}_i\delta\dot{\xi}_i=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial\pi_\sigma}-\sum_{i=1}^{3N}m_i\dot{\xi}_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial\pi_\sigma}\right)\right\}\delta p_\sigma\tag{3.1.65}$$

由命题 4 和 5，Jourdain 原理可写成以下两种形式

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial p_\sigma}+\sum_{i=1}^{3N}m_i\dot{\xi}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_\sigma}+E_\sigma\right)\delta p_\sigma=0\tag{3.1.66}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial p_\sigma}+\frac{\partial T}{\partial\pi_\sigma}+\sum_{i=1}^{3N}m_i\dot{\xi}_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial\pi_\sigma}\right)+E_\sigma\right\}\delta p_\sigma=0\tag{3.1.67}$$

其中

$$E_\sigma=\sum_{i=1}^{3N}X_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_\sigma}\tag{3.1.68}$$

据 δp_σ 的独立性，由原理（3.1.66）得到第一形式的广义 Volterra 方程[10,7]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial p_\sigma}-\sum_{i=1}^{3N}m_i\xi_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_\sigma}=E_\sigma,\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)$$

（3.1.69）

而由原理（3.1.67）得到第二形式的广义 Volterra 方程[10,7]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial \pi_\sigma}-\sum_{i=1}^{3N}m_i\xi_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial\pi_\sigma}\right)$$

$$=E_\sigma,\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\qquad(3.1.70)$$

方程（3.1.69）比(3.1.70)简单，方程(3.1.70)比(3.1.69)更有对称性。这两类方程中没有广义坐标，是由直角坐标向准坐标的过渡，因此不同于下面论及的 Boltzmann-Hamel 方程。

2．一阶线性非完整系统 Volterra 方程的四种形式

取运动学特性 p_σ 使

$$\xi_i=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\xi_{i\sigma}p_\sigma$$

其中系数 $\xi_{i\sigma}$ 仅为坐标的函数。此时方程(3.1.70)给出 Volterra 方程的第一种形式[11]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial \pi_\sigma}-\sum_{i=1}^{3N}m_i\xi_i\sum_{j=1}^{3N}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial\xi_{i\sigma}}{\partial\xi_j}\xi_{j\nu}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\xi_{i\nu}}{\partial\xi_j}\xi_{j\sigma}\right)p_\nu=E_\sigma,\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)$$

（3.1.71）

引入记号

$$b_{\sigma\nu}^{(r)}=\sum_{i=1}^{3N}\sum_{j=1}^{3N}m_i\xi_{ir}\frac{\partial\xi_{i\sigma}}{\partial\xi_j}\xi_{j\nu}$$

则方程（3.1.71）成为 Volterra 方程的第二种形式[12]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial \pi_\sigma}-\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\sum_{r=1}^{\varepsilon}(b_{\sigma\nu}^{(r)}-b_{\nu\sigma}^{(r)})p_rp_\nu=E_\sigma,$$

$$(\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.1.72}$$

再令

$$a_{\sigma\nu}^{(u)}=\sum_{h=1}^{\varepsilon}e_{hu}(b_{\sigma\nu}^{(h)}-b_{\nu\sigma}^{(h)}),\qquad \sum_{u=1}^{\varepsilon}e_{hu}E_{ur}=\begin{cases}1 & (h=r)\\ 0 & (h\neq r)\end{cases},$$

$$E_{ur}=\sum_{i=1}^{3N}m_i\xi_{iu}\xi_{ir} \tag{3.1.73}$$

则方程（3.1.72）成为 Volterra 方程的第三种形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial \pi_\sigma}=\sum_{r=1}^{\varepsilon}\sum_{u=1}^{\varepsilon}a_{\sigma r}^{(u)}\frac{\partial T}{\partial p_u}p_r+E_\sigma,$$

$$(\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.1.74}$$

这方程就是 Volterra 原来的方程[13]。

在一阶线性非完整约束下，第一形式的广义 Volterra 方程（3.1.69）给出 Volterra 方程的第四种形式[14]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial p_\sigma}-\sum_{r=1}^{\varepsilon}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}b_{\sigma\nu}^{(r)}p_\nu p_r=E_\sigma,\qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.1.75}$$

3.1.5 非完整系统的 Чаплыгин 方程

1. 一阶非线性非完整系统的广义 Чаплыгин 方程

设力学系统受有 g 个理想一阶非线性非完整约束（3.1.51）。令 $\tilde{T}$ 为 T 中借助约束（3.1.51）消去 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 所得表达式。

命题 6 我们有

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big\{E_\sigma(\tilde{T})-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}E_\sigma(\varphi_\beta)$$

$$-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\Big\}\delta\dot{q}_\sigma \tag{3.1.76}$$

〔证明〕

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{E_\sigma(\tilde{T})-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}E_\sigma(\varphi_\beta)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\right\}\delta\dot{q}_\sigma$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}$$

$$\left.-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\right\}\delta\dot{q}_\sigma$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{E_\sigma(T)+\sum_{\beta=1}^{g}E_{\varepsilon+\beta}(T)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\right\}\delta\dot{q}_\sigma=\sum_{s=1}^{n}E_s(T)\delta\dot{q}_s$$

利用式（2.1.21），便得结论。

选取彼此函数独立的准速度 ω_σ，使得广义速度表为

$$\dot{q}_s=\varphi_s(q_k,\omega_\sigma,t),\qquad (s,k=1,\cdots,n;\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.1.77}$$

此时约束方程（3.1.42）成为恒等式。令 T^* 为 T 中借助式（3.1.77）消去 $\dot{q}_s$ 所得表达式。

命题 7 我们有

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{E_\sigma^*(T^*)-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}E_\sigma^*(\varphi_s)\right\}\delta\omega_\sigma \tag{3.1.78}$$

〔证明〕

$$\text{右端}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial\omega_\sigma}-\frac{\partial T^*}{\partial\pi_\sigma}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_s}{\partial\omega_\sigma}-\frac{\partial\varphi_s}{\partial\pi_\sigma}\right)\right\}\delta\omega_\sigma$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{\sum_{s=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial\omega_\sigma}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_s}{\partial\omega_\sigma}\right.$$

$$-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial\omega_\sigma}-\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial q_s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial\omega_\sigma}$$

$$\left.-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_s}{\partial\omega_\sigma}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial\pi_\sigma}\right\}\delta\omega_\sigma$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\frac{\partial \varphi_s}{\partial \omega_\sigma}\delta\omega_\sigma=\sum_{s=1}^{n}E_s(T)\delta\dot{q}_s$$

$$=\text{左端}$$

将式（3.1.76）代入 Jourdain 原理（2.1.19），得到

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{-E_\sigma(\widetilde{T})+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}E_\sigma(\varphi_\beta)+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}+\widetilde{Q}_\sigma\right\}\delta\dot{q}_\sigma=0 \tag{3.1.79}$$

由 $\delta\dot{q}_\sigma$ 的独立性，得到非线性非完整系统广义坐标下的广义 Чаплыгин 方程[6]

$$E_\sigma(\widetilde{T})-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}E_\sigma(\varphi_\beta)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}=\widetilde{Q}_\sigma$$

$$(\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.1.80}$$

或写成形式[15]

$$E_\sigma(\widetilde{T})-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}T_\sigma^{\varepsilon+\beta}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}=\widetilde{Q}_\sigma,$$

$$(\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.1.81}$$

其中 $T_\sigma^{\varepsilon+\beta}$ 由式（2.4.11）确定。

将式（3.1.78）代入 Jourdain 原理（2.1.19），得到

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{-E_\sigma^*(T^*)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}E_\sigma^*(\varphi_s)+P_\sigma^*\right\}\delta\omega_\sigma=0 \tag{3.1.82}$$

由 $\delta\omega_\sigma$ 的独立性，得到非线性非完整系统准坐标下的广义 Чаплыгин 方程[15]

$$E_\sigma^*(T^*)-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}E_\sigma^*(\varphi_s)=P_\sigma^*,\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.1.83}$$

其中

$$P_\sigma^* = \sum_{s=1}^{n} Q_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial \omega_\sigma} \tag{3.1.84}$$

准坐标下的方程（3.1.83）比广义坐标下的方程（3.1.80）更一般，因为当取准速度为广义速度时，方程（3.1.83）给出方程（3.1.80）。

2. Воронец 方程

现在研究方程（3.1.81）的一个特殊情形。在此情形下，非完整约束是线性的，有

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} B_{\varepsilon+\beta,\sigma} \dot{q}_\sigma - B_{\varepsilon+\beta}, \qquad (\beta = 1, \cdots, g;\ \varepsilon = n - g) \tag{3.1.85}$$

其中系数 $B_{\varepsilon+\beta,\sigma}, B_{\varepsilon+\beta}$ 为所有坐标和时间的函数。容易计算得

$$T_\sigma^{\varepsilon+\beta} = \sum_{\nu=1}^{\varepsilon} A_{\sigma\nu}^{\varepsilon+\beta} \dot{q}_\nu + A_\sigma^{\varepsilon+\beta} \tag{3.1.86}$$

其中

$$A_{\sigma\nu}^{\varepsilon+\beta} = \frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu} - \frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma} + \sum_{\gamma=1}^{g} \left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}} B_{\varepsilon+\gamma,\nu} - \frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}} B_{\varepsilon+\gamma,\sigma} \right) \tag{3.1.87}$$

$$A_\sigma^{\varepsilon+\beta} = \frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial t} - \frac{\partial B_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma}$$

将式（3.1.86）代入方程（3.1.81），得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_\sigma} - \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} \left(\sum_{\nu=1}^{\varepsilon} A_{\sigma\nu}^{\varepsilon+\beta} \dot{q}_\nu + A_\sigma^{\varepsilon+\beta} \right) - \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} B_{\varepsilon+\beta,\sigma} = \tilde{Q}_\sigma, \qquad (\sigma = 1, \cdots, \varepsilon) \tag{3.1.88}$$

方程（3.1.88）就是一阶非完整系统的Воронец 方程[16]，它适

合于一般的线性非完整约束系统。

3. Чаплыгин 方程

如果非完整约束是线性、齐次、定常的，且 $B_{\varepsilon+\beta,\sigma}$ 中不含 $q_{\varepsilon+\nu}$，系统动能 T 不含 $q_{\varepsilon+\beta}$，广义力有势，且势能不含 $q_{\varepsilon+\beta}$，那么 Воронец 方程给出原来的 Чаплыгин 方程[12]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}\right)\dot{q}_\nu$$

$$=-\frac{\partial V}{\partial q_\sigma},\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\qquad(3.1.83)$$

4. 准坐标下的 Чаплыгин 方程

现在研究方程（3.1.83）的一个特殊情形。在此情形下，非完整约束是线性、齐次、定常的，且约束系数不含 $q_{\varepsilon+\beta}$，于是广义速度可表为

$$\dot{q}_s=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}b_{s\sigma}\omega_\sigma$$

其中 $b_{s\sigma}$ 仅为 $q_\nu(\nu=1,\cdots,\varepsilon)$ 的函数。容易计算得

$$E_\sigma^*(\varphi_s)=\dot{b}_{s\sigma}-\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\frac{\partial b_{s\nu}}{\partial\pi_\sigma}\omega_\nu=\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial b_{s\sigma}}{\partial\pi_\nu}-\frac{\partial b_{s\nu}}{\partial\pi_\sigma}\right)\omega_\nu$$

于是方程（3.1.83）给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial\omega_\sigma}-\frac{\partial T^*}{\partial\pi_\sigma}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial b_{s\sigma}}{\partial\pi_\nu}-\frac{\partial b_{s\nu}}{\partial\pi_\sigma}\right)\omega_\nu=P_\sigma^*,$$

$$(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\qquad(3.1.90)$$

方程（3.1.90）称为准坐标下的 Чаплыгин 方程[12]。

例 6　Чаплыгин-Carathéodory 问题

设物体 A 的质量为 m，它对过其质心的铅垂轴的转动惯量为 J_c。质心在平面上的投影为 C，且 $CP=a$；CP 与 ox 轴夹角为 θ。P 为接触点，它的坐标为 x,y。物体所受约束为

$$\dot{y}-\dot{x}\mathrm{tg}\theta=0\qquad(a)$$

不计非完整约束时，系统动能为

$$T=\frac{1}{2}J_c\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m[(\dot{x}-a\dot{\theta}\sin\theta)^2+(\dot{y}+a\dot{\theta}\cos\theta)^2]$$

$$(b)$$

考虑到约束（a）后，有

$$\tilde{T}=\frac{1}{2}m\frac{\dot{x}^2}{\cos^2\theta}+\frac{1}{2}(J_c+ma^2)\dot{\theta}^2 \qquad (c)$$

令 $q_1=x$，$q_2=\theta$，$q_3=y$，由式（a）知

$$B_{31}=\operatorname{tg}q_2,\ B_{32}=0 \qquad (d)$$

假设物体A除受重力外，不受任何主动力作用，则

$$Q_1=Q_2=Q_3=0 \qquad (e)$$

Чаплыгин 方程（3.1.89）给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_3}\sum_{\nu=1}^{2}\left(\frac{\partial B_{3\sigma}}{\partial q_\nu}-\frac{\partial B_{3\nu}}{\partial q_\sigma}\right)\dot{q}_\nu=\tilde{Q}_\sigma,$$

$$(\sigma=1,2) \qquad (f)$$

将式（c）、（d）和（e）代入方程（f），得

$$\ddot{x}\cos\theta+\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta-a\dot{\theta}^2\cos^2\theta=0 \qquad (g)$$

$$(J_c+ma^2)\ddot{\theta}+\frac{ma\dot{x}\dot{\theta}}{\cos\theta}=0$$

令 $\dot{x}=v\cos\theta$，$\dot{y}=v\sin\theta$，则方程（g）成为

$$m\dot{v}-ma\dot{\theta}^2=0,\ (J_c+ma^2)\ddot{\theta}+mav\dot{\theta}=0 \qquad (h)$$

将方程（h）的第一式乘以 v，第二式乘以 $\dot{\theta}$，然后相加，积分之，得

$$mv^2+(J_c+ma^2)\dot{\theta}^2=2h \qquad (i)$$

这就是能量积分。将式（i）代入式（h）的第一式并消去 $\dot{\theta}^2$，得

$$m\dot{v}-ma\frac{2h-mv^2}{J_c+ma^2}=0$$

令$\dfrac{2h}{m}=v_0^2$，$\dfrac{J_c+ma^2}{ma}=b$，则有

$$\dot{v}=\frac{1}{b}(v_0^2-v^2)$$

令 $t=0$ 时，$v=0$，积分上式，得

$$v=v_0\text{th}\left(\frac{v_0}{b}t\right) \tag{j}$$

将式（j）代入式（i），得

$$\dot{\theta}^2=\frac{m}{J_c+ma^2}\frac{v_0^2}{\text{ch}^2\left(\frac{v_0}{b}t\right)}$$

于是

$$\theta=v_0\sqrt{\frac{m}{J_c+ma^2}}\int\frac{\mathrm{d}t}{\text{ch}^2\left(\frac{v_0}{b}t\right)} \tag{k}$$

由此得 $\theta=\theta(t)$，代入式（j）得 $v=v(t)$，再代入 $\dot{x}=v\cos\theta$，$\dot{y}=v\sin\theta$，便可解得 $x=x(t)$，$y=y(t)$。

以上问题称为Чаплыгин问题。如果物体 A 质心在平面上的投影不在冰刀方向，则为Carathéodory问题。‖

3.1.6 非完整系统的Boltzmann-Hamel方程

1. 一阶非线性非完整系统的Boltzmann-Hamel方程

用类似于得到原理（3.1.29）的方法，Jourdain原理可表为准坐标形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{-E_s^*(T^*)-\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial\omega_k}E_r(\omega_k)\frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_s}+P_s^*\right\}\delta\omega_s=0 \tag{3.1.91}$$

其中准速度与广义速度之间的关系由式（3.1.18）和（3.1.19）给出。若系统受有 g 个理想一阶非线性非完整约束（3.1.42），可选后面 g 个准速度为

$$\omega_{\epsilon+\beta}=f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)$$

按式（3.1.42），有

$$\omega_{\varepsilon+\beta}=0 \tag{3.1.92}$$

$$\delta\omega_{\varepsilon+\beta}=0 \tag{3.1.93}$$

将式（3.1.93）代入原理（3.1.91），并注意到$\delta\omega_{\sigma}$的独立性，得到

$$E_{\sigma}^{*}(T^{*})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial T^{*}}{\partial\omega_{k}}E_{r}(\omega_{k})\frac{\partial\dot{q}_{r}}{\partial\omega_{\sigma}}=P_{\sigma}^{*},\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.1.94}$$

这就是一阶非线性非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程[18]。需要注意的是，条件（3.1.92）仅在计算$\frac{\partial T^{*}}{\partial\omega_{k}}$之后才可应用。

Boltzmann-Hamel 方程不同于准坐标下的广义 Чаплыгин 方程，后者只需将广义速度用准速度表出，而前者还需要准速度用广义速度表出。

2．一阶线性非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程

现在研究 Boltzmann-Hamel 方程的一个特殊情形。在此情形下，有

$$\omega_{s}=\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\dot{q}_{k}+a_{s},\qquad \dot{q}_{r}=\sum_{k=1}^{n}b_{rk}\omega_{k}+b_{r}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n}E_{r}(\omega_{k})\frac{\partial\dot{q}_{r}}{\partial\omega_{\sigma}}=&\sum_{r=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{kr}}{\partial q_{m}}-\frac{\partial a_{km}}{\partial q_{r}}\right)b_{ms}b_{r\sigma}\omega_{s}\\&+\sum_{r=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{kr}}{\partial q_{m}}-\frac{\partial a_{km}}{\partial q_{r}}\right)b_{r\sigma}b_{m}\\&+\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{kr}}{\partial t}-\frac{\partial a_{k}}{\partial q_{r}}\right)b_{r\sigma}\\=&\sum_{s=1}^{n}\gamma_{s\sigma}^{k}\omega_{s}+\epsilon_{\sigma}^{k}=\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\gamma_{\nu\sigma}^{k}\omega_{\nu}+\epsilon_{\sigma}^{k}\end{aligned}$$

因此，Boltzmann-Hamel 方程（3.1.94）成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_\sigma}-\frac{\partial T^*}{\partial \pi_\sigma}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\gamma^k_{\nu\sigma}\omega_\nu+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\varepsilon^k_\sigma=P^*_\sigma,$$

$$(\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.1.95}$$

例 7　圆环在粗糙水平面上的纯滚动

取圆环质心坐标 x, y 以及三个 Euler 角 ψ，θ，φ 为广义坐标，取准速度为

$$\omega_1=\dot{\theta},\quad \omega_2=\dot{\psi}\sin\theta,\quad \omega_3=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi},$$
$$\omega_4=\dot{x}\cos\psi+\dot{y}\sin\psi+a(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}) \tag{a}$$
$$\omega_5=-\dot{x}\sin\psi+\dot{y}\cos\psi+a\dot{\theta}\sin\theta$$

其中 a 为圆环半径。非完整约束为

$$\omega_4=\omega_5=0 \tag{b}$$

由式（a）解出广义速度

$$\dot{\theta}=\omega_1,\quad \dot{\psi}=\frac{\omega_2}{\sin\theta},\quad \dot{\varphi}=\omega_3-\omega_2\mathrm{ctg}\theta$$
$$\dot{x}=(\omega_4-a\omega_3)\cos\psi-(\omega_5-a\omega_1\sin\theta)\sin\psi \tag{c}$$
$$\dot{y}=(\omega_4-a\omega_3)\sin\psi+(\omega_5-a\omega_1\sin\theta)\cos\psi$$

令 $q_1=\theta, q_2=\psi, q_3=\varphi, q_4=x, q_5=y$，系数 a_{sk}, b_{lm} 由式（a）、（c）给出。计算 Boltzmann 三标记号，有

$$\gamma^1_{\nu\sigma}=\sum_{k=1}^{5}\sum_{r=1}^{5}\left(\frac{\partial a_{1k}}{\partial q_r}-\frac{\partial a_{1r}}{\partial q_k}\right)b_{r\nu}b_{k\sigma}=0,$$

$$\gamma^2_{\nu\sigma}=\frac{\partial a_{22}}{\partial q_1}b_{1\nu}b_{2\sigma}-\frac{\partial a_{22}}{\partial q_1}b_{2\nu}b_{1\sigma},\quad \gamma^2_{12}=-\gamma^2_{21}=\mathrm{ctg}\theta,$$

其余 $\gamma^2_{\nu\sigma}=0$

$$\gamma^3_{\nu\sigma}=\frac{\partial a_{32}}{\partial q_1}(b_{1\nu}b_{2\sigma}-b_{2\nu}b_{1\sigma}),\quad \gamma^3_{21}=-\gamma^3_{12}=1,\ \text{其余}\ \gamma^3_{\nu\sigma}=0,$$

$$\tag{d}$$

$$\gamma^4_{\nu\sigma}=0$$

$$\gamma^5_{\nu\sigma}=\frac{\partial a_{54}}{\partial q_2}(b_{2\nu}b_{4\sigma}-b_{4\nu}b_{2\sigma})+\frac{\partial a_{55}}{\partial q_2}(b_{2\nu}b_{5\sigma}-b_{5\nu}b_{2\sigma}),$$

$$\gamma_{23}^{5}=-\gamma_{32}^{5}=\frac{a}{\sin\theta},\ \text{其余}\ \gamma_{\nu\sigma}^{k}=0$$

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{1}{2}[A(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta)+C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)^2]$$

其中m为圆环的质量，A，C为惯性矩。注意到$z=a\sin\theta$，有

$$T^*=\frac{1}{2}m\{(\omega_4-a\omega_3)^2+(\omega_5-a\omega_1\sin\theta)^2+a^2\omega_1^2\cos^2\theta\}$$

$$+\frac{1}{2}[A(\omega_1^2+\omega_2^2)+C\omega_3^2]$$

对圆环有$C=2A=ma^2$，于是

$$T^*=\frac{1}{2}m\left\{a^2\left(\frac{3}{2}\omega_1^2+\frac{1}{2}\omega_2^2+2\omega_3^2\right)-2a\omega_3\omega_4-2a\omega_1\omega_5\sin\theta+\omega_4^2+\omega_5^2\right\}\tag{e}$$

Boltzmann-Hamel方程（3.1.95）给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial\omega_\sigma}-\frac{\partial T^*}{\partial\pi_\sigma}+\sum_{k=1}^{5}\frac{\partial T^*}{\partial\omega_k}\sum_{\nu=1}^{3}\gamma_{\nu\sigma}^{k}\omega_\nu=P_\sigma^*,\quad(\sigma=1,2,3)\tag{f}$$

由式(e)知

$$\frac{\partial T^*}{\partial\pi_1}=\sum_{s=1}^{5}\frac{\partial T^*}{\partial q_s}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\omega_1}=-m\omega_1\omega_5\cos\theta=0,\tag{g}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial\pi_2}=\frac{\partial T^*}{\partial\pi_3}=0$$

设圆环仅受重力作用，则主动力的元功为

$$\delta W=-mg\delta z=-mga\cos\theta\,\delta\pi_1$$

故

$$P_1^*=-mga\cos\theta,\ P_2^*=P_3^*=0\tag{h}$$

将式(d)、(e)、(g)和(h)代入方程(f)，并简化得

$$\frac{3}{2}\dot{\omega}_1-\frac{1}{2}\omega_2^2\mathrm{ctg}\theta+2\omega_2\omega_3=-\frac{g}{a}\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}\dot{\omega}_2+\frac{1}{2}\omega_2\omega_1\mathrm{ctg}\theta-\omega_1\omega_3=0,\quad 2\dot{\omega}_3-\omega_2\omega_1=0 \qquad (i)$$

这就是所求圆环的运动微分方程。

3.1.7 高阶非完整系统的 Euler-Lagrange 形式的方程

1. Routh 型方程

万有 D'Alembert 原理的 Euler-Lagrange 形式为式 (2.1.35)，即

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+Q_s\right)\delta \overset{(m)}{q}_s=0 \qquad (3.1.96)$$

设所受约束表为

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m)}{q}_s,t)=0,\qquad (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n) \qquad (3.1.97)$$

约束 (3.1.97) 加在虚位移 $\delta\overset{(m)}{q}_s$ 上的条件为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\delta\overset{(m)}{q}_s=0 \qquad (3.1.98)$$

由式 (3.1.96) 和 (3.1.98)，利用通常的 Lagrange 乘子法容易得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_s},\qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (3.1.99)$$

方程 (3.1.99) 可称为高阶非完整系统的 Routh 方程。

2. 广义 Lagrange 型方程

引进广义 Euler 算子

$$E_s^m=m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \overset{(m)}{q}_s}-\frac{\partial}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s},\qquad (s=1,\cdots,n;\ m=1,2,\cdots) \qquad (3.1.100)$$

命题 8 我们有

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \overset{(m)}{\boldsymbol{r}_i} = \sum_{s=1}^{n} E_s^m(\overset{(m-1)}{T}) \delta \overset{(m)}{q_s} \tag{3.1.101}$$

〔证明〕 由式（2.1.40）和（2.1.42），有

$$\sum_{s=1}^{n} E_s^m(\overset{(m-1)}{T}) \delta \overset{(m)}{q_s} = \sum_{s=1}^{n} \left\{ m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} - \frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}} \right\} \delta \overset{(m)}{q_s}$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \left\{ m \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \right] \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \overset{(m)}{\boldsymbol{r}_i}}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}} - (m-1) \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \overset{(m-1)}{\boldsymbol{r}_i}}{\partial q_s} \right\} \delta \overset{(m)}{q_s}$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \delta \overset{(m)}{q_s} = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \overset{(m)}{\boldsymbol{r}_i}$$

由命题 8 可将万有 D'Alembert 原理写成

$$\sum_{s=1}^{n} \left\{ -E_s^m(\overset{(m-1)}{T}) + Q_s \right\} \delta \overset{(m)}{q_s} = 0 \tag{3.1.102}$$

由式（3.1.102）和（3.1.98），利用通常的 Lagrange 乘子法容易得到

$$m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} - \frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}} = Q_s + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \overset{(m)}{q_s}},$$

$$(s=1,\cdots,n;\ m=1,2,\cdots) \tag{3.1.103}$$

现在导出不带乘子的方程。设由约束（3.1.97）可解出后面 g 个 $\overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}$

$$\overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta} = \varphi_\beta(q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(m-1)}{q_s}, \overset{(m)}{q_\sigma}, t),$$

$$(\beta=1,\cdots,g;\ \sigma=1,\cdots,\epsilon;\ \epsilon=n-g;\ s=1,\cdots,n) \tag{3.1.104}$$

令 $\overset{(m-1)}{\tilde{T}}$ 为 $\overset{(m-1)}{T}$ 中借助关系（3.1.104）消去 $\overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}$ 所得表达式，则

$$\frac{\partial \overset{(m-1)}{\tilde{T}}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}} = \frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}} + \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}},$$

$$\frac{\partial \overset{(\widetilde{m-1})}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}=\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}$$

定义 3　定义广义 Euler 算子为

$$E_\sigma^m=m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}-\frac{\partial}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma},\qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\quad (3.1.105)$$

当 $m=1$ 时，式（3.1.105）给出通常的 Euler 算子。

利用算子（3.1.105），有

$$E_\sigma^m(\overset{(\widetilde{m-1})}{T})=E_\sigma^m(\overset{(m-1)}{T})+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}E_\sigma^m(\varphi_\beta)$$

$$+\sum_{\beta=1}^{g}E_{\varepsilon+\beta}^m(\overset{(m-1)}{T})\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}\quad (3.1.106)$$

由此，考虑到

$$\overset{(m)}{\delta} q_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}\overset{(m)}{\delta} q_\sigma\quad (3.1.107)$$

则由命题 8 得到下述命题。

命题 9　我们有

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\overset{(m)}{\delta}\boldsymbol{r}_i=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big\{E_\sigma^m(\overset{(\widetilde{m-1})}{T})-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}E_\sigma^m(\varphi_\beta)$$

$$-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}\Big\}\overset{(m)}{\delta} q_\sigma\quad (3.1.108)$$

由命题 9，可将万有 D'Alembert 原理写成

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big\{-E_\sigma^m(\overset{(\widetilde{m-1})}{T})+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}E_\sigma^m(\varphi_\beta)$$

$$+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}+\tilde{Q}_\sigma\Big\}\overset{(m)}{\delta} q_\sigma=0\quad (3.1.109)$$

其中

$$\tilde{Q}_\sigma = Q_\sigma + \sum_{\beta=1}^{g} Q_{\varepsilon+\beta} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} \qquad (3.1.110)$$

由原理（3.1.109），考虑到 $\delta \overset{(m)}{q}_\sigma$ 的独立性，得到[19]

$$E_\sigma^m(\overset{(\widetilde{m-1})}{T}) - \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}} E_\sigma^m(\varphi_\beta) - \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\varepsilon+\beta}} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}$$

$$= \tilde{Q}_\sigma, \quad (\sigma = 1, \cdots, \varepsilon) \qquad (3.1.111)$$

方程(3.1.111)可称为高阶非完整系统广义坐标下的广义 Чаплыгин 方程。当 $m=1$ 时，方程（3.1.111）成为方程(3.1.80)。

下面研究准坐标下的方程。选彼此函数独立的 $\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma$，使得

$$\overset{(m)}{q}_s = \varphi_s(q_k, \dot{q}_k, \cdots, \overset{(m-1)}{q}_k, \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma, t),$$

$$\begin{pmatrix} s, k = 1, \cdots, n; \ \sigma = 1, \cdots, \varepsilon; \\ \varepsilon = n - g; \ m = 1, 2, \cdots \end{pmatrix} \qquad (3.1.112)$$

此时约束方程（3.1.97）成为恒等式。令 $\overset{(m-1)}{T}{}^*$ 为 $\overset{(m-1)}{T}$ 中借助式(3.1.112)消去 $\overset{(m)}{q}_s$ 所得表达式。

定义 4 定义准坐标下的广义 Euler 算子为

$$E_\sigma^{m*} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma} - \frac{\partial}{\partial \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}, \qquad (\sigma = 1, \cdots, \varepsilon; \ m = 1, 2, \cdots)$$

$$(3.1.113)$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma} \triangleq \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma} \frac{\partial}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s} \qquad (3.1.114)$$

当 $m=1$ 时，式（3.1.113）给出通常准坐标下的 Euler 算子。

命题 10 我们有

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \left\{ E_\sigma^{m*}(\overset{(m-1)}{T}{}^*) - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s} E_\sigma^{m*}(\varphi_s) \right\} \delta \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma$$

$$(3.1.115)$$

〔证明〕

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{E_\sigma^{m*}(\overset{(m-1)}{T}{}^{*})-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}E_\sigma^{m*}(\varphi_s)\right\}\delta\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{m\sum_{s=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}+m\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}\right.$$

$$-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}-\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}$$

$$\left.-m\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}\right\}\delta\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\sum_{s=1}^{n}\left(m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}-\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}\right)\frac{\partial\varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}\delta\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma$$

$$=\sum_{s=1}^{n}E_s^m(\overset{(m-1)}{T})\delta\overset{(m)}{q}_s$$

由命题 8 便得结论。 ▮

利用命题 10，万有 D'Alembert 原理可写成准坐标形式

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{-E_\sigma^{m*}(\overset{(m-1)}{T}{}^{*})+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}E_\sigma^{m*}(\varphi_s)+P_\sigma^*\right\}\delta\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma=0 \tag{3.1.116}$$

其中

$$P_\sigma^*=\sum_{s=1}^{n}Q_s\frac{\partial\varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma} \tag{3.1.117}$$

由原理（3.1.116)中 $\delta\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma$ 的独立性，得到

$$E_\sigma^{m*}(\overset{(m-1)}{T}{}^{*})-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}E_\sigma^{m*}(\varphi_s)=P_\sigma^*,$$

$$(\sigma=1,\cdots,\varepsilon;\ m=1,2,\cdots) \tag{3.1.118}$$

方程(3.1.118) 称为高阶非完整系统准坐标下的广义 Чаплыгин 方程。当 $m=1$ 时，方程（3.1.118）成为方程（3.1.83）。

§3.2 Nielsen 体系的方程

3.2.1 完整系统的 Nielsen 方程

1. 广义坐标下的 Nielsen 方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定。

定义 1 对任何动力学函数 $f(q_s,\dot{q}_s,t)$，定义 Nielsen 算子为[20]

$$N_s=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-2\frac{\partial}{\partial q_s},\qquad (s=1,\cdots,n) \tag{3.2.1}$$

D'Alembert–Lagrange 原理可写成 Nielsen 形式（2.1.15），即

$$\sum_{s=1}^{n}\{-N_s(T)+Q_s\}\delta q_s=0 \tag{3.2.2}$$

因对完整系统 δq_s 彼此独立，故得

$$N_s(T)=Q_s,\quad (s=1,\cdots,n) \tag{3.2.3}$$

即

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_s}-2\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s,\qquad (s=1,\cdots,n) \tag{3.2.4}$$

方程(3.2.4)就是完整系统广义坐标下的 Nielsen 方程[21]。这类方程对约束的要求是双面、理想、完整的，不论约束是否定常，也不论广义力是否有势，它们都成立。Nielsen 方程(3.2.4)同 Lagrange 方程（3.1.2）一样，也是建立完整约束系统广义坐标中动力学方程的一种规则。

2. 准坐标下的 Nielsen 方程

选取 n 个彼此函数独立的准速度

$$\omega_s=\omega_s(q_k,\dot{q}_k,t),\qquad (s,k=1,\cdots,n) \tag{3.2.5}$$

设由此可解出广义速度

$$\dot{q}_s=\dot{q}_s(q_k,\omega_k,t),\qquad (s,k=1,\cdots,n) \tag{3.2.6}$$

将式（3.2.6）对时间 t 求导数，得

$$\ddot{q}_s=\ddot{q}_s(q_k,\omega_k,\dot{\omega}_k,t) \tag{3.2.7}$$

其中

$$\ddot{q}_s=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial q_k}\dot{q}_k(q_r,\omega_r,t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\omega_k}\dot{\omega}_k+\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial t} \tag{3.2.8}$$

将式（3.2.5）对时间 t 求导数，得

$$\dot{\omega}_s=\dot{\omega}_s(q_k,\dot{q}_k,\ddot{q}_k,t) \tag{3.2.9}$$

其中

$$\dot{\omega}_s=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\omega_s}{\partial q_k}\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\omega_s}{\partial\dot{q}_k}\ddot{q}_k+\frac{\partial\omega_s}{\partial t} \tag{3.2.10}$$

令 T^* 为动能 T 中借助式（3.2.6）消去 $\dot{q}_s$ 所得表达式，即

$$T^*(q_s,\omega_s,t)=T(q_k,\dot{q}_k(q_r,\omega_s,t),t) \tag{3.2.11}$$

令 $\dot{T}^*$ 为 $\dot{T}$ 中借助式（3.2.6）和（3.2.7）消去 $\dot{q}_s$ 和 $\ddot{q}_s$ 所得表达式，即

$$\dot{T}^*(q_s,\omega_s,\dot{\omega}_s,t)=\dot{T}(q_k,\dot{q}_k(q_s,\omega_s,t),\ \ddot{q}_k(q_s,\omega_s,\dot{\omega}_s,t),t) \tag{3.2.12}$$

定义 2 对任何动力学函数 $f^*(q_s,\omega_s,t)$，定义准坐标下的 Nielsen 算子为[20]

$$N_s^*=\frac{\partial}{\partial\omega_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-2\frac{\partial}{\partial\pi_s} \tag{3.2.13}$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial\pi_s}\triangleq\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\omega_s}\frac{\partial}{\partial q_k} \tag{3.2.14}$$

命题 1 我们有

$$\sum_{s=1}^{n}N_s(T)\delta q_s=\sum_{s=1}^{n}N_s^*(T^*)\delta\pi_s-\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}N_s^*(\dot{q}_k)\delta\pi_s \tag{3.2.15}$$

〔证明〕

$$\sum_{s=1}^{n} N_s^*(T^*)\delta\pi_s = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial \dot{T}^*}{\partial \omega_s} - 2\frac{\partial T^*}{\partial \pi_s}\right)\delta\pi_s$$

$$= \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_k} - 2\frac{\partial T}{\partial q_k}\right)\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s}\delta\pi_s$$

$$+ \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial \ddot{q}_k}{\partial \omega_s} - 2\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \pi_s}\right)\delta\pi_s$$

$$= \sum_{k=1}^{n} N_k(T)\delta q_k + \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}N_s^*(\dot{q}_k)\delta\pi_s$$

‖

命题 2　我们有

$$\sum_{s=1}^{n} N_s(T)\delta q_s = \sum_{s=1}^{n} N_s^*(T^*)\delta\pi_s$$

$$+ \sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}N_r(\omega_k)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}\delta\pi_s \quad (3.2.16)$$

〔证明〕

将式（3.2.6）和（3.2.7）代入式（3.2.9），则得恒等式

$$\dot{\omega}_s \equiv \dot{\omega}_s(q_k, \dot{q}_k(q_r, \omega_r, t),\ \ddot{q}_k(q_r, \omega_r, \dot{\omega}_r, t),\ t)$$

两端对 ω_r 求偏导数，得

$$0 = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \dot{q}_k}\ \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_r} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \ddot{q}_k}\ \frac{\partial \ddot{q}_k}{\partial \omega_r}$$

考虑到式（3.2.10），上式可写成

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_k}\ \frac{\partial \ddot{q}_k}{\partial \omega_r} = -\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \dot{q}_k}\ \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_r} \qquad (3.2.17)$$

由此，注意到式（3.1.24）和（3.1.25），有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}N_s^*(\dot{q}_k) = -\sum_{r=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_r}N_l(\omega_r)\ \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \omega_s} \quad (3.2.18)$$

由此，利用命题 1，便得命题 2。　‖

将式（3.2.15）代入式（3.2.2），得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{-N_s^*(T^*)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}N_s^*(\dot{q}_k)+P_s^*\right\}\delta\pi_s=0 \quad (3.2.19)$$

其中

$$P_s^*=\sum_{k=1}^{n}Q_k\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s} \quad (3.2.20)$$

因对完整系统来说，$\delta\pi_s$ 彼此独立，由原理（3.2.19）得到

$$N_s^*(T^*)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}N_s^*(\dot{q}_k)=P_s^*, \quad (s=1,\cdots,n) \quad (3.2.21)$$

方程（3.2.21）称为完整系统准坐标下第一形式的Nielsen方程。这里只需将广义速度用准速度表出，广义加速度用准速度以及准速度对时间的导数表出，而不需要逆变换。

将式（3.2.16）代入原理（3.2.2），得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{-N_s^*(T^*)-\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}N_r(\omega_k)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}+P_s^*\right\}\delta\pi_s=0$$

$$(3.2.22)$$

由此得到

$$N_s^*(T^*)+\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}N_r(\omega_k)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}=P_s^*, \quad (s=1,\cdots,n)$$

$$(3.2.23)$$

方程（3.2.23）称为完整系统准坐标下第二形式的Nielsen方程。这里需要广义速度与准速度的相互变换。

例1　刚体定点转动的Euler动力学方程。

取与刚体相固联的轴为惯性主轴，取角速度在主轴上投影 ω_1，ω_2，ω_3 为准速度，即

$$\omega_1=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi, \quad \omega_2=\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi,$$

$$\omega_3=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi} \quad (a)$$

其中 ψ，θ，φ 为Euler角。将式(a)反转，得

$$\dot{\psi}=\frac{1}{\sin\theta}(\omega_1\sin\varphi+\omega_2\cos\varphi),\quad \dot{\theta}=\omega_1\cos\varphi-\omega_2\sin\varphi,$$

$$\dot{\varphi}=\omega_3-(\omega_1\sin\varphi+\omega_2\cos\varphi)\text{ctg}\theta \qquad (b)$$

令 $q_1=\psi$，$q_2=\theta$，$q_3=\varphi$，准坐标下第一形式的 Nielsen 方程（3.2.21）给出为

$$N_s^*(T^*)-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}N_s^*(\dot{q}_k)=P_s^*,\qquad (s=1,2,3) \qquad (c)$$

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}J_1(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi)^2+\frac{1}{2}J_2(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi)^2$$

$$+\frac{1}{2}J_3(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})^2$$

而

$$T^*=\frac{1}{2}J_1\omega_1^2+\frac{1}{2}J_2\omega_2^2+\frac{1}{2}J_3\omega_3^2 \qquad (d)$$

因 T^* 中不含 q_s，故

$$\frac{\partial T^*}{\partial\pi_s}=0,\qquad (s=1,2,3) \qquad (e)$$

又

$$\frac{\partial T^*}{\partial\omega_s}=J_s\omega_s,\qquad (s=1,2,3) \qquad (f)$$

现计算 $N_s^*(\dot{q}_k)$。我们有

$$N_1^*(\dot{q}_1)=\frac{\partial\ddot{\psi}}{\partial\dot{\omega}_1}-2\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\pi_1}=\omega_3\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}$$

$$N_2^*(\dot{q}_1)=-\omega_3\frac{\sin\varphi}{\sin\theta},\qquad N_3^*(\dot{q}_1)=-\frac{1}{\sin\theta}(\omega_1\cos\varphi-\omega_2\sin\varphi)$$

$$N_1^*(\dot{q}_2)=-\omega_3\sin\varphi,\quad N_2^*(\dot{q}_2)=-\omega_3\cos\varphi,$$

$$N_3^*(\dot{q}_2)=\omega_1\sin\varphi+\omega_2\cos\varphi$$

$$N_1^*(\dot{q}_3)=-\omega_3\cos\varphi\,\text{ctg}\theta-\omega_2,\quad N_2^*(\dot{q}_3)=\omega_3\sin\varphi\,\text{ctg}\theta+\omega_1,$$

$$N_3^*(\dot{q}_3)=(\omega_1\cos\varphi-\omega_2\sin\varphi)\text{ctg}\theta$$

于是

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}N_1^*(\dot{q}_k)=(J_2-J_3)\omega_2\omega_3,$$

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}N_2^*(\dot{q}_k)=(J_3-J_1)\omega_3\omega_1 \qquad (g)$$

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}N_3^*(\dot{q}_k)=(J_1-J_2)\omega_1\omega_2$$

下面计算 P_r^*。我们有

$$P_1^*=Q_\psi\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\omega_1}+Q_\theta\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial\omega_1}+Q_\varphi\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial\omega_1}$$

$$=Q_\psi\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}+Q_\theta\cos\varphi-Q_\varphi\sin\varphi\,\mathrm{ctg}\theta\equiv m_1$$

$$P_2^*=Q_\psi\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}-Q_\theta\sin\varphi-Q_\varphi\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\theta\equiv m_2 \qquad (h)$$

$$P_3^*=Q_\varphi\equiv m_3$$

它们为作用于刚体上的力矩在与刚体相固联的轴上的投影。

最后，将式（e）、（f）、（g）和（h）代入方程（c），便得 Euler 动力学方程

$$J_1\dot{\omega}_1+(J_3-J_2)\omega_2\omega_3=m_1,\quad J_2\dot{\omega}_2+(J_1-J_3)\omega_3\omega_1=m_2,$$
$$J_3\dot{\omega}_3+(J_2-J_1)\omega_1\omega_2=m_3 \qquad (i)$$

3.2.2 非完整系统的广义 Nielsen 方程

1. 一阶非完整系统带乘子的 Nielsen 方程

设系统受有 g 个理想双面一阶非线性非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0,\quad (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n) \qquad (3.2.24)$$

约束（3.2.24）加在速度空间虚位移上的条件为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta\dot{q}_s=0 \qquad (3.2.25)$$

Jourdain 原理的 Nielsen 形式为式（2.1.23），即

$$\sum_{s=1}^{n}\{-N_s(T)+Q_s\}\delta\dot{q}_s=0 \qquad (3.2.26)$$

由式（3.2.26）和（3.2.25），利用通常的 Lagrange 乘子法得到[23]

$$N_s(T)=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}, \quad (s=1,\cdots,n) \quad (3.2.27)$$

方程（3.2.27）称为非完整系统带乘子的 Nielsen 方程。这类方程的优点在于物理意义明显：方程右端第二项就是广义约束反力，缺点在于方程数目比自由度数目多出 g 个。

2．一阶非完整系统的 Nielsen 自然方程

设非完整约束表为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t), \qquad \begin{pmatrix}\beta=1,\cdots,g;\ \sigma=1,\cdots,\varepsilon;\\ \varepsilon=n-g;\ s=1,\cdots,n\end{pmatrix} \quad (3.2.28)$$

令$(\dot{\boldsymbol{r}}_i)$为 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 中借助式（3.2.28）消去 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 所得表达式，由此变换了的动能记作 $\widetilde{T}$，即

$$\widetilde{T}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}_i) \qquad (3.2.29)$$

命题 3　我们有

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{N_\sigma(\widetilde{T})-\sum_{i=1}^{N}m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot N_\sigma((\dot{\boldsymbol{r}}_i))\right\}\delta\dot{q}_\sigma \qquad (3.2.30)$$

〔证明〕

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{N_\sigma(\widetilde{T})-\sum_{i=1}^{N}m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot N_\sigma((\dot{\boldsymbol{r}}_i))\right\}\delta\dot{q}_\sigma$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{\frac{\partial\dot{\widetilde{T}}}{\partial\dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial q_\sigma}-\sum_{i=1}^{N}m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i)\left[\frac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_i)^{\cdot}}{\partial\dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_i)}{\partial q_\sigma}\right]\right\}\delta\dot{q}_\sigma$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{\sum_{i=1}^{N}m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i)^{\cdot}\cdot\frac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_i)}{\partial\dot{q}_\sigma}+\sum_{i=1}^{N}m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_i)^{\cdot}}{\partial\dot{q}_\sigma}\right.$$

$$-2\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_i)}{\partial q_\sigma}-\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_i)^{\cdot}}{\partial\dot{q}_\sigma}$$

$$+2\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_i)}{\partial q_\sigma}\Big\}\delta\dot{q}_\sigma$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i)^{\cdot}\cdot\frac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_i)}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma=\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i \qquad \|$$

将式（3.2.30）代入 Jourdain 原理（2.1.19），得到

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big\{-N_\sigma(\widetilde{T})+\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot N_\sigma((\dot{\boldsymbol{r}}_i))+\widetilde{Q}_\sigma\Big\}\delta\dot{q}_\sigma=0 \quad (3.2.31)$$

其中

$$\widetilde{Q}_\sigma=Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g} Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma} \qquad (3.2.32)$$

因原理（3.2.31）中的 $\delta\dot{q}_\sigma$ 是彼此独立的，故得

$$N_\sigma(\widetilde{T})-\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot N_\sigma((\dot{\boldsymbol{r}}_i))=\widetilde{Q}_\sigma, \quad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \quad (3.2.33)$$

方程（3.2.33）称为非完整系统的Nielsen自然方程[20]，因为它们“自然地”比完整系统的 Nielsen 方程多出一项。此类方程优越于带乘子的方程（3.2.27）的在于方程数目等于系统自由度，其缺点在于左端第二项不易计算，而且没有完全脱离开直角坐标。

3. 一阶非完整系统广义坐标下的广义 Nielsen 方程

命题 4 我们有

$$\sum_{s=1}^{N} N_s(T)\delta\dot{q}_s=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big\{N_\sigma(\widetilde{T})-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}N_\sigma(\varphi_\beta)$$

$$-2\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\Big\}\delta\dot{q}_\sigma \qquad (3.2.34)$$

〔证明〕

$$
\text{右端}=\sum_{\sigma=1}^{\epsilon}\left\{\frac{\partial\tilde{\dot{T}}}{\partial\dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\epsilon+\beta}}\left(\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)\right.
$$

$$
\left.-2\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\right\}\delta\dot{q}_\sigma
$$

$$
=\sum_{\sigma=1}^{\epsilon}\left\{\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\dot{T}}{\partial\ddot{q}_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}\right.
$$

$$
-2\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\epsilon+\beta}}\left(\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)
$$

$$
\left.-2\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\right\}\delta\dot{q}_\sigma
$$

$$
=\sum_{\sigma=1}^{\epsilon}\left\{\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_{\epsilon+\beta}}-2\frac{\partial T}{\partial q_{\epsilon+\beta}}\right)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\right\}\delta\dot{q}_\sigma
$$

$=$左端 ‖

将式（3.2.24）代入原理（3.2.26），并注意到$\delta\dot{q}_\sigma$的独立性，得到

$$
N_\sigma(\tilde{T})-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\epsilon+\beta}}N_\sigma(\varphi_\beta)-2\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma,
$$

$$
(\sigma=1,\cdots,\epsilon) \qquad (3.2.35)
$$

方程（3.2.35）称为非完整系统广义坐标下的广义 Nielsen 方程[23,210]。应用这类方程比应用 Nielsen 自然方程要方便得多。实际上，将自然方程向广义坐标过渡，便可导出方程（3.2.35）。特别地，当T中不出现$q_{\epsilon+\beta}$时，方程（3.2.35）有明显的对称性。

4．一阶非完整系统准坐标下第一形式的广义 Nielsen 方程

设系统受有非完整约束（3.2.24），选彼此函数独立的准速度ω_σ，使得

$$
\dot{q}_s=\dot{q}_s(q_k,\omega_\sigma,t), \quad (\sigma=1,\cdots,\epsilon;\ s,k=1,\cdots,n) \quad (3.2.36)
$$

将式（3.2.36）代入式（3.2.24），则后者成为恒等式。按速度空

间的虚位移定义，有

$$\delta \dot{q}_s=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_\sigma}\delta\omega_\sigma,\quad (s=1,\cdots,n)\qquad (3.2.37)$$

令 T^* 为 T 中借助式（3.2.36）消去 $\dot{q}_s$ 所得表达式，令 $\dot{T}^*$ 为 $\dot{T}$ 中借助式（3.2.36）消去 $\dot{q}_s$，$\ddot{q}_s$ 所得表达式。

命题 5 我们有

$$\sum_{s=1}^{n}N_s(T)\delta\dot{q}_s=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{N_\sigma^*(T^*)-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}N_\sigma^*(\dot{q}_s)\right\}\delta\omega_\sigma\qquad (3.2.38)$$

〔证明〕

$$\text{右端}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{\frac{\partial \dot{T}^*}{\partial \omega_\sigma}-2\frac{\partial T^*}{\partial \pi_\sigma}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \ddot{q}_s}{\partial \omega_\sigma}-2\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \pi_\sigma}\right)\right\}\delta\omega_\sigma$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_\sigma}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \dot{T}}{\partial \ddot{q}_s}\frac{\partial \ddot{q}_s}{\partial \omega_\sigma}-2\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_s}\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_\sigma}\right.$$

$$\left.-2\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \pi_\sigma}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \ddot{q}_s}{\partial \omega_\sigma}-2\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \pi_\sigma}\right)\right\}\delta\omega_\sigma$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_\sigma}\delta\omega_\sigma=\text{左端}\qquad \|$$

将式（3.2.38）代入原理（3.2.26），得到

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{-N_\sigma^*(T^*)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}N_\sigma^*(\dot{q}_s)+P_\sigma^*\right\}\delta\omega_\sigma=0\qquad (3.2.39)$$

其中

$$P_\sigma^*=\sum_{s=1}^{n}Q_s\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_\sigma}\qquad (3.2.40)$$

由原理（3.2.39）中 $\delta\omega_\sigma$ 的独立性，得到

$$N_\sigma^*(T^*)-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}N_\sigma^*(\dot{q}_s)=P_\sigma^*,\quad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\qquad (3.2.41)$$

方程(3.2.41)称为非完整系统准坐标下第一形式的广义 Nielsen 方程[21,20]。此类方程有明显的对称性，而且比方程（3.2.35)更一般，因为当取准速度为广义速度时，方程（3.2.41）就变成方程（3.2.35)。

5．一阶非完整系统准坐标下第二形式的广义 Nielsen 方程

如不计非完整约束，Jourdain 原理可写成类似于式(3.2.22)的形式，即

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{-N_s^*(T^*)-\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}N_r(\omega_k)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}+P_s^*\right\}\delta\omega_s=0 \tag{3.2.42}$$

现取准速度如下

$$\omega_\sigma=\omega_\sigma(q_s,\dot{q}_s,t),\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.2.43}$$

$$\omega_{\varepsilon+\beta}=f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t),\qquad(\beta=1,\cdots,g) \tag{3.2.44}$$

其中 ω_σ 是彼此函数独立的，而按约束方程，有

$$\omega_{\varepsilon+\beta}=0 \tag{3.2.45}$$

$$\delta\omega_{\varepsilon+\beta}=0 \tag{3.2.46}$$

将式（3.2.46）代入原理（3.2.42），得到

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{-N_\sigma^*(T^*)-\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}N_r(\omega_k)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_\sigma}+P_\sigma^*\right\}\delta\omega_\sigma=0 \tag{3.2.47}$$

由 $\delta\omega_\sigma$ 的独立性，得到

$$N_\sigma^*(T^*)+\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}N_r(\omega_k)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_\sigma}=P_\sigma^*,\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.2.48}$$

方程（3.2.48)称为非完整系统准坐标下第二形式的广义Nielsen方程[20]。注意，这里需要准速度与广义速度之间的相互关系，而且式（3.2.45）仅在计算$\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}$之后才能应用。

例 2 一质量为m的质点受有速度大小为常数的非完整约

束，描述它在 Newton 中心引力场中的运动。

取点的球坐标 r，θ，φ 为广义坐标，则约束表为

$$\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta=c^2=\text{const}. \tag{a}$$

取 $\dot{r}$，$\dot{\theta}$ 为独立的广义速度，则

$$\dot{\varphi}^2=\frac{c^2-\dot{r}^2-r^2\dot{\theta}^2}{r^2\cos^2\theta} \tag{b}$$

于是有

$$\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial\dot{r}}=-\frac{\dot{r}}{r^2\dot{\varphi}\cos^2\theta},\qquad \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial\dot{\theta}}=-\frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}\cos^2\theta} \tag{c}$$

$$\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial r}=-\frac{\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\cos^2\theta}{r\dot{\varphi}\cos^2\theta},\qquad \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial\theta}=\dot{\varphi}\,\mathrm{tg}\theta \tag{d}$$

将式（b）对 t 求导数，并利用式（c），得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial\dot{r}}=&-\frac{1}{r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta}\Big\{\Big(\ddot{r}+r\dot{\theta}^2+r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta\\&-\frac{2\dot{r}^2}{r}+2\dot{r}\dot{\theta}\,\mathrm{tg}\theta\Big)\dot{\varphi}-\dot{r}\dot{\varphi}\Big\}\\ \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial\dot{\theta}}=&-\frac{1}{r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta}\{(r^2\ddot{\theta}-r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\\&+2r^2\dot{\theta}^2\mathrm{tg}\theta)\dot{\varphi}-r^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\}\end{aligned} \tag{e}$$

质点动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta)$$

于是有

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}\cos^2\theta,\qquad \frac{\partial T}{\partial\varphi}=0 \tag{f}$$

而

$$\tilde{T}=\text{const}.,\qquad \frac{\partial\tilde{T}}{\partial r}=\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\theta}=0 \tag{g}$$

$$\dot{\tilde{T}}=0 \tag{h}$$

对此问题，应用广义坐标下的广义 Nielsen 方程（3.2.35），得到

$$-\frac{\partial T}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{r}}-2\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)=\tilde{Q}_r, \qquad -\frac{\partial T}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{\theta}}-2\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)=\tilde{Q}_\theta \tag{i}$$

因

$$Q_r=-\frac{mM\gamma}{r^2}, \qquad Q_\varphi=Q_\theta=0$$

于是

$$\tilde{Q}_r=Q_r+Q_\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{r}}=Q_r, \qquad \tilde{Q}_\theta=Q_\theta+Q_\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\theta}}=0 \tag{j}$$

将式(f)、(h)、(d)、(e)和(j)代入方程(i)，并整理得

$$\begin{aligned}&\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta-2\frac{\dot{r}^2}{r}+2\dot{r}\dot{\theta}\operatorname{tg}\theta-\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}\ddot{\varphi}=-\frac{M\gamma}{r^2}\\&r^2\ddot{\theta}+r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta+2r^2\dot{\theta}^2\operatorname{tg}\theta-r^2\frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}}\ddot{\varphi}=0\end{aligned} \tag{k}$$

3.2.3 高阶非完整系统的广义 Nielsen 方程

1. 带乘子的 Nielsen 方程

万有 D′Alembert 原理的Nielsen 形式为式（2.1.36），即

$$\sum_{s=1}^{n}\{-N_s(T)+Q_s\}\delta \overset{(m)}{q}_s=0 \tag{3.2.49}$$

高阶非完整约束（3.1.97）加在虚位移 $\delta\overset{(m)}{q}_s$ 上的条件为式（3.1.98）。由式（3.2.49）和(3.1.98)，利用通常的 Lagrange 乘子法，容易得到

$$N_s(T)=Q_s+\sum_{\beta=1}^{n}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_s}, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{3.2.50}$$

下面给出原理（3.2.49）的高阶形式。

定义 3　对任意函数 $f(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m)}{q}_s,t)$，定义广义 Nielsen 算子为

$$N_s^m = m\frac{\partial}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-(m+1)\frac{\partial}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s},\qquad (s=1,\cdots,n;m=1,2,\cdots)$$

(3.2.51)

命题 6 我们有

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}N_s^m(\overset{(m-1)}{T})\delta\overset{(m)}{q}_s \qquad (3.2.52)$$

〔证明〕

利用式（3.2.51）及（2.1.41），有

$$\sum_{s=1}^{n}N_s^m(\overset{(m-1)}{T})\delta\overset{(m)}{q}_s=\sum_{s=1}^{n}\left\{m\frac{\partial\overset{(m)}{T}}{\partial\overset{(m)}{q}_s}-(m+1)\frac{\partial\overset{(m-1)}{T}}{\partial\overset{(m-1)}{q}_s}\right\}\delta\overset{(m)}{q}_s$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\left\{m\left[\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\overset{(m+1)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\overset{(m)}{q}_s}+m\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\right]\right.$$

$$\left.-(m+1)\left[\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\overset{(m-1)}{q}_s}+(m-1)\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\overset{(m-1)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\overset{(m-1)}{q}_s}\right]\right\}\delta\overset{(m)}{q}_s$$

$$=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\delta\overset{(m)}{q}_s=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i$$

将式（3.2.52）代入万有 D'Alembert 原理（2.1.32），得到

$$\sum_{s=1}^{n}\{-N_s^m(\overset{(m-1)}{T})+Q_s\}\delta\overset{(m)}{q}_s=0 \qquad (3.2.53)$$

由式（3.2.53）和（3.1.98），利用通常的 Lagrange 乘子法，得到

$$N_s^m(\overset{(m-1)}{T})=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\overset{(m)}{q}_s},\qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (3.2.54)$$

2．广义坐标下的广义 Nielsen 方程

令 $\tilde{f}$ 为 f 中借助式（3.1.104）消去 $\overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}$ 所得表达式。

定义 4 对任意函数 $\tilde{f}(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m-1)}{q}_s,\overset{(m)}{q}_\sigma,\varphi_\beta(q_k,\dot{q}_k,\cdots,\overset{(m-1)}{q}_k,\overset{(m)}{q}_s,t),t)$，定义广义 Nielsen 算子为

$$N_\sigma^m = m\frac{\partial}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - (m+1)\frac{\partial}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma},\quad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon;\ m=1,2,\cdots)$$

(3.2.55)

命题 7 我们有

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta \overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big\{ N_\sigma^m\big(\overset{(\widetilde{m-1})}{T}\big) - \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}} N_\sigma^m(\varphi_\beta)$$

$$-(m+1)\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}\Big\}\delta \overset{(m)}{q}_\sigma \qquad (3.2.56)$$

〔证明〕

$$右端 = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big\{ m\frac{\partial \overset{(\widetilde{m})}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} - (m+1)\frac{\partial \overset{(\widetilde{m-1})}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma} - \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\Big[m\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}$$

$$-(m+1)\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}\Big] - (m-1)\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}\Big\}\delta \overset{(m)}{q}_\sigma$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big\{ m\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} + m\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} + m\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m+1)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}$$

$$-(m+1)\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma} - (m+1)\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}$$

$$-m\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} + (m+1)\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}$$

$$-(m+1)\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}\Big\}\delta \overset{(m)}{q}_\sigma$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big\{\Big[m\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} - (m+1)\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}\Big] + \sum_{\beta=1}^{g}\Big[m\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}$$

$$-(m+1)\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\Big]\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}\Big\}\delta \overset{(m)}{q}_\sigma$$

$$=\sum_{s=1}^{n} N_s^m(\overset{(m-1)}{T})\delta \overset{(m)}{q}_s$$

由此利用命题 6，便得命题 7。

将式（3.2.56）代入万有 D'Alembert 原理（2.1.32），得到

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big\{-N_\sigma^m(\overset{(\widetilde{m-1})}{T})+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}N_\sigma^m(\varphi_\beta)$$

$$+(m+1)\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}+\widetilde{Q}_\sigma\Big\}\delta \overset{(m)}{q}_\sigma=0 \qquad (3.2.57)$$

其中

$$\widetilde{Q}_\sigma=Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} \qquad (3.2.58)$$

由 $\delta \overset{(m)}{q}_\sigma$ 彼此独立，得到

$$N_\sigma^m(\overset{(\widetilde{m-1})}{T})-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}N_\sigma^m(\varphi_\beta)$$

$$-(m+1)\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}=\widetilde{Q}_\sigma, \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon)$$

$$(3.2.59)$$

方程（3.2.59）称为高阶非完整系统广义坐标下的广义 Nielser 方程[19]。当 $m=1$ 时，方程（3.2.59）成为方程（3.2.35）。

3. 准坐标下的广义 Nielsen 方程

令 f^* 为 f 中借助式(3.1.112)消去 $\overset{(m)}{q}_s$ 所得表达式。

定义 5 对任意函数 f^*,定义广义 Nielsen 算子为

$$N_\sigma^{m*}=m\frac{\partial}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-(m+1)\frac{\partial}{\partial \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma} \quad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \quad (3.2.60)$$

其中 $\dfrac{\partial}{\partial \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}$ 按式（3.1.114）定义。

命题 8 我们有

$$\sum_{s=1}^{n} N_s^m(\overset{(m-1)}{T})\delta \overset{(m)}{q_s}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big\{N_\sigma^{m*}(\overset{(m-1)}{T^*})$$

$$-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}N_\sigma^{m*}(\varphi_s)\Big\}\delta\overset{(m-1)}{\omega_\sigma} \quad (3.2.61)$$

〔证明〕

$$右端=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big\{m\frac{\partial \overset{(m)*}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}}-(m+1)\frac{\partial \overset{(m-1)*}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{\pi_\sigma}}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\Big[m\frac{\partial \varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}}$$

$$-(m+1)\frac{\partial \varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\pi_\sigma}}\Big]\Big\}\delta\overset{(m-1)}{\omega_\sigma}$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big\{m\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\frac{\partial \varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}}+m\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m+1)}{q_s}}\frac{\partial \varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}}$$

$$-(m+1)\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}}\frac{\partial \varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}}-(m+1)\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\frac{\partial \varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\pi_\sigma}}$$

$$-m\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\frac{\partial \varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}}+(m+1)\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\frac{\partial \varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\pi_\sigma}}\Big\}\delta\overset{(m-1)}{\omega_\sigma}$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\sum_{s=1}^{n}\Big\{m\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}-(m+1)\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}}\Big\}\frac{\partial \varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}}\delta\overset{(m-1)}{\omega_\sigma}=左端 \parallel$$

将式（3.2.61）代入原理（3.2.53），得到

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big\{-N_\sigma^{m*}(\overset{(m-1)*}{T})+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}N_\sigma^{m*}(\varphi_s)+P_\sigma^*\Big\}\delta\overset{(m-1)}{\omega_\sigma}=0$$

$$(3.2.62)$$

其中

$$P_\sigma^*=\sum_{s=1}^{n}Q_s\frac{\partial \varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}} \quad (3.2.63)$$

由 $\delta\overset{(m-1)}{\omega_\sigma}$ 的独立性，得到

$$N_\sigma^{m*}(\overset{(m-1)*}{T}) - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} N_\sigma^{m*}(\varphi_s) = P_\sigma^*, \qquad (\sigma = 1, \cdots, \varepsilon)$$

(3.2.64)

方程（3.2.64）称为高阶非完整系统准坐标下的广义 Nielsen 方程[19]。

例 3　Hamel 例

一质量为m的质点在主动力作用下在空间中运动，点的运动受有二阶非完整约束[18]

$$\ddot{z} = \ddot{x}\ddot{y} \qquad (a)$$

试建立问题的运动微分方程。

利用广义 Nielsen 方程（3.2.59），对此问题有$m=2$，即

$$2\frac{\partial \ddot{\tilde{T}}}{\partial \ddot{x}} - 3\frac{\partial \dot{\tilde{T}}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \dot{T}}{\partial \ddot{z}}\left(2\frac{\partial \dddot{z}}{\partial \ddot{x}} - 3\frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{x}}\right) - 3\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{z}}\frac{\partial \ddot{z}}{\partial \ddot{x}} = \tilde{Q}_x$$

$$2\frac{\partial \ddot{\tilde{T}}}{\partial \ddot{y}} - 3\frac{\partial \dot{\tilde{T}}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \dot{T}}{\partial \ddot{z}}\left(2\frac{\partial \dddot{z}}{\partial \ddot{y}} - 3\frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{y}}\right) - 3\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{z}}\frac{\partial \ddot{z}}{\partial \ddot{y}} = \tilde{Q}_y \qquad (b)$$

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

于是有

$$\dot{T} = m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}), \quad \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z}, \quad \frac{\partial \dot{T}}{\partial \ddot{z}} = m\dot{z} \qquad (c)$$

$$\dot{\tilde{T}} = m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{x}\ddot{y}), \quad \frac{\partial \dot{\tilde{T}}}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}, \quad \frac{\partial \dot{\tilde{T}}}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y} \qquad (d)$$

$$\ddot{T} = m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}\ddot{x}\ddot{y} + \dot{x}\dddot{x} + \dot{y}\dddot{y} + \dot{z}\dddot{z})$$

$$\ddot{\tilde{T}} = m\{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{x}^2\ddot{y}^2 + \dot{x}\dddot{x} + \dot{y}\dddot{y} + \dot{z}(\dddot{x}\ddot{y} + \ddot{x}\dddot{y})\}$$

$$\frac{\partial \ddot{\tilde{T}}}{\partial \ddot{x}} = 2m\ddot{x}(1 + \ddot{y}^2) + m\dot{z}\dddot{y}, \quad \frac{\partial \ddot{\tilde{T}}}{\partial \ddot{y}} = 2m\ddot{y}(1 + \ddot{x}^2) + m\dot{z}\dddot{x} \qquad (e)$$

设主动力分量为 Q_x，Q_y，Q_z，则

$$\tilde{Q}_x = Q_x + Q_z \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \ddot{x}} = Q_x + Q_z \ddot{y}, \quad \tilde{Q}_y = Q_y + Q_z \ddot{x} \tag{f}$$

由式(a)有

$$\frac{\partial \ddot{z}}{\partial \ddot{x}} = \ddot{y}, \qquad \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \ddot{y}} = \ddot{x} \tag{g}$$

将式(a)对 t 求导数，得

$$\dddot{z} = \dddot{x}\ddot{y} + \ddot{x}\dddot{y}$$

于是有

$$\frac{\partial \dddot{z}}{\partial \ddot{x}} = \dddot{y}, \qquad \frac{\partial \dddot{z}}{\partial \ddot{y}} = \dddot{x} \tag{h}$$

将式(c)、(d)、(e)、(f)、(g)和(h)代入方程(b)，并整理得

$$m\ddot{x}(1+\ddot{y}^2) = Q_x + Q_z\ddot{y}, \quad m\ddot{y}(1+\ddot{x}^2) = Q_y + Q_z\ddot{x}$$ ‖

3.2.4 Euler-Lagrange 体系的方程与 Nielsen 体系的方程的等价性

1. 定义与命题

首先研究一阶动力学函数 $f(q_s, \dot{q}_s, t)$。

命题 9 对任意函数 $f(q_s, \dot{q}_s, t)$，我们有

$$N_s = E_s, \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{3.2.65}$$

其中 Nielsen 算子 N_s 由式（3.2.1）定义，Euler 算子 E_s 由式（2.1.10）定义。

〔证明〕

$$N_s(f) = \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_s} - 2\frac{\partial f}{\partial q_s}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial t}\right) - 2\frac{\partial f}{\partial q_s}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial f}{\partial q_s} = E_s(f)$$ ‖

设力学系统受有非完整约束（3.1.51），令 $\bar{f}$ 为 f 中借助式（3.1.51）消去 $\dot{q}_{\epsilon+\beta}$ 所得表达式。

命题 10　对任意函数 $\bar{f}(q_s,\dot{q}_\sigma,t)$，我们有

$$N_\sigma=E_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\frac{\partial}{\partial q_{\epsilon+\beta}},\quad(\sigma=1,\cdots,\epsilon)\qquad(3.2.66)$$

〔证明〕

参见文献〔20，24，25〕。

令 f^* 为 f 中借助式（3.2.36）消去 $\dot{q}_s$ 所得表达式。

命题 11　对任意函数 f^*，我们有

$$N_\sigma^*=E_\sigma^*,\quad(\sigma=1,\cdots,\epsilon)\qquad(3.2.67)$$

其中准坐标下的 Nielsen 算子 N_σ^* 为

$$N_\sigma^*=\frac{\partial}{\partial\omega_\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-2\frac{\partial}{\partial\pi_\sigma}\qquad(3.2.68)$$

而准坐标下的 Euler 算子 E_σ^* 为

$$E_\sigma^*=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\omega_\sigma}-\frac{\partial}{\partial\pi_\sigma}\qquad(3.2.69)$$

〔证明〕

参见文献〔20，24，25〕。

下面研究高阶动力学函数 $f(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m)}{q}_s,t)$。

命题 12　对任意函数 $f(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m)}{q}_s,t)$，我们有

$$N_s^m=E_s^m,\quad(s=1,\cdots,n;\ m=1,2,\cdots)\qquad(3.2.70)$$

其中广义 Nielsen 算子 N_s^m 定义为

$$N_s^m=m\frac{\partial}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-(m+1)\frac{\partial}{\partial\overset{(m-1)}{q}_s}\qquad(3.2.71)$$

而广义 Euler 算子 E_s^m 定义为

$$E_s^m=m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\overset{(m)}{q}_s}-\frac{\partial}{\partial\overset{(m-1)}{q}_s}\qquad(3.2.72)$$

〔证明〕

$$N_s^m(f)=m\frac{\partial}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}-(m+1)\frac{\partial f}{\partial\overset{(m-1)}{q}_s}$$

$$= m\frac{\partial}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\left(\frac{\partial f}{\partial t}-\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}\frac{\partial f}{\partial \overset{(k)}{q_r}}\overset{(k+1)}{q_r}\right)-(m+1)\frac{\partial f}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}}$$

$$= m\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\right)+\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}\frac{\partial}{\partial \overset{(k)}{q_r}}\left(\frac{\partial f}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\right)\overset{(k+1)}{q_r}\right\}-\frac{\partial f}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}}$$

$$= m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \overset{(m)}{q_s}}-\frac{\partial f}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}}=E_s^m(f)$$

令 $\tilde{f}$ 为 f 中借助式（3.1.104）消去 $\overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}$ 所得表达式，即

$$\tilde{f}(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m-1)}{q_s},\overset{(m)}{q_\sigma},t)$$

$$=f(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m-1)}{q_s},\overset{(m)}{q_\sigma},\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m-1)}{q_s},\overset{(m)}{q_\sigma},t),t)$$

定义广义 Nielsen 算子为式（3.2.55），广义 Euler 算子为式（3.1.105）。

命题 13 对任意函数 $\tilde{f}$，我们有

$$N_\sigma^m=E_\sigma^m+m\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}\frac{\partial}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\epsilon+\beta}},\qquad(\sigma=1,\cdots\epsilon;m=1,2,\cdots)\tag{3.2.73}$$

〔证明〕

由式（3.2.55）和命题 12，有

$$N_\sigma^m(\tilde{f})=m\frac{\partial}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}\frac{\mathrm{d}\tilde{f}}{\mathrm{d}t}-(m+1)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \overset{(m-1)}{q_\sigma}}$$

$$=m\left\{\frac{\partial \dot{f}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \dot{f}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \dot{f}}{\partial \overset{(m+1)}{q}_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}\right\}$$

$$-(m+1)\frac{\partial f}{\partial \overset{(m-1)}{q_\sigma}}-(m+1)\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial f}{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \overset{(m-1)}{q_\sigma}}$$

$$=m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}-\frac{\partial f}{\partial \overset{(m-1)}{q_\sigma}}+m\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial f}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\epsilon+\beta}}\right)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}+m\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial f}{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}$$

$$-(m+1)\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial f}{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}$$

由式（3.1.105)，有

$$E_\sigma^m(\tilde{f})=m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}-\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}$$

$$=m\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}\right.$$

$$\left.+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial f}{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}\right\}-\frac{\partial f}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial f}{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}$$

比较以上两式，得

$$N_\sigma^m(\tilde{f})-E_\sigma^m(\tilde{f})=m\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}+m\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial f}{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}}\left(\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}\right.$$

$$\left.-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}-\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\epsilon+\gamma}}\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}\right)$$

注意到关系

$$\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}+\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}+\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\epsilon+\gamma}}\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}$$

便得式（3.2.73)。 ‖

令 f^* 为 f 中借助式（3.1.112)消去 $\overset{(m)}{q}_s$ 所得表达式，即

$$f^*(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m-1)}{q_s},\overset{(m-1)}{\omega_\sigma},t)$$

$$=f(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m-1)}{q_s},\overset{(m)}{q_s}(q_k,\dot{q}_k,\cdots,\overset{(m-1)}{q_k},\overset{(m-1)}{\omega_\sigma},t),t)$$

定义准坐标下广义 Nielsen 算子为式（3.2.60)，广义 Euler 算子为式（3.1.113)。

命题 14 对任意函数 f^*，我们有

$$N_\sigma^{m*}=E_\sigma^{m*},\quad (\sigma=1,\cdots,\epsilon;\ m=1,2,\cdots)\qquad(3.2.74)$$

〔证明〕

由式（3.2.60）、（3.1.114）和命题 12，有

$$
\begin{aligned}
N_\sigma^{m*}(f^*) &= m\frac{\partial}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}\frac{\mathrm{d}f^*}{\mathrm{d}t}-(m+1)\frac{\partial f^*}{\partial \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma} \\
&= m\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \dot{f}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \dot{f}}{\partial \overset{(m+1)}{q}_s}\frac{\partial \overset{(m+1)}{q}_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}\right) \\
&\quad -(m+1)\frac{\partial f^*}{\partial \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma} \\
&= m\sum_{s=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}+m\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\frac{\partial \overset{(m+1)}{q}_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma} \\
&\quad -\frac{\partial f^*}{\partial \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}-m\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_s}{\partial \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}
\end{aligned}
$$

由式（3.1.113），有

$$
\begin{aligned}
&E_\sigma^{m*}(f^*) \\
&= m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f^*}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}-\frac{\partial f^*}{\partial \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma} \\
&= m\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}\right)-\frac{\partial f^*}{\partial \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}
\end{aligned}
$$

比较以上两式，得

$$
\begin{aligned}
&N_\sigma^{m*}(f^*)-E_\sigma^{m*}(f^*) \\
&= m\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\left(\frac{\partial \overset{(m+1)}{q}_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}-\frac{\partial \overset{(m)}{q}_s}{\partial \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

容易证明下述关系

$$
\frac{\partial \overset{(m+1)}{q}_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}+\frac{\partial \overset{(m)}{q}_s}{\partial \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}
$$

于是得式（3.2.74）。 ‖

2．Euler-Lagrange 体系的方程与 Nielsen 体系的方程的

等价性

利用命题9，容易证明Lagrange方程（3.1.2）与Nielsen方程（3.2.4）的等价性，Routh方程（3.1.45）与带乘子的Nielsen方程（3.2.27）的等价性。

利用命题10，容易证明广义Mac-Millan方程（3.1.55）与Nielsen自然方程（3.2.33）的等价性，广义Чаплыгин方程（3.1.80）与广义坐标下的广义Nielsen方程（3.2.35）的等价性。

利用命题11，可以证明准坐标下的广义Чаплыгин方程（3.1.83）与准坐标下第一形式的广义Nielsen方程(3.2.41)的等价性。利用命题9和命题11，可以证明Boltzmann-Hamel方程（3.1.94)与准坐标下第二形式的广义Nielsen方程(3.2.48)的等价性。

利用命题12，可以证明高阶非完整系统的广义Lagrange方程（3.1.103）与Nielsen方程（3.2.54）的等价性。

利用命题13，可以证明高阶非完整系统的广义Чаплыгин方程（3.1.111）与广义Nielsen方程（3.2.59）的等价性。

利用命题14，可以证明高阶非完整系统准坐标下的广义Чаплыгин方程（3.1.118）与高阶非完整系统准坐标下的广义Nielsen方程（3.2.64）的等价性。

§3.3 Appell体系的方程

3.3.1 Appell方程

1. 完整系统的Appell方程

首先，讨论广义坐标下的Appell方程。

设力学系统的位形由n个广义坐标$q_s(s=1,\cdots,n)$来确定。Gauss原理（2.1.26）可写成Appell形式，即

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}+Q_s\right)\delta\ddot{q}_s=0 \qquad (3.3.1)$$

其中

$$S=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_i \qquad (3.3.2)$$

为系统加速度能量。对于完整系统，式（3.3.1）中的 $\delta\ddot{q}_s$ 是彼此独立的，故得

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s, \quad (s=1,\cdots,n) \qquad (3.3.3)$$

方程（3.3.3）就是完整系统广义坐标下的 Appell 方程，它们同 Lagrange 方程一样也是建立力学系统在广义坐标中的动力学方程的一种规则。只要能列写函数 S，按式（3.3.3)就很容易建立系统的运动微分方程。如果力学系统的加速度能量容易列写，那么 Appell 方程（3.3.3）就显示其优越性。

其次，讨论准速度下的 Appell 方程。

选取 n 个彼此函数独立的准速度 ω_s，使得广义速度表为

$$\dot{q}_s=\dot{q}_s(q_k,\omega_k,t) \qquad (3.3.4)$$

将式（3.3.4）对时间 t 求导数，得到

$$\begin{aligned}\ddot{q}_s&=\ddot{q}_s(q_k,\omega_k,\dot{\omega}_k,t)\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial q_k}\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\omega_k}\dot{\omega}_k+\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial t}\end{aligned} \qquad (3.3.5)$$

令 S^* 为 S 中借助式（3.3.5）消去 $\ddot{q}_s$ 所得表达式。

命题 1 我们有

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial S^*}{\partial\dot{\omega}_s}\delta\dot{\omega}_s \qquad (3.3.6)$$

〔证明〕

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial S^*}{\partial\dot{\omega}_s}\delta\dot{\omega}_s=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_k}\frac{\partial\ddot{q}_k}{\partial\dot{\omega}_s}\delta\dot{\omega}_s=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_s}\delta\ddot{q}_s$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \ddot{\boldsymbol{r}}_i$$

将式（3.3.6）代入原理（2.1.26），则有

$$\sum_{s=1}^{n} \left(-\frac{\partial S^*}{\partial \dot{\omega}_s} + P_s^* \right) \delta \dot{\omega}_s = 0 \qquad (3.3.7)$$

其中

$$P_s^* = \sum_{k=1}^{n} Q_k \frac{\partial \ddot{q}_k}{\partial \dot{\omega}_s} = \sum_{k=1}^{n} Q_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s} \qquad (3.3.8)$$

为准坐标下的广义力。因式（3.3.7）中的 $\delta \dot{\omega}_s$ 是彼此独立的，故得

$$\frac{\partial S^*}{\partial \dot{\omega}_s} = P_s^*, \quad (s = 1, \cdots, n) \qquad (3.3.9)$$

方程（3.3.9）称为完整系统准速度下的 Appell 方程。

最后，讨论准速度和准加速度联合表示下的 Appell 方程。

取彼此函数独立的准速度 ω_s，则广义速度表为

$$\dot{q}_s = \dot{q}_s(q_k, \omega_k, t) \qquad (3.3.10)$$

于是

$$\ddot{q}_s = \ddot{q}_s(q_k, \omega_k, \dot{\omega}_k, t) \qquad (3.3.11)$$

其中

$$\ddot{q}_s = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial q_k} \dot{q}_k(q_m, \omega_m, t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_k} \dot{\omega}_k + \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial t} \qquad (3.3.12)$$

取 n 个彼此函数独立的准加速度 ε_s

$$\varepsilon_s = \varepsilon_s(q_k, \omega_k, \dot{\omega}_k, t) \qquad (3.3.13)$$

设由此可解得

$$\dot{\omega}_s = \dot{\omega}_s(q_k, \omega_k, \varepsilon_k, t) \qquad (3.3.14)$$

令由式（3.3.10）和（3.3.11）消去 $\dot{q}_s$，$\ddot{q}_s$ 而得的加速度能量 S 记作 S^*，即

$$S^*(q_s, \omega_s, \dot{\omega}_s, t) = S(q_s, \dot{q}_s(q_k, \omega_k, t), \ddot{q}_s(q_k, \omega_k, \dot{\omega}_k, t), t) \qquad (3.3.15)$$

令 S^* 中的 $\dot{\omega}_s$ 以式（3.3.14）替代而得的表达式为 S^{**}，即

$$S^{**}(q_s,\omega_s,\varepsilon_s,t)=S^*(q_s,\omega_s,\dot{\omega}_s(q_k,\omega_k,\varepsilon_k,t),t) \quad (3.3.16)$$

命题2 我们有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}\delta\ddot{q}_s=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial S^{**}}{\partial \varepsilon_s}\delta\varepsilon_s \quad (3.3.17)$$

〔证明〕

因

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial S^{**}}{\partial\varepsilon_s}\delta\varepsilon_s=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial S^*}{\partial\dot{\omega}_k}\frac{\partial\dot{\omega}_k}{\partial\varepsilon_s}\delta\varepsilon_s$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_r}\frac{\partial\ddot{q}_r}{\partial\dot{\omega}_k}\frac{\partial\dot{\omega}_k}{\partial\varepsilon_s}\delta\varepsilon_s$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_r}\frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_k}\frac{\partial\dot{\omega}_k}{\partial\varepsilon_s}\delta\varepsilon_s$$

又

$$\delta\ddot{q}_s=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\ddot{q}_s}{\partial\dot{\omega}_k}\delta\dot{\omega}_k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\omega_k}\frac{\partial\dot{\omega}_k}{\partial\varepsilon_r}\delta\varepsilon_r$$

故得结论。 ‖

将式（3.3.17）代入原理（3.3.1），便得

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\partial S^{**}}{\partial\varepsilon_s}+P_s^{**}\right)\delta\varepsilon_s=0 \quad (3.3.18)$$

其中

$$P_s^{**}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}Q_k\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\omega_r}\frac{\partial\dot{\omega}_r}{\partial\varepsilon_s} \quad (3.3.19)$$

由 $\delta\varepsilon_s$ 的独立性，得到

$$\frac{\partial S^{**}}{\partial\varepsilon_s}=P_s^{**}, \qquad (s=1,\cdots,n) \quad (3.3.20)$$

方程（3.3.20）称为完整系统准速度和准加速度联合表示的Appell方程[26]。

准速度和准加速度联合表示下的 Appell 方程（3.3.20）比准速度下的 Appell 方程（3.3.9）更一般，因为当取 $\varepsilon_s = \dot{\omega}_s$ 时，方程（3.3.20）给出方程（3.3.9）。准速度下的 Appell 方程(3.3.9)比广义坐标下的 Appell 方程(3.3.3)更一般，因为当取 $\omega_s = \dot{q}_s$ 时，方程（3.3.9）给出方程（3.3.3）。由以上三种形式的 Appell 方程(3.3.3)、(3.3.9)和(3.3.20）可以看出，Appell 方程具有统一的形式，它们的左端总是某函数对广义加速度，或对准速度的导数，或对准加速度的偏导数，而右端总是广义力或与广义力有关的力。

如引进下列函数

$$R = S - \sum_{s=1}^{n} Q_s \ddot{q}_s,\quad R^* = S^* - \sum_{s=1}^{n} P_s^* \dot{\omega}_s,\quad R^{**} = S^{**} - \sum_{s=1}^{n} P_s^{**} \varepsilon_s$$

则 Appell 方程（3.3.3）、(3.3.9）和(3.3.20）可写成以下形式

$$\frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_s} = 0, \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{3.3.21}$$

$$\frac{\partial R^*}{\partial \dot{\omega}_s} = 0, \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{3.3.22}$$

$$\frac{\partial R^{**}}{\partial \varepsilon_s} = 0, \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{3.3.23}$$

方程（3.3.21）—(3.3.23）给出一种驻值性质。

例 1　有心力问题

取力心为极坐标的极点，质点的径向加速度为 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$，横向加速度为 $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$，于是

$$S = \frac{1}{2} m \{ (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2 \} \tag{a}$$

Appell 方程（3.3.3）给出

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{r}} = Q_r,\quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{\theta}} = Q_\theta \tag{b}$$

有心力的虚功为

$$\delta A = F(r)\delta r$$

因此

$$Q_r = F(r),\ Q_\theta = 0 \tag{c}$$

于是运动方程为

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r),\quad mr(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \tag{d}$$

现取准速度为 $\omega_1 = \dot{r}$，$\omega_2 = r\dot{\theta}$，则

$$S^* = \frac{1}{2}m\left\{\left(\dot{\omega}_1 - \frac{\omega_2^2}{r}\right)^2 + \left(\dot{\omega}_2 + \frac{\omega_1\omega_2}{r}\right)^2\right\} \tag{e}$$

Appell 方程（3.3.9）给出

$$\frac{\partial S^*}{\partial \dot{\omega}_1} = P_1^*,\quad \frac{\partial S^*}{\partial \dot{\omega}_2} = P_2^* \tag{f}$$

其中

$$P_1^* = Q_r\frac{\partial \dot{r}}{\partial \omega_1} + Q_\theta\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \omega_1} = Q_r,\quad P_2^* = Q_r\frac{\partial \dot{r}}{\partial \omega_2} + Q_\theta\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \omega_2} = 0 \tag{g}$$

于是有

$$m\left(\dot{\omega}_1 - \frac{\omega_2^2}{r}\right) = Q_r,\quad m\left(\dot{\omega}_2 + \frac{\omega_1\omega_2}{r}\right) = 0 \tag{h}$$

结果与方程（d）一致。

最后，取准加速度 $\varepsilon_1 = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$，$\varepsilon_2 = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$，则

$$S^{**} = \frac{1}{2}m(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \tag{i}$$

Appell 方程（3.3.20）给出

$$\frac{\partial S^{**}}{\partial \varepsilon_1} = P_1^{**},\quad \frac{\partial S^{**}}{\partial \varepsilon_2} = P_2^{**} \tag{j}$$

其中

$$P_1^{**} = Q_r\frac{\partial \ddot{r}}{\partial \varepsilon_1} + Q_\theta\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \varepsilon_1} = Q_r,\quad P_2^{**} = Q_r\frac{\partial \ddot{r}}{\partial \varepsilon_2} + Q_\theta\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \varepsilon_2} = 0 \tag{k}$$

方程（j）成为

$$m\varepsilon_1 = Q_r,\quad m\varepsilon_2 = 0 \tag{l}$$

方程（l）与（d）也一致。

2．Appell 函数 S 和 S^* 的构造

应用 Appell 方程的主要困难是函数 S 或 S^* 的构造问题。这个函数可按定义（3.3.2）直接计算，也可由动能表达式中的系数来构造。

命题 3 如果系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k+\sum_{s=1}^{n}B_s\dot{q}_s+T_0 \tag{3.3.24}$$

则有[4]

$$S_0=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\ddot{q}_s\ddot{q}_k+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}[s,k;\ r]\dot{q}_s\dot{q}_k\ddot{q}_r$$
$$+\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{sr}}{\partial t}+\frac{\partial B_r}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_r}\right)\ddot{q}_r\dot{q}_s+\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial B_r}{\partial t}-\frac{\partial T_0}{\partial q_r}\right)\ddot{q}_r \tag{3.3.25}$$

其中 S_0 为 S 中与 $\ddot{q}_r$ 有关的部分。

〔证明〕

因

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_r}\ddot{q}_r+\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial q_r\partial q_k}\dot{q}_r\dot{q}_k+2\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial q_r\partial t}\dot{q}_r+\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial t^2}$$

故

$$S_0=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\ddot{q}_s\ddot{q}_k\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}$$
$$+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\ddot{q}_r\dot{q}_s\dot{q}_k\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s\partial q_k}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_r}$$
$$+2\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\ddot{q}_r\dot{q}_s\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_r}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s\partial t}$$
$$+\sum_{r=1}^{n}\ddot{q}_r\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_r}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial t^2}$$

又

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} = 2T_0, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} = B_r,$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} = A_{sk}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s \partial q_k} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{sr}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{kr}}{\partial q_s} - \frac{\partial A_{sk}}{\partial q_r}\right) = [s, k; r]$$

$$2\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s \partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_r} = \frac{\partial A_{sr}}{\partial t} + \frac{\partial B_r}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_r}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t^2} = \frac{\partial B_r}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_r}$$

将这些表达式代入 S_0，便得结论。 ‖

推论 如果 $\boldsymbol{r}_i$ 中不显含 t，则有

$$S_0 = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{sk}\ddot{q}_s\ddot{q}_k + \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} [s, k; r]\ddot{q}_r\dot{q}_s\dot{q}_k \tag{3.3.26}$$

根据命题3，只要知道系统的动能表达式，就可构造出加速度能量 S_0。

例2 匀质圆球沿平面滚动时的加速度能量

质量为 m，半径为 a 的匀质圆球沿粗糙水平面滚动的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\ \frac{2}{5}ma^2(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta) \tag{a}$$

其中 x, y 为球心的坐标，ψ, θ, φ 为 Euler 角。令 $q_1 = \psi$，$q_2 = \theta$，$q_3 = \varphi$，$q_4 = x$，$q_5 = y$，则动能的系数矩阵为

$$\|A_{rk}\|=\left\|\begin{matrix}\frac{2}{5}ma^2 & 0 & \frac{2}{5}ma^2\cos\theta & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{5}ma^2 & 0 & 0 & 0\\ \frac{2}{5}ma^2\cos\theta & 0 & \frac{2}{5}ma^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & m & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & m\end{matrix}\right\|$$

第一类 Christoffel 记号为

$$[3,2;1]=[2,3;1]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{12}}{\partial q_3}+\frac{\partial A_{31}}{\partial q_2}-\frac{\partial A_{23}}{\partial q_1}\right)=-\frac{1}{5}ma^2\sin\theta,$$

$$[3,1;2]=[1,3;2]=\frac{1}{5}ma^2\sin\theta,$$

$$[2,1;3]=[1,2;3]=-\frac{1}{5}ma^2\sin\theta$$

利用式（3.3.26），有

$$S_0=\frac{1}{2}(A_{11}\ddot{q}_1^2+A_{13}\ddot{q}_1\ddot{q}_3+A_{22}\ddot{q}_2^2+A_{31}\ddot{q}_3\ddot{q}_1+A_{33}\ddot{q}_3^2+A_{44}\ddot{q}_4^2$$

$$+A_{55}\ddot{q}_5^2)+2[1,2;3]\ddot{q}_3\dot{q}_1\dot{q}_2+2[2,3;1]\ddot{q}_1\dot{q}_2\dot{q}_3$$

$$+2[3,1;2]\ddot{q}_2\dot{q}_3\dot{q}_1$$

$$=\frac{1}{2}m(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}ma^2(\ddot{\psi}^2+\ddot{\theta}^2+\ddot{\varphi}^2+2\ddot{\psi}\ddot{\varphi}\cos\theta)$$

$$-\frac{2}{5}ma^2\ddot{\varphi}\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta-\frac{2}{5}ma^2\ddot{\psi}\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta+\frac{2}{5}ma^2\ddot{\theta}\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta \quad (b)$$

下面讨论准坐标下的加速度能量 S^*。设质点的矢径不依赖于时间 t，即

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_s),\qquad (i=1,\cdots,N;\ s=1,\cdots,n)$$

点的速度为

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s$$

取准速度为

$$\omega_s=\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\dot{q}_k \tag{3.3.27}$$

设由此反解出

$$\dot{q}_s=\sum_{k=1}^{n}b_{sk}\omega_k \tag{3.3.28}$$

点的速度可表为

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\sum_{k=1}^{n}b_{sk}\omega_k=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_s}\omega_s \tag{3.3.29}$$

命题 4 如果系统动能为

$$T^*=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A^*_{sk}\omega_s\omega_k \tag{3.3.30}$$

则加速度能量在准坐标下为[2]

$$S_0^*=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A^*_{sk}\dot{\omega}_s\dot{\omega}_k+\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\dot{\omega}_r\omega_s\omega_k\Big\{[s,k;r]_\pi$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\gamma^l_{sr}A^*_{kl}\Big\} \tag{3.3.31}$$

其中准坐标下第一类 Christoffel 符号为

$$[s,k;r]_\pi=[k,s;r]_\pi=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A^*_{sr}}{\partial \pi_k}+\frac{\partial A^*_{kr}}{\partial \pi_s}-\frac{\partial A^*_{sk}}{\partial \pi_r}\right) \tag{3.3.32}$$

而 Boltzmann 三标记号为

$$\gamma^l_{sr}=\sum_{m=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{lm}}{\partial q_t}-\frac{\partial a_{lt}}{\partial q_m}\right)b_{ts}b_{mr} \tag{3.3.33}$$

〔证明〕

点的加速度为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_s}\dot{\omega}_s+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_k \partial \pi_s}\omega_k\omega_s$$

因

$$S_0^*=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\dot{\omega}_s\dot{\omega}_k\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_k}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_s}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\dot{\omega}_r\omega_s\omega_k\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_r}\cdot\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_k \partial \pi_s}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_s \partial \pi_k}\right) \tag{a}$$

令

$$A_{sk}^*=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_k} \tag{b}$$

则

$$[s,k;r]_\pi=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{sr}^*}{\partial \pi_k}+\frac{\partial A_{kr}^*}{\partial \pi_s}-\frac{\partial A_{sk}^*}{\partial \pi_r}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_r}\cdot\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_k \partial \pi_s}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_s \partial \pi_k}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_s}\cdot\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_k \partial \pi_r}-\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_r \partial \pi_k}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_k}\cdot\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_s \partial \pi_r}-\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_r \partial \pi_s}\right)$$

二阶导数可用一阶导数表示为

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_k \partial \pi_r}-\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_r \partial \pi_k}=\sum_{l=1}^{n}\gamma_{rk}^{l}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_l}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_s \partial \pi_r}-\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_r \partial \pi_s}=\sum_{l=1}^{n}\gamma_{rs}^{l}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_l}$$

于是

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_s}\cdot\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_k \partial \pi_r}-\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_r \partial \pi_k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\gamma_{rk}^{l}A_{sl}^*$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_k}\cdot\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_s \partial \pi_r}-\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_r \partial \pi_s}\right)=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\gamma^{l}_{s r}A^{*}_{k l}$$

注意到

$$\gamma^{l}_{r k}=-\gamma^{l}_{k r}$$

我们有

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_r}\cdot\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_k \partial \pi_s}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_s \partial \pi_k}\right)=[s,k;r]_\pi$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}(\gamma^{l}_{s r}A^{*}_{k l}+\gamma^{l}_{k r}A^{*}_{l s}) \qquad (c)$$

将式(b)、(c)代入式(a)，便得式 (3.3.31)。 ‖

例 3 刚体绕固定点转动的加速度能量.

取刚体角速度在与刚体相固联的轴上的投影为准速度

$$\omega_1=\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi,\quad \omega_2=\dot\psi\sin\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi,$$

$$\omega_3=\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi$$

其中 ψ,θ,φ 为 Euler 角。由此反解出广义速度

$$\dot\psi=\frac{1}{\sin\theta}(\omega_1\sin\varphi+\omega_2\cos\varphi),\quad \dot\theta=\omega_1\cos\varphi-\omega_2\sin\varphi,$$

$$\dot\varphi=-(\omega_1\sin\varphi+\omega_2\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta+\omega_3$$

由此得

$$a_{11}=\sin\theta\sin\varphi,\ a_{12}=\cos\varphi,\ a_{13}=0,\ a_{21}=\sin\theta\cos\varphi,$$

$$a_{22}=-\sin\varphi,\ a_{23}=0,\ a_{31}=\cos\theta,\ a_{32}=0,\ a_{33}=1;$$

$$b_{11}=\frac{\sin\varphi}{\sin\theta},\quad b_{12}=\frac{\cos\varphi}{\sin\theta},\ b_{13}=0,\ b_{21}=\cos\varphi,$$

$$b_{22}=-\sin\varphi,\ b_{23}=0,\ b_{31}=-\sin\varphi\operatorname{ctg}\theta,$$

$$b_{32}=-\cos\varphi\operatorname{ctg}\theta,\ b_{33}=1$$

已知刚体的动能为

$$T^*=\frac{1}{2}(J_1\omega_1^2+J_2\omega_2^2+J_3\omega_3^2)-J_{12}\omega_1\omega_2-J_{23}\omega_2\omega_3-J_{31}\omega_3\omega_1$$

其中 J_1,J_2,J_3 为惯性矩，J_{12},J_{23},J_{31} 为惯性积。于是

$$A_{11}^*=J_1, A_{22}^*=J_2, A_{33}^*=J_3, A_{12}^*=-J_{12}, A_{23}^*=-J_{23}, A_{31}^*=-J_{31} \tag{a}$$

因它们都是常数，故

$$[s,k;r]_*=0 \tag{b}$$

下面计算Boltzmann三标记号。我们有

$\gamma_{32}^1=-\gamma_{23}^1=1$，$\gamma_{13}^2=-\gamma_{31}^2=1$，$\gamma_{21}^3=-\gamma_{12}^3=1$，其余为零。于是

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\dot{\omega}_r\omega_s\omega_k\sum_{l=1}^{3}\gamma_{sr}^{l}A_{kl}^*\\
&=\dot{\omega}_2[\omega_3\gamma_{32}^1(\omega_1A_{11}^*+\omega_2A_{21}^*+\omega_3A_{31}^*)+\omega_1\gamma_{12}^3(\omega_1A_{13}^*+\omega_2A_{23}^*+\omega_3A_{33}^*)]\\
&\quad+\dot{\omega}_3[\omega_2\gamma_{23}^1(\omega_1A_{11}^*+\omega_2A_{21}^*+\omega_3A_{31}^*)+\omega_1\gamma_{13}^2(\omega_1A_{12}^*+\omega_2A_{22}^*\\
&\quad+\omega_3A_{32}^*)]+\dot{\omega}_1[\omega_3\gamma_{31}^2(\omega_1A_{12}^*+\omega_2A_{22}^*+\omega_3A_{32}^*)\\
&\quad+\omega_2\gamma_{21}^3(\omega_1A_{13}^*+\omega_2A_{23}^*+\omega_3A_{33}^*)]\\
&=(\dot{\omega}_2\omega_3-\dot{\omega}_3\omega_2)(J_1\omega_1-J_{21}\omega_2-J_{31}\omega_3)+(\dot{\omega}_3\omega_1-\dot{\omega}_1\omega_3)(-J_{12}\omega_1\\
&\quad+J_2\omega_2-J_{13}\omega_3)+(\dot{\omega}_1\omega_2-\dot{\omega}_2\omega_1)(-J_{13}\omega_1-J_{23}\omega_2+J_3\omega_3)
\end{aligned} \tag{c}$$

将式(a)、(b)和(c)代入式（3.3.31），得到

$$\begin{aligned}
S_0^*=\frac{1}{2}(&J_1\dot{\omega}_1^2+J_2\dot{\omega}_2^2+J_3\dot{\omega}_3^2-2J_{12}\dot{\omega}_1\dot{\omega}_2-2J_{23}\dot{\omega}_2\dot{\omega}_3\\
&-2J_{31}\dot{\omega}_3\dot{\omega}_1)+(\dot{\omega}_2\omega_3-\dot{\omega}_3\omega_2)(J_1\omega_1-J_{21}\omega_2-J_{31}\omega_3)\\
&+(\dot{\omega}_3\omega_1-\dot{\omega}_1\omega_3)(-J_{12}\omega_1+J_2\omega_2-J_{13}\omega_3)\\
&+(\dot{\omega}_1\omega_2-\dot{\omega}_2\omega_1)(-J_{13}\omega_1-J_{23}\omega_2+J_3\omega_3)
\end{aligned}$$

‖

3．一阶非完整系统的Appell方程

首先，讨论一阶非完整系统广义坐标下的Appell方程。设力学系统受有g个理想非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0,\qquad(\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n) \tag{3.3.34}$$

将其对时间t求导数，得

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s+\frac{\partial f_\beta}{\partial t}=0$$

于是，约束（3.3.34）加在虚位移 $\delta\ddot{q}_s$ 上的限制条件为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta\ddot{q}_s=0, \qquad (\beta=1,\cdots,g) \tag{3.3.35}$$

由原理（3.3.1）和条件（3.3.35），利用通常的 Lagrange 乘子法，容易得到

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{3.3.36}$$

方程（3.3.36)称为一阶非完整系统广义坐标下带乘子的 Appell 方程。下面导出不带乘子的方程，为此，将式(3.3.34)写成形式

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t), \quad \begin{pmatrix}\beta=1,\cdots,g; & \sigma=1,\cdots,\varepsilon;\\ \varepsilon=n-g; & s=1,\cdots,n\end{pmatrix} \tag{3.3.37}$$

将其对 t 求导数，得

$$\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma+\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}\varphi_\gamma+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\ddot{q}_\sigma+\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial t} \tag{3.3.38}$$

由此得

$$\delta\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta\ddot{q}_\sigma \tag{3.3.39}$$

令 $\tilde{S}$ 为 S 中借助关系（3.3.37）和（3.3.38）消去 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 和 $\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 所得表达式，即

$$\tilde{S}(q_s,\dot{q}_\sigma,\ddot{q}_\sigma,t)=S(q_s,\dot{q}_\sigma,\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t),\ddot{q}_\sigma,\Phi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,\ddot{q}_\sigma,t),t) \tag{3.3.40}$$

命题5 我们有

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ \ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\ddot{q}_\sigma}\delta\ddot{q}_\sigma \tag{3.3.41}$$

〔证明〕

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\ddot{q}_{\sigma}}\delta\ddot{q}_{\sigma}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_{\sigma}}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial\dot{q}_{\sigma}}\right)\delta\ddot{q}_{\sigma}$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_{\sigma}}\delta\ddot{q}_{\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial\dot{q}_{\sigma}}\delta\ddot{q}_{\sigma}$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_{s}}\delta\ddot{q}_{s}$$

由此注意到式（2.1.28），便得结论。 ‖

将式（3.3.41）代入 Gauss 原理（2.1.26），得到

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(-\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\ddot{q}_{\sigma}}+\tilde{Q}_{\sigma}\right)\delta\ddot{q}_{\sigma}=0 \tag{3.3.42}$$

其中

$$\tilde{Q}_{\sigma}=Q_{\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial\dot{q}_{\sigma}} \tag{3.3.43}$$

因式（3.3.42）中 $\delta\ddot{q}_{\sigma}$ 彼此独立，便得

$$\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\ddot{q}_{\sigma}}=\tilde{Q}_{\sigma},\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.3.44}$$

这就是一阶非线性非完整系统广义坐标下的 Appell 方程[27]。

例 4 Appell-Hamel 例

质量为 m 的质点在重力作用下运动，所受非完整约束为[28]

$$\dot{z}=\frac{b}{a}(\dot{x}^{2}+\dot{y}^{2})^{1/2} \tag{a}$$

问题的加速度能量

$$S=\frac{1}{2}m(\ddot{x}^{2}+\ddot{y}^{2}+\ddot{z}^{2})$$

带乘子的 Appell 方程（3.3.36）给出为

$$\frac{\partial S}{\partial\ddot{x}}=-\frac{b}{a}\lambda\dot{x}(\dot{x}^{2}+\dot{y}^{2})^{-1/2},\ \frac{\partial S}{\partial\ddot{y}}=-\frac{b}{a}\lambda\dot{y}(\dot{x}^{2}+\dot{y}^{2})^{-1/2},$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{z}} = \lambda - mg$$

即

$$m\ddot{x} = -\frac{b}{a}\lambda \dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2}, \quad m\ddot{y} = -\frac{b}{a}\lambda \dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2},$$

$$m\ddot{z} = \lambda - mg$$

从中消去乘子λ，并利用式（a）消去$\ddot{z}$，得

$$\ddot{x} + \frac{b^2\dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{a^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} = -\frac{gb\dot{x}}{a\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

$$\ddot{y} + \frac{b^2\dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{a^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} = -\frac{gb\dot{y}}{a\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \tag{b}$$

下面利用方程（3.3.44）。我们有

$$\tilde{S} = \frac{1}{2}m\left\{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \frac{b^2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})^2}{a^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}\right\}$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \ddot{x}} = m\left(\ddot{x} + \frac{b^2\dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{a^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}\right), \quad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \ddot{y}} = m\left(\ddot{y} + \frac{b^2\dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{a^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}\right)$$

$$\tilde{Q}_x = Q_x + Q_z\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{x}} = -\frac{mgb\dot{x}}{a\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \tilde{Q}_y = Q_y + Q_z\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{y}} = -\frac{mgb\dot{y}}{a\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

于是方程（3.3.44）给出方程（b）。

其次，讨论一阶非完整系统准速度下的 Appell 方程。

如果系统受有g个理想非完整约束（3.3.34），我们选$\varepsilon = n-g$个彼此函数独立的准速度

$$\omega_\sigma = \omega_\sigma(q_s, \dot{q}_s, t) \tag{3.3.45}$$

设由式（3.3.34）和（3.3.45）可解出所有广义速度

$$\dot{q}_s = \dot{q}_s(q_k, \omega_\sigma, t) \tag{3.3.46}$$

则

$$\ddot{q}_s = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial q_k}\dot{q}_k + \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_\sigma}\dot{\omega}_\sigma + \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial t} \tag{3.3.47}$$

于是

$$\delta\ddot{q}_s=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\omega_\sigma}\delta\dot{\omega}_\sigma \qquad (3.3.48)$$

令 S^* 为 S 中借助式（3.3.46）和（3.3.47）消去 $\dot{q}_s$ 和 $\ddot{q}_s$ 所得表达式，即

$$S^*(q_s,\omega_\sigma,\dot{\omega}_\sigma,t)=S(q_s,\dot{q}_s(q_k,\omega_\sigma,t),\ddot{q}_s(q_k,\omega_\sigma,\dot{\omega}_\sigma,t),t) \qquad (3.3.49)$$

命题 6 我们有

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial S^*}{\partial\dot{\omega}_\sigma}\delta\dot{\omega}_\sigma \qquad (3.3.50)$$

〔证明〕

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial S^*}{\partial\dot{\omega}_\sigma}\delta\dot{\omega}_\sigma=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_s}\frac{\partial\ddot{q}_s}{\partial\dot{\omega}_\sigma}\delta\dot{\omega}_\sigma$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_s}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\omega_\sigma}\delta\dot{\omega}_\sigma=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_s}\delta\ddot{q}_s \qquad \|$$

将式（3.3.50）代入 Gauss 原理（2.1.26），得到

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{-\frac{\partial S^*}{\partial\dot{\omega}_\sigma}+P_\sigma^*\right\}\delta\dot{\omega}_\sigma=0 \qquad (3.3.51)$$

其中

$$P_\sigma^*=\sum_{s=1}^{n}Q_s\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\omega_\sigma}, \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \qquad (3.3.52)$$

由式（3.3.51）中 $\delta\dot{\omega}_\sigma$ 的独立性，得到

$$\frac{\partial S^*}{\partial\dot{\omega}_\sigma}=P_\sigma^*, \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \qquad (3.3.53)$$

这是一阶非完整系统准速度下的 Appell 方程。如式（3.3.45）和（3.3.46）为线性关系，则方程（3.3.53）由文献〔29〕给出。

例 5 质量为 m、半径为 a 的匀质球沿粗糙水平面的滚动。

选角速度在与固定坐标系相平行的轴上的投影为准速度，即

$$\omega_1=\dot{\theta}\cos\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi,\quad \omega_2=\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi,$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta$$

则

$$\dot{\psi} = \omega_3 - (\omega_1\sin\psi - \omega_2\cos\psi)\text{ctg}\theta,\quad \dot{\theta} = \omega_1\cos\psi + \omega_2\sin\psi,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}(\omega_1\sin\psi - \omega_2\cos\psi) \qquad (a)$$

约束方程为

$$\dot{x} - a(\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi) = 0,\quad \dot{y} + a(\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi) = 0 \qquad (b)$$

于是

$$\dot{x} = a\omega_2,\quad \dot{y} = -a\omega_1 \qquad (c)$$

将式(a)和(c)对 t 求导数，并将结果代入例2中的式(b)，便得

$$S^* = \frac{1}{2}ma^2\left\{\frac{7}{5}(\dot{\omega}_1^2 + \dot{\omega}_2^2) + \frac{2}{5}\dot{\omega}_3^2\right\} \qquad (d)$$

假设球除重力外不受任何主动力作用，则方程（3.3.53）给出

$$\frac{7}{5}ma^2\dot{\omega}_1 = 0,\quad \frac{7}{5}ma^2\dot{\omega}_2 = 0,\quad \frac{2}{5}ma^2\dot{\omega}_3 = 0 \qquad \|$$

最后，讨论准速度和准加速度联合表示的 Appell 方程。

取 ε 个彼此函数独立的准加速度

$$\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\sigma(q_s, \omega_\nu, \dot{\omega}_\nu, t), \qquad (\sigma, \nu = 1, \cdots, \varepsilon) \qquad (3.3.54)$$

设由此可解出

$$\dot{\omega}_\sigma = \dot{\omega}_\sigma(q_s, \omega_\nu, \varepsilon_\nu, t), \qquad (\sigma, \nu = 1, \cdots, \varepsilon) \qquad (3.3.55)$$

于是

$$\delta\dot{\omega}_\sigma = \sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\dot{\omega}_\sigma}{\partial\varepsilon_\nu}\delta\varepsilon_\nu \qquad (3.3.56)$$

令 S^{**} 为 S^* 中借助（3.3.55）消去 $\dot{\omega}_\sigma$ 所得表达式，即

$$S^{**}(q_s, \omega_\sigma, \varepsilon_\sigma, t) = S^*(q_s, \omega_\sigma, \dot{\omega}_\sigma(q_s, \omega_\nu, \varepsilon_\nu, t), t) \qquad (3.3.57)$$

命题7 我们有

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial S^{**}}{\partial\varepsilon_\sigma}\delta\varepsilon_\sigma \qquad (3.3.58)$$

〔证明〕

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial S^{**}}{\partial\varepsilon_\sigma}\delta\varepsilon_\sigma=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\frac{\partial S^*}{\partial\dot{\omega}_\nu}\frac{\partial\dot{\omega}_\nu}{\partial\varepsilon_\sigma}\delta\varepsilon_\sigma=\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\frac{\partial S^*}{\partial\dot{\omega}_\nu}\delta\dot{\omega}_\nu$$

利用命题 6，便得结论。 ‖

将式（3.3.58）代入 Gauss 原理（2.1.26），得到

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{-\frac{\partial S^{**}}{\partial\varepsilon_\sigma}+P_\sigma^{**}\right\}\delta\varepsilon_\sigma=0 \qquad (3.3.59)$$

其中

$$P_\sigma^{**}=\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}P_\nu^*\frac{\partial\dot{\omega}_\nu}{\partial\varepsilon_\sigma} \qquad (3.3.60)$$

因式（3.3.59）中 $\delta\varepsilon_\sigma$ 彼此独立，故得

$$\frac{\partial S^{**}}{\partial\varepsilon_\sigma}=P_\sigma^{**}, \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \qquad (3.3.61)$$

方程（3.3.61）是一阶非完整系统准速度和准加速度联合表示的 Appell 方程[30,31]。

我们注意到 Appell 方程（3.3.44）的左端是 $\tilde{S}$ 对广义加速度的偏导数，因此在构造 $\tilde{S}$ 时不必消去不独立的广义速度，只需消去广义加速度 $\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}$。类似地，在利用式（3.3.53）构造 S^*时不必消去 $\dot{q}_s$，只需消去 $\ddot{q}_s$。

4. 高阶非完整系统的 Appell 方程

现在讨论 m 阶非完整系统的 Appell 方程。

假设系统受有 g 个理想 m 阶非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m)}{q}_s,t)=0, \qquad (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n) \qquad (3.3.62)$$

或者写成

$$\overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m-1)}{q_s},\overset{(m)}{q}_\sigma,t), \qquad \left(\begin{array}{l}\beta=1,\cdots,g;\sigma=1,\cdots,\varepsilon;\\ \varepsilon=n-g;\ s=1,\cdots,n\end{array}\right) \qquad (3.3.63)$$

它们加在虚位移 $\delta\overset{(m)}{q}_s$ 上的限制条件分别为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\delta \overset{(m)}{q_s}=0 \tag{3.3.64}$$

$$\delta \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\epsilon}\frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}\delta \overset{(m)}{q_\sigma} \tag{3.3.65}$$

现在定义一个函数 E^m

$$E^m=\sum_{i=1}^{N}m_i\overset{(m)}{\boldsymbol{r}_i}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_i\delta_{m2}\qquad (m\geqslant 2) \tag{3.3.66}$$

其中

$$\delta_{m2}=\begin{cases}1 & m=2\\ 0 & m\neq 2\end{cases}$$

当 $m=2$ 时，$E^2=S$。令 E_0^m 为 E^m 中与 $\overset{(m)}{q_s}$ 有关的项，则 E_0^m 可按动能系数构造为[25]

$$E_0^m=\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}A_{sr}\overset{(m)}{q_s}\ddot{q}_r+\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[s,k;r]\overset{(m)}{q_r}\dot{q}_s\dot{q}_k$$

$$+\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{sr}}{\partial t}+\frac{\partial B_r}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_r}\right)\overset{(m)}{q_r}\dot{q}_s+\left(\frac{\partial B_r}{\partial t}-\frac{\partial T_0}{\partial q_r}\right)\overset{(m)}{q_r} \tag{3.3.67}$$

命题 8 我们有

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\overset{(m)}{\boldsymbol{r}_i}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial E^m}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\delta\overset{(m)}{q_s} \tag{3.3.68}$$

〔证明〕 当 $m=2$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial E^m}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\delta\overset{(m)}{q_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\ddot{q}_s}\delta\ddot{q}_s=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i$$

当 $m\geqslant 3$ 时，有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial E^m}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\delta\overset{(m)}{q_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m)}{\boldsymbol{r}_i}}{\partial\overset{(m)}{q_s}}\delta\overset{(m)}{q_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\overset{(m)}{\boldsymbol{r}_i}$$ ‖

命题 9 我们有

$$\frac{\partial E^m}{\partial \overset{(m)}{q_s}} = \frac{\partial \overset{(m-2)}{S}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}, \qquad (m \geqslant 2, \ s = 1, \cdots, n) \qquad (3.3.69)$$

其中 $\overset{(m-2)}{S}$ 是 Appell 函数 S 对时间 t 的（$m-2$）阶导数。

〔证明〕 当 $m \geqslant 3$ 时，有

$$\overset{(m-2)}{S} = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i + \cdots$$

其中未写出之项不含 $\overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i$，故有

$$\frac{\partial \overset{(m-2)}{S}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q_s}} = \frac{\partial E^m}{\partial \overset{(m)}{q_s}}$$

当 $m = 2$ 时，$E^2 = S$。

由命题 8 和命题 9，万有 D'Alembert 原理（2.1.32）可写成

$$\sum_{s=1}^{n} \left(-\frac{\partial E^m}{\partial \overset{(m)}{q_s}} + Q_s \right) \delta \overset{(m)}{q_s} = 0, \qquad (m \geqslant 2) \qquad (3.3.70)$$

$$\sum_{s=1}^{n} \left(-\frac{\partial \overset{(m-2)}{S}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} + Q_s \right) \delta \overset{(m)}{q_s} = 0, \qquad (m \geqslant 2) \qquad (3.3.71)$$

将它们与关系（3.3.64）联合，利用通常的 Lagrange 乘子法，容易得到

$$\frac{\partial E^m}{\partial \overset{(m)}{q_s}} = Q_s + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \overset{(m)}{q_s}}, \qquad (m \geqslant 2, s = 1, \cdots, n) \qquad (3.3.72)$$

$$\frac{\partial \overset{(m-2)}{S}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} = Q_s + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \overset{(m)}{q_s}}, \qquad (m \geqslant 2, s = 1, \cdots, n)$$

(3.3.73)

令 $\widetilde{E}^m$ 为 E^m 中借助式（3.3.63）消去 $\overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}$ 所得表达式，则有

$$\frac{\partial \widetilde{E}^m}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}} = \frac{\partial E^m}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}} + \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial E^m}{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}} \qquad (3.3.74)$$

将式（3.3.74）代入式（3.3.70），考虑到式（3.3.65），由 $\delta \overset{(m)}{q_\sigma}$ 的独立性，得到[32]

$$\frac{\partial \widetilde{E}^m}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} = \widetilde{Q}_\sigma, \qquad (\sigma = 1, \cdots, \varepsilon) \tag{3.3.75}$$

其中

$$\widetilde{Q}_\sigma = Q_\sigma + \sum_{\beta=1}^{g} Q_{\varepsilon+\beta} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} \tag{3.3.76}$$

令 $\overset{(\widetilde{m-2})}{S}$ 为 $\overset{(m-2)}{S}$ 中借助式（3.3.63）消去 $\overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}$ 所得表达式，类似地有

$$\frac{\partial \overset{(\widetilde{m-2})}{S}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} = \widetilde{Q}_\sigma, \qquad (\sigma = 1, \cdots, \varepsilon) \tag{3.3.77}$$

选 $\varepsilon = n - g$ 个 $\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma$，它们是 $q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(m)}{q}_s, t$ 的一些彼此独立的函数。一般说来，它们既不是准速度 ω_σ 的（$m-1$）阶导数，也不是准坐标 π_σ 的 m 阶导数，甚至不存在 $\overset{(m-1)}{\pi}_\sigma$ 使其导数为 $\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma$。当 $m = 2$ 时，$\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma = \dot{\omega}_\sigma$ 表示准加速度，但一般说来并不存在 ω_σ。这样，考虑到约束（3.3.62），则有

$$\overset{(m)}{q}_s = \varphi_s(q_k, \dot{q}_k, \cdots, \overset{(m-1)}{q_k}, \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}, t) \tag{3.3.78}$$

则

$$\delta \overset{(m)}{q}_s = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma} \delta \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma \tag{3.3.79}$$

令 E^{m*} 为 E^m 中借助关系（3.3.78）消去 $\overset{(m)}{q}_s$ 所得表达式，则有

$$\frac{\partial E^{m*}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial E^m}{\partial \overset{(m)}{q}_s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma} \tag{3.3.80}$$

将式（3.3.80）代入式（3.3.70），考虑到式（3.3.79），由 $\delta \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma$ 的独立性，可得到

$$\frac{\partial E^{m*}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma} = P_\sigma^*, \qquad (\sigma = 1, \cdots, \varepsilon) \tag{3.3.81}$$

其中

$$P_\sigma^* = \sum_{s=1}^{n} Q_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma} \tag{3.3.82}$$

类似地，令 $\overset{(m-2)*}{S}$ 为 $\overset{(m-2)}{S}$ 中借助式（3.3.78)消去 $\overset{(m)}{q}_s$ 所得表达式，则有

$$\frac{\partial \overset{(m-2)*}{S}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}=P_\sigma^*, \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \qquad (3.3.83)$$

例 6 Hamel 例

一质量为 m 的质点在主动力作用下在空间中运动，点的运动受有二阶非完整约束[18]

$$\ddot{z}=\ddot{x}\ddot{y} \qquad (a)$$

现在用方程（3.3.77)，取 $m=2$。我们有

$$\tilde{S}=\frac{1}{2}m(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{x}^2\ddot{y}^2) \qquad (b)$$

$$\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\ddot{x}}=m(\ddot{x}+\ddot{x}\ddot{y}^2), \quad \frac{\partial\tilde{S}}{\partial\ddot{y}}=m(\ddot{y}+\ddot{y}\ddot{x}^2)$$

$$\tilde{Q}_x=Q_x+Q_z\frac{\partial\ddot{z}}{\partial\ddot{x}}=Q_x+Q_z\ddot{y}, \quad \tilde{Q}_y=Q_y+Q_z\ddot{x}$$

方程（3.3.77）给出

$$m\ddot{x}(1+\ddot{y}^2)=Q_x+Q_z\ddot{y}, \quad m\ddot{y}(1+\ddot{x}^2)=Q_y+Q_z\ddot{z} \qquad (c)$$

现将约束方程（a）两端对时间 t 求导数，得

$$\dddot{z}=\dddot{x}\ddot{y}+\ddot{x}\dddot{y}$$

我们有

$$E^3=m\dddot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}=m\ (\dddot{x}\ddot{x}+\dddot{y}\ddot{y}+\dddot{z}\ddot{z})$$

$$\tilde{E}^3=m\{\dddot{x}\ddot{x}+\dddot{y}\ddot{y}+\ddot{z}(\dddot{x}\ddot{y}+\ddot{x}\dddot{y})\}$$

$$\frac{\partial\tilde{E}^3}{\partial\dddot{x}}=m(\ddot{x}+\ddot{z}\ddot{y}), \quad \frac{\partial\tilde{E}^3}{\partial\dddot{y}}=m(\ddot{y}+\ddot{z}\ddot{x})$$

利用方程（3.3.75)，仍得方程(c)。

3.3.2 Ценов 方程

1. 完整系统的 Ценов 方程

首先，讨论广义坐标下的 Ценов 方程。

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定。Ценов 造一函数

$$K=\frac{1}{2}(\ddot{T}-3\ddot{T}_0)-\sum_{s=1}^{n}Q_s\ddot{q}_s \qquad (3.3.84)$$

其中 $\ddot{T}_0$ 为把 T 中广义速度作为常量时对 t 的二阶导数，即

$$\ddot{T}_0=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_s}\ddot{q}_s+\cdots \qquad (3.3.85)$$

其中未写出之项不含 $\ddot{q}_s$。

命题10 我们有

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i=-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial K}{\partial\ddot{q}_s}\delta\ddot{q}_s \qquad (3.3.86)$$

〔证明〕 利用式（2.1.42)，取 $m=2$，则有

$$\frac{\partial\ddot{T}}{\partial\ddot{q}_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\ddot{q}_s}+2\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\ddot{q}_s}$$

由式（3.3.85),得

$$\frac{\partial\ddot{T}_0}{\partial\ddot{q}_s}=\frac{\partial T}{\partial q_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}$$

于是

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial K}{\partial\ddot{q}_s}\delta\ddot{q}_s=\sum_{s=1}^{n}\left\{-Q_s+\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\ddot{q}_s}\right\}\delta\ddot{q}_s$$

$$=\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i-\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i$$

由命题10，Gauss 原理可写成

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial K}{\partial\ddot{q}_s}\delta\ddot{q}_s=0 \qquad (3.3.87)$$

对于完整系统，$\delta\ddot{q}_s$ 彼此独立，故得

$$\frac{\partial K}{\partial\ddot{q}_s}=0,\qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (3.3.88)$$

这就是完整系统广义坐标下的Ценов方程[35]。实际上，它们与Appell方程（3.3.21）是等价的[1]。

其次，讨论准速度下的Ценов方程。

令K^*为K中借助关系（3.3.5）消去$\ddot{q}_s$所得表达式。

命题11 我们有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_s}\delta\ddot{q}_s=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial K^*}{\partial \dot{\omega}_s}\delta\dot{\omega}_s \tag{3.3.89}$$

〔证明〕

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial K^*}{\partial \dot{\omega}_s}\delta\dot{\omega}_s=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_k}\frac{\partial \ddot{q}_k}{\partial \dot{\omega}_s}\delta\dot{\omega}_s=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_s}\delta\ddot{q}_s \qquad \|$$

由命题11，Gauss原理可写成

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial K^*}{\partial \dot{\omega}_s}\delta\dot{\omega}_s=0 \tag{3.3.90}$$

由$\delta\dot{\omega}_s$的独立性，得到

$$\frac{\partial K^*}{\partial \dot{\omega}_s}=0, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{3.3.91}$$

方程（3.3.91）是完整系统准速度下的Ценов方程。

最后，讨论准速度和准加速度联合表示的Ценов方程。

令K^{**}为K^*中借助式（3.3.14）消去$\dot{\omega}_s$所得表达式，即

$$K^{**}(q_s,\omega_s,\varepsilon_s,t)=K^*(q_s,\omega_s,\dot{\omega}_s(q_k,\omega_k,\varepsilon_k,t),t) \tag{3.3.92}$$

命题12 我们有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial K^*}{\partial \dot{\omega}_s}\delta\dot{\omega}_s=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial K^{**}}{\partial \varepsilon_s}\delta\varepsilon_s \tag{3.3.93}$$

〔证明〕

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial K^{**}}{\partial \varepsilon_s}\delta\varepsilon_s=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial K^*}{\partial \dot{\omega}_k}\frac{\partial \dot{\omega}_k}{\partial \varepsilon_s}\delta\varepsilon_s=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial K^*}{\partial \dot{\omega}_k}\delta\dot{\omega}_k$$

由命题12，Gauss原理可写成形式

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial K^{**}}{\partial\varepsilon_s}\delta\varepsilon_s=0 \qquad (3.3.94)$$

由 $\delta\varepsilon_s$ 的独立性，得到

$$\frac{\partial K^{**}}{\partial\varepsilon_s}=0, \qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (3.3.95)$$

这就是完整系统准速度和准加速度联合表示的 Ценов 方程。

2. 一阶非完整系统的 Ценов 方程

首先，讨论一阶非完整系统广义坐标下的 Ценов 方程。

设力学系统受有 g 个理想非完整约束（3.3.34）。由原理（3.3.87）和关系（3.3.35），利用通常的 Lagrange 乘子法，容易得到

$$\frac{\partial K}{\partial\ddot{q}_s}=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}, \qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (3.3.96)$$

这是一阶非完整系统广义坐标下带乘子的 Ценов 方程。为导出不带乘子的方程，令 $\widetilde{K}$ 为 K 中借助关系（3.3.37）消去 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 并借助关系（3.3.38）消去 $\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 所得表达式。

命题 13 我们有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial K}{\partial\ddot{q}_s}\delta\ddot{q}_s=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\widetilde{K}}{\partial\ddot{q}_\sigma}\delta\ddot{q}_\sigma \qquad (3.3.97)$$

〔证明〕

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\widetilde{K}}{\partial\ddot{q}_\sigma}\delta\ddot{q}_\sigma=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial K}{\partial\ddot{q}_\sigma}\delta\ddot{q}_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial K}{\partial\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta\ddot{q}_\sigma\right)$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial K}{\partial\ddot{q}_s}\delta\ddot{q}_s$$

由命题 13，Gauss 原理可表为形式

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\widetilde{K}}{\partial\ddot{q}_\sigma}\delta\ddot{q}_\sigma=0 \qquad (3.3.98)$$

因原理（3.3.98）中 $\delta\ddot{q}_\sigma$ 彼此独立，故得

$$\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \ddot{q}_\sigma}=0, \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.3.99}$$

这是一阶非完整系统广义坐标下的Ценов方程。

例 7 一质量为 m 的质点受到速度大小为常量的非完整约束，试列写它在 Newton 中心引力场中的运动方程。

质点所受非完整约束在球坐标中表为

$$\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta+r^2\dot{\theta}^2=c^2=\text{const}.$$

它的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta+r^2\dot{\theta}^2)$$

于是

$$\begin{aligned}\dot{T}=&m(\dot{r}\ddot{r}+r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\cos^2\theta+r\dot{r}\dot{\varphi}^2\cos^2\theta-r^2\dot{\varphi}^2\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta\\&+r^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+r\dot{r}\dot{\theta}^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{T}=&m(\ddot{r}^2+r^2\ddot{\varphi}^2\cos^2\theta+2r\dot{r}\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\cos^2\theta-2r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta\\&+r\ddot{r}\dot{\varphi}^2\cos^2\theta+2r\dot{r}\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\cos^2\theta-2r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta\\&-r^2\dot{\varphi}^2\ddot{\theta}\cos\theta\sin\theta+2r\dot{r}\dot{\theta}\ddot{\theta}+r^2\ddot{\theta}^2+r\ddot{r}\dot{\theta}^2+2r\dot{r}\dot{\theta}\ddot{\theta})+\cdots\end{aligned}$$

$$\dot{T}_0=m[\dot{\varphi}^2(r\dot{r}\cos^2\theta-r^2\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta)+\dot{\theta}(r\dot{r})]$$

$$\ddot{T}_0=m[\dot{\varphi}^2(r\ddot{r}\cos^2\theta-r^2\ddot{\theta}\sin\theta\cos\theta)+\dot{\theta}^2r\ddot{r}]+\cdots$$

$$K=\frac{1}{2}(\ddot{T}-3\ddot{T}_0)^*-Q_r\ddot{r}-Q_\theta\ddot{\theta}-Q_\varphi\ddot{\varphi} \tag{a}$$

方程（3.3.99）给出

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{K}}{\partial\ddot{r}}&=\frac{\partial K}{\partial\ddot{r}}+\frac{\partial K}{\partial\ddot{\varphi}}\frac{\partial\ddot{\varphi}}{\partial\ddot{r}}=0\\\frac{\partial\tilde{K}}{\partial\ddot{\theta}}&=\frac{\partial K}{\partial\ddot{\theta}}+\frac{\partial K}{\partial\ddot{\varphi}}\frac{\partial\ddot{\varphi}}{\partial\ddot{\theta}}=0\end{aligned} \tag{b}$$

注意到

$$Q_r=-\frac{mM\gamma}{r^2}, \quad Q_\theta=Q_\varphi=0 \tag{c}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{r}} = -\frac{\dot{r}}{r^2 \varphi \cos^2\theta}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\theta}} = -\frac{\dot{\theta}}{\varphi \cos^2\theta} \tag{d}$$

则方程（b）给出

$$\begin{aligned} &\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta - \frac{\dot{r}}{\varphi}\dot{\varphi} - \frac{2\dot{r}^2}{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\,\mathrm{tg}\theta = -\frac{M\gamma}{r^2} \\ &r^2\ddot{\theta} + r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - r^2\frac{\dot{\theta}}{\varphi}\dot{\varphi} + 2r^2\dot{\theta}^2\,\mathrm{tg}\theta = 0 \end{aligned} \tag{e}$$

其次，讨论一阶非完整系统准速度下的Ценов方程。

令K^*为K中借助式（3.3.46）和（3.3.47）消去$\dot{q}_s$和$\ddot{q}_s$所得表达式，即

$$K^*(q_s, \omega_\sigma, \dot{\omega}_\sigma, t) = K(q_s, \dot{q}_s(q_k, \omega_\sigma, t), \ddot{q}_s(q_k, \omega_\sigma, \dot{\omega}_\sigma, t), t) \tag{3.3.100}$$

命题14 我们有

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_s}\delta\ddot{q}_s = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial K^*}{\partial \dot{\omega}_\sigma}\delta\dot{\omega}_\sigma \tag{3.3.101}$$

〔证明〕

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial K^*}{\partial \dot{\omega}_\sigma}\delta\dot{\omega}_\sigma &= \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_s}\frac{\partial \ddot{q}_s}{\partial \dot{\omega}_\sigma}\delta\dot{\omega}_\sigma \\ &= \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_s}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_\sigma}\delta\dot{\omega}_\sigma = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_s}\delta\ddot{q}_s \end{aligned}$$

由命题14，注意到$\delta\dot{\omega}_\sigma$的独立性，得到

$$\frac{\partial K^*}{\partial \dot{\omega}_\sigma} = 0, \qquad (\sigma = 1, \cdots, \varepsilon) \tag{3.3.102}$$

这就是一阶非完整系统准速度下的Ценов方程。

最后，讨论准速度和准加速度联合表示的Ценов方程。

令K^{**}为K^*中借助关系（3.3.55）消去$\dot{\omega}_\sigma$所得表达式，即

$$K^{**}(q_s, \omega_\sigma, \varepsilon_\sigma, t) = K^*(q_s, \omega_\sigma, \dot{\omega}_\sigma(q_s, \omega_\nu, \varepsilon_\nu, t), t)$$

$$(3.3.103)$$

容易证明下述命题。

命题 15 我们有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_s}\delta \ddot{q}_s=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial K^{**}}{\partial \varepsilon_\sigma}\delta \varepsilon_\sigma \tag{3.3.104}$$

由命题 15，注意到 $\delta\omega_\sigma$ 的独立性，得到

$$\frac{\partial K^{**}}{\partial \varepsilon_\sigma}=0,\ (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.3.105}$$

这是一阶非完整系统准速度和准加速度联合表示的 Ценов 方程。

3. 高阶非完整系统的 Ценов 方程

万有 D'Alembert 原理（2.1.32）可写成Mangeron-Deleanu 形式（2.1.47），即[34]

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\frac{1}{m}\left[(m+1)\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\right]+Q_s\right\}\delta \overset{(m)}{q_s}=0 \tag{3.3.106}$$

取广义 Ценов 函数为（2.1.50），即[35]

$$K^m=\frac{1}{m}\{\overset{(m)}{T}-(m+1)\overset{(m)}{T_0}\}-\sum_{s=1}^{n}Q_s\overset{(m)}{q_s} \tag{3.3.107}$$

当 $m=2$ 时，它就是通常的 Ценов 函数。由 § 2.1 命题 5，万有 D'Alembert 原理成为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial K^m}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\delta \overset{(m)}{q_s}=0 \tag{3.3.108}$$

将原理（3.3.108）与关系（3.3.64）联合，利用通常的 Lagrange 乘子法，容易得到

$$\frac{\partial K^m}{\partial \overset{(m)}{q_s}}=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \overset{(m)}{q_s}},\qquad (s=1,\cdots,n) \tag{3.3.109}$$

令 $\tilde{K}^m$ 为 K^m 中借助式（3.3.63）消去 $\overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}$ 所得表达式，容易证明下述命题。

命题 16 我们有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial K^m}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\delta \overset{(m)}{q_s}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \widetilde{K}^m}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}\delta \overset{(m)}{q_\sigma} \tag{3.3.110}$$

由此，注意到$\delta \overset{(m)}{q_\sigma}$的独立性，容易得到方程

$$\frac{\partial \widetilde{K}^m}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}=0, \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.3.111}$$

令K^{m*}为K^m中借助式（3.3.78）消去$\overset{(m)}{q_s}$所得表达式，容易证明下述命题。

命题 17 我们有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial K^m}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\delta \overset{(m)}{q_s}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial K^{m*}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}}\delta \overset{(m-1)}{\omega_\sigma} \tag{3.3.112}$$

由此注意到$\delta \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}$的独立性，得到方程

$$\frac{\partial K^{m*}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}}=0, \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.3.113}$$

§3.4 混合型方程

混合型方程主要有两类。一类是指§3.1—§3.3中所述三大体系方程中的两大体系的混合，另一类是指不属于前述三大体系的方程。

3.4.1 两大体系方程的混合

1. Euler-Lagrange 体系方程与 Nielsen 体系方程的混合

对完整系统准坐标下的方程，由方程（3.1.30）和(3.2.21)可混合成下述两种形式

$$E_s^*(T^*)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}N_s^*(\dot{q}_k)=P_s^*, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{3.4.1}$$

$$N_s^*(T^*)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}E_s^*(\dot{q}_k)=P_s^*, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{3.4.2}$$

由方程（3.1.31）和（3.2.23）可混合成下述两种形式

$$E_s^*(T^*)-\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}N_r(\omega_k)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}=P_s^*,\qquad (s=1,\cdots,n)$$

（3.4.3）

$$N_s^*(T^*)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}E_r(\omega_k)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}=P_s^*,\qquad (s=1,\cdots,n)$$

（3.4.4）

对一阶非完整系统，准坐标下的广义 Чаплыгин 方程（3.1.83）和准坐标下第一形式的广义 Nielsen 方程（3.2.41）可以混合成下述两种形式

$$E_\sigma^*(T^*)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}N_\sigma^*(\varphi_k)=P_\sigma^*,\qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\quad (3.4.5)$$

$$N_\sigma^*(T^*)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}E_\sigma^*(\varphi_k)=P_\sigma^*,\qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\quad (3.4.6)$$

Boltzmann-Hamel 方程（3.1.94）和准坐标下第二形式的广义 Nielsen 方程（3.2.48）可以混合成下述两种形式

$$E_\sigma^*(T^*)+\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}N_r(\omega_k)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_\sigma}=P_\sigma^*,\qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon)$$

（3.4.7）

$$N_\sigma^*(T^*)+\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}E_r(\omega_k)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_\sigma}=P_\sigma^*,\qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon)$$

（3.4.8）

对高阶非完整系统，准坐标下的广义 Чаплыгин 方程（3.1.118）和准坐标下的广义 Nielsen 方程（3.2.64）可以混合成以下两种形式

$$E_\sigma^{m*}(\overset{(m-1)}{T}{}^*)-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}N_\sigma^{m*}(\varphi_s)=P_\sigma^*,\qquad (\sigma=1\cdots,\varepsilon)$$

（3.4.9）

$$N_\sigma^{m*}(\overset{(m-1)}{T}{}^*) - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s} E_\sigma^{m*}(\varphi_s) = P_\sigma^*, \qquad (\sigma = 1, \cdots, \varepsilon)$$

(3.4.10)

2．Euler-Lagrange 体系方程与 Appell 体系方程的混合

首先，研究广义坐标下的混合型方程。

设力学系统的位形由 n 个广义坐标来确定，其运动受有 g 个理想一阶非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \varphi_\beta(q_s, \dot{q}_s, t), \qquad \begin{pmatrix} \beta = 1, \cdots, g; \ \sigma = 1, \cdots, \varepsilon; \\ s = 1, \cdots, n; \ \varepsilon = n - g \end{pmatrix}$$

(3.4.11)

假设系统的加速度能量可以分成两部分

$$S = S_0(q_s, \dot{q}_s, \ddot{q}_\sigma, t) + S_1(q_s, \dot{q}_s, \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}, t) \qquad (3.4.12)$$

即，S_0 中仅含独立的广义加速度 $\ddot{q}_\sigma$，S_1 中仅含不独立的广义加速度 $\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}$。

命题 1 我们有

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} + \frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \ddot{q}_\sigma} \right) \delta \ddot{q}_\sigma \quad (3.4.13)$$

其中 $\tilde{S}_1$ 为 S_1 中 $\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 用 Φ_β 替代所得表达式。

〔证明〕

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} \delta \ddot{q}_s = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\sigma} \delta \ddot{q}_\sigma + \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}} \delta \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial S_0}{\partial \ddot{q}_\sigma} \delta \ddot{q}_\sigma + \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial S_1}{\partial \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}} \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} \delta \ddot{q}_\sigma$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \left(\frac{\partial S_0}{\partial \ddot{q}_\sigma} + \frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \ddot{q}_\sigma} \right) \delta \ddot{q}_\sigma$$

注意到

$$\frac{\partial S_0}{\partial \ddot{q}_\sigma} = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\sigma} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma}$$

则

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}\delta\ddot{q}_s=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}+\frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \ddot{q}_\sigma}\right)\delta\ddot{q}_\sigma$$

由此，利用式（2.1.28），便得结论。 ‖

将式（3.4.13）代入 Gauss 原理（2.1.26），由 $\delta\ddot{q}_\sigma$ 的独立性，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}+\frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \ddot{q}_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma,\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\quad(3.4.14)$$

其中

$$\tilde{Q}_\sigma=Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}\qquad(3.4.15)$$

方程（3.4.14）可称为混合型的Ценов方程。如果约束（3.4.11）是线性的，则方程（3.4.14）成为Ценов 1924 年得到的混合型方程[36]。这类方程对某些问题有可能兼顾 Lagrange 方程和 Appell 方程的优点。

上述想法容易推广到二阶和更高阶非完整系统。如果系统受有 g 个二阶非完整约束

$$\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_s,\ddot{q}_\sigma,t),\qquad\begin{pmatrix}\beta=1,\cdots,g;\ \sigma=1,\cdots,\varepsilon;\\ \varepsilon=n-g;\ s=1,\cdots,n\end{pmatrix}\quad(3.4.16)$$

只要注意到

$$\frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \ddot{q}_\sigma}=\frac{\partial S_1}{\partial \ddot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial S_1}{\partial \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \ddot{q}_\sigma}\qquad(3.4.17)$$

则命题 1 仍成立。方程（3.4.14）仍成立，但此时

$$\tilde{Q}_\sigma=Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \ddot{q}_\sigma},\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\quad(3.4.18)$$

如果系统受有 g 个 m 阶非完整约束

$$\overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot q_s,\cdots,\overset{(m-1)}{q_s},\overset{(m)}{q}_\sigma,t),\qquad\begin{pmatrix}\beta=1,\cdots,g;\ \sigma=1,\cdots,\varepsilon;\\ \varepsilon=n-g;\ s=1,\cdots,n\end{pmatrix}$$

(3.4.19)

令 $\overset{(m-2)}{S}$ 可分成两部分

$$\overset{(m-2)}{S}=\overset{(m-2)}{S_0}(q_s,\dot q_s,\cdots,\overset{(m-1)}{q_s},\overset{(m)}{q}_\sigma,t)+\overset{(m-2)}{S_1}(q_s,\dot q_s,\cdots,\overset{(m-1)}{q_s},\overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta},t)\quad(3.4.20)$$

命题2 我们有

$$\sum_{i=1}^N m_i\ddot{\boldsymbol r}_i\cdot\delta\overset{(m)}{\boldsymbol r_i}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}+\frac{\partial\overset{(\widetilde{m-2})}{S}}{\partial\overset{(m)}{q}_\sigma}\right)\delta\overset{(m)}{q}_\sigma$$

(3.4.21)

〔证明〕 由§3.3命题9和10，有

$$\sum_{i=1}^N m_i\ddot{\boldsymbol r}_i\cdot\delta\overset{(m)}{\boldsymbol r_i}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m-2)}{S}}{\partial\overset{(m)}{q_s}}\delta\overset{(m)}{q_s}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial\overset{(m-2)}{S_0}}{\partial\overset{(m)}{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\overset{(m-2)}{S_1}}{\partial\overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\overset{(m)}{q}_\sigma}\right)\delta\overset{(m)}{q}_\sigma\qquad(a)$$

又

$$\frac{\partial\overset{(m-2)}{S_0}}{\partial\overset{(m)}{q}_\sigma}=\frac{\partial S_0}{\partial\ddot q_\sigma}=\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}\qquad(b)$$

以及

$$\frac{\partial\overset{(\widetilde{m-2})}{S_1}}{\partial\overset{(m)}{q}_\sigma}=\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\overset{(m-2)}{S_1}}{\partial\overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\overset{(m)}{q}_\sigma}\qquad(c)$$

将式（b）和（c）代入式（a），便得式（3.4.21）。

将式（3.4.21）代入万有D'Alembert原理（2.1.32），由 $\delta\overset{(m)}{q}_\sigma$ 的独立性，得到

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}+\frac{\partial\overset{(\widetilde{m-2})}{S}}{\partial\overset{(m)}{q}_\sigma}=\tilde Q_\sigma,\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)$$

(3.4.22)

其中

$$\tilde{Q}_\sigma = Q_\sigma + \sum_{\beta=1}^{g} Q_{\varepsilon+\beta} \frac{\partial \varphi_{\beta}^{(m)}}{\partial q_\sigma} \tag{3.4.23}$$

其次，研究准坐标下的混合型方程。

设力学系统受有 g 个理想一阶非完整约束

$$f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t) = 0, \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{3.4.24}$$

选 ε 个彼此函数独立的准速度 ω_σ，使得

$$\dot{q}_s = \dot{q}_s(q_k, \omega_\sigma, t) \tag{3.4.25}$$

而式（3.4.24）成为恒等式。将式（3.4.25）对 t 求导数，得到

$$\ddot{q}_s = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial q_k} \dot{q}_k(q_m, \omega_\nu, t) + \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_\sigma} \dot{\omega}_\sigma + \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial t} \tag{3.4.26}$$

假设系统加速度能量可以分成两部分，如式（3.4.12），令

$$S_0^*(q_s, \omega_\sigma, \dot{\omega}_\sigma, t) = S_0(q_s, \dot{q}_s(q_k, \omega_\sigma, t), \ddot{q}_\sigma(q_k, \omega_\nu, \dot{\omega}_\nu, t), t) \tag{3.4.27}$$

$$S_1^*(q_s, \omega_\sigma, \dot{\omega}_\sigma, t) = S_1(q_s, \dot{q}_s(q_k, \omega_\sigma, t), \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}(q_k, \omega_\nu, \dot{\omega}_\nu, t), t) \tag{3.4.28}$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_0^*}{\partial \dot{\omega}_\sigma} &= \sum_{\nu=1}^{\varepsilon} \frac{\partial S_0}{\partial \ddot{q}_\nu} \frac{\partial \ddot{q}_\nu}{\partial \dot{\omega}_\sigma} = \sum_{\nu=1}^{\varepsilon} \frac{\partial S_0}{\partial \ddot{q}_\nu} \frac{\partial \dot{q}_\nu}{\partial \omega_\sigma} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\varepsilon} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} \right) \frac{\partial \dot{q}_\nu}{\partial \omega_\sigma}\end{aligned} \tag{3.4.29}$$

$$\frac{\partial S_1^*}{\partial \dot{\omega}_\sigma} = \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial S_1}{\partial \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}} \frac{\partial \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{\omega}_\sigma} \tag{3.4.30}$$

利用式（3.4.29）和（3.4.30），有

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} \delta \ddot{q}_s = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\varepsilon} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} \right) \right.$$

$$\times \frac{\partial \dot{q}_\nu}{\partial \omega_\sigma} + \frac{\partial S_1^*}{\partial \dot{\omega}_\sigma}\Big\}\delta\dot{\omega}_\sigma \tag{3.4.31}$$

于是得下述命题。

命题 3 我们有

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big\{\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu}\Big) \times \frac{\partial \dot{q}_\nu}{\partial \omega_\sigma} + \frac{\partial S_1^*}{\partial \dot{\omega}_\sigma}\Big\}\delta\dot{\omega}_\sigma \tag{3.4.32}$$

将式（3.4.32）代入 Gauss 原理（2.1.26），由 $\delta\dot{\omega}_\sigma$ 的独立性，得

$$\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu}\Big)\frac{\partial \dot{q}_\nu}{\partial \omega_\sigma} + \frac{\partial S_1^*}{\partial \dot{\omega}_\sigma} = P_\sigma^*, \quad (\sigma = 1, \cdots, \epsilon) \tag{3.4.33}$$

其中

$$P_\sigma^* = \sum_{s=1}^{n} Q_s \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_\sigma} \tag{3.4.34}$$

方程（3.4.33）可称为准坐标下混合型的 Ценов 方程。

如系统受有 g 个理想 m 阶非完整约束

$$f_\beta(q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(m)}{q_s}, t) = 0 \tag{3.4.35}$$

可选 ϵ 个彼此函数独立的 $\overset{(m-1)}{\omega_\sigma}$，使得

$$\overset{(m)}{q_s} = \overset{(m)}{q_s}(q_k, \dot{q}_k, \cdots, \overset{(m-1)}{q_k}, \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}, t) \tag{3.4.36}$$

令 $\overset{(m-2)}{S}$ 可以分成 $\overset{(m-2)}{S_0}$ 和 $\overset{(m-2)}{S_1}$，如式（3.4.20），并令

$$\overset{(m-2)*}{S} = \overset{(m-2)*}{S_0} + \overset{(m-2)*}{S_1} \tag{3.4.37}$$

其中

$$\overset{(m-2)*}{S_0}(q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(m-1)}{q_s}, \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}, t)$$

$$= \overset{(m-2)}{S_0}(q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(m-1)}{q_s}, \overset{(m)}{q_s}(q_k, \dot{q}_k, \cdots, \overset{(m-1)}{q_k}, \overset{(m-1)}{\omega_\nu}, t), t)$$

$$\overset{(m-2)*}{S_1}(q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(m-1)}{q_s}, \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}, t) =$$

$$= \overset{(m-2)}{S_1}(q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(m-1)}{q_s}, \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}(q_k, \dot{q}_k, \cdots, \overset{(m-1)}{q_k}, \overset{(m-1)}{\omega_\nu}, t), t)$$

命题 4 我们有

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \overset{(m)}{\mathbf{r}_i} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\varepsilon} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} \right) \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial \overset{(m)}{q_\nu}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}} + \frac{\partial \overset{(m-2)*}{S_1}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}} \right\} \delta \overset{(m-1)}{\omega_\sigma} \tag{3.4.38}$$

这个命题容易证明。

将式(3.4.38)代入万有 D'Alembert原理(2.1.32)，并由$\delta \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}$的独立性，得到

$$\sum_{\nu=1}^{\varepsilon} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} \right) \frac{\partial \overset{(m)}{q_\nu}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}} + \frac{\partial \overset{(m-2)*}{S_1}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}} = P_\sigma^*,$$

$$(\sigma = 1, \cdots, \varepsilon) \tag{3.4.39}$$

其中

$$P_\sigma^* = \sum_{s=1}^{n} Q_s \frac{\partial \overset{(m)}{q_s}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega_\sigma}} \tag{3.4.40}$$

方程 (3.4.39) 可称为高阶非完整系统准坐标下混合型的 Ценов 方程。

例 1 圆环在重力作用下沿粗糙水平面的纯滚动

首先，应用方程 (3.4.14)。

系统运动时的动能为

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$+ \frac{1}{2} \{A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta) + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2\} \tag{a}$$

加速度能量为

$$S = \frac{1}{2} m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2) + S_0$$

取 $\ddot{\psi}, \ddot{\theta}, \ddot{\varphi}$ 为独立的广义加速度，$\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ 为不独立的广义加速

度，则

$$S_1=\frac{1}{2}m(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2) \tag{b}$$

系统所受非完整约束为[7]

$$\dot{x}+a(\dot\psi\cos\psi\cos\theta-\dot\theta\sin\psi\sin\theta+\dot\varphi\cos\psi)=0$$
$$\dot{y}+a(\dot\psi\sin\psi\cos\theta+\dot\theta\cos\psi\sin\theta+\dot\varphi\sin\psi)=0$$
$$\dot{z}-a\dot\theta\cos\theta=0$$

将其对时间求导数，得

$$\begin{aligned}
\ddot{x}=&-a(\ddot\psi\cos\psi\cos\theta-\ddot\theta\sin\psi\sin\theta+\ddot\varphi\cos\psi-\dot\psi^2\sin\psi\sin\theta\\
&-2\dot\psi\dot\theta\cos\psi\sin\theta-\dot\theta^2\sin\psi\cos\theta-\dot\varphi\dot\psi\sin\psi)\\
\ddot{y}=&-a(\ddot\psi\sin\psi\cos\theta+\ddot\theta\cos\psi\sin\theta+\ddot\varphi\sin\psi+\dot\psi^2\cos\psi\cos\theta\\
&-2\dot\psi\dot\theta\sin\psi\sin\theta+\dot\theta^2\cos\psi\cos\theta+\dot\varphi\dot\psi\cos\psi)\\
\ddot{z}=&\ a(\ddot\theta\cos\theta-\dot\theta^2\sin\theta)
\end{aligned} \tag{c}$$

混合型方程（3.4.14）给出为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot\psi}-\frac{\partial T}{\partial\psi}+\frac{\partial\tilde{S}_1}{\partial\ddot\psi}=\tilde{Q}_\psi,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}-\frac{\partial T}{\partial\theta}+\frac{\partial\tilde{S}_1}{\partial\ddot\theta}=\tilde{Q}_\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}+\frac{\partial\tilde{S}_1}{\partial\ddot\varphi}=\tilde{Q}_\varphi \tag{d}$$

进行下列运算

$$E_\psi(T)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{A\dot\psi\sin^2\theta+C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)\cos\theta\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\tilde{S}_1}{\partial\ddot\psi}&=m\ddot{x}(-a\cos\psi\cos\theta)+m\ddot{y}(-a\sin\psi\cos\theta)\\
&=ma^2\cos\theta(\ddot\psi\cos\theta+\ddot\varphi-2\dot\psi\dot\theta\sin\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_\theta(T)=&A\ddot\theta-\{A\dot\psi^2\sin\theta\cos\theta\\
&+C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)(-\dot\psi\sin\theta)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\tilde{S}_1}{\partial\ddot\theta}=&m\ddot{x}(a\sin\psi\sin\theta)+m\ddot{y}(-a\cos\psi\sin\theta)\\
&+m\ddot{z}(a\cos\theta)=ma^2\{\ddot\theta+(\dot\psi^2\cos\theta+\dot\varphi\dot\psi)\sin\theta\}
\end{aligned}$$

$$E_\varphi(T)=C(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)$$

$$\frac{\partial\tilde{S}_1}{\partial\ddot{\varphi}}=m\ddot{x}(-a\cos\psi)+m\ddot{y}(-a\sin\psi)$$
$$=ma^2(\ddot{\psi}\cos\theta+\ddot{\varphi}-2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)$$

主动力的元功为

$$\delta W=-mg\delta z=-mga\cos\theta\delta\theta$$

于是

$$Q_\theta=-mga\cos\theta,\quad Q_\psi=Q_\varphi=0$$
$$\tilde{Q}_\psi=\tilde{Q}_\varphi=0,\quad \tilde{Q}_\theta=-mga\cos\theta$$

将上述结果代入方程（d），便得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{A\dot{\psi}\sin^2\theta+C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta\}\\&\quad+ma^2\cos\theta(\ddot{\psi}\cos\theta+\ddot{\varphi}-2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)=0\\&A\ddot{\theta}-A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta+C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\dot{\psi}\sin\theta\\&\quad+ma^2(\ddot{\theta}+\dot{\psi}^2\cos\theta\sin\theta+\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta)=-mga\cos\theta\\&C(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)+ma^2(\ddot{\psi}\cos\theta+\ddot{\varphi}-2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)=0\end{aligned}\tag{e}$$

如引进准速度 $\omega_1=\dot{\theta}$，$\omega_2=\dot{\psi}\sin\theta$，$\omega_3=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}$，则方程（$e$）可表为

$$\begin{aligned}&A\dot{\omega}_2\sin\theta+C\dot{\omega}_3\cos\theta+A\omega_2\omega_1\cos\theta-C\omega_3\omega_1\sin\theta\\&\quad+ma^2(\dot{\omega}_3-\omega_1\omega_2)\cos\theta=0\\&A\dot{\omega}_1-A\omega_2^2\mathrm{ctg}\theta+C\omega_2\omega_3+ma^2(\dot{\omega}_1+\omega_2\omega_3)\\&\qquad\qquad=-mga\cos\theta\\&C\dot{\omega}_3+ma^2(\dot{\omega}_3-\omega_1\omega_2)=0\end{aligned}\tag{f}$$

其次，应用方程（3.4.33）。

取准速度如下

$$\omega_1=\dot{\theta},\quad \omega_2=\dot{\psi}\sin\theta,\quad \omega_3=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}\tag{g}$$

圆环的加速度能量为

$$S=S_0+S_1$$

将式（g）代入式（c），并将所得结果代入式（b），得

$$S_1^* = \frac{1}{2} ma^2 (\dot{\omega}_1^2 + \dot{\omega}_3^2 + 2\dot{\omega}_1 \omega_2 \omega_3 - 2\dot{\omega}_3 \omega_1 \omega_2) \qquad (h)$$

方程（3.4.33）给出为

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi}\right)\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \omega_1} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \omega_1}$$

$$+ \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \omega_1} + \frac{\partial S_1^*}{\partial \dot{\omega}_1} = P_1^*$$

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi}\right)\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \omega_2} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \omega_2}$$

$$+ \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \omega_2} + \frac{\partial S_1^*}{\partial \dot{\omega}_2} = P_2^* \qquad (i)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi}\right)\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \omega_3} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \omega_3}$$

$$+ \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \omega_3} + \frac{\partial S_1^*}{\partial \dot{\omega}_3} = P_3^*$$

其中

$$P_1^* = -mga\cos\theta, \quad P_2^* = P_3^* = 0 \qquad (j)$$

经过计算，方程（i）为

$$(A + ma^2)\dot{\omega}_1 - A\omega_2^2 \text{ctg}\theta + (C + ma^2)\omega_2\omega_3 = -mga\cos\theta$$

$$A\dot{\omega}_2 + A\omega_1\omega_2 \text{ctg}\theta - C\omega_3\omega_1 = 0$$

$$(C + ma^2)\dot{\omega}_3 - ma^2\omega_1\omega_2 = 0$$

‖

例2 Hamel 例

一质量为 m 的质点在空间中运动，其运动受有二阶非完整约束

$$\ddot{z} = \ddot{x}\ddot{y} \qquad (a)$$

点的加速度能量为

$$S = \frac{1}{2} m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2) \qquad (b)$$

取 $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ 为独立的广义加速度，$\ddot{z}$ 为不独立的广义加速度，则有

$S_1=\frac{1}{2}m\ddot{z}^2$。方程（3.4.14）给出为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{S}_1}{\partial\ddot{x}}=Q_x+Q_z\frac{\partial\ddot{z}}{\partial\ddot{x}}\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}-\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial\tilde{S}_1}{\partial\ddot{y}}=Q_y+Q_z\frac{\partial\ddot{z}}{\partial\ddot{y}}\end{aligned}\qquad(c)$$

即

$$m\ddot{x}+m\ddot{z}\ddot{y}=Q_x+Q_z\ddot{y},\quad m\ddot{y}+m\ddot{z}\ddot{x}=Q_y+Q_z\ddot{x}\qquad(d)$$

若将式（a）对时间 t 求导数，有

$$\dddot{z}=\dddot{x}\ddot{y}+\ddot{x}\dddot{y}\qquad(e)$$

还可应用方程（3.4.22）。我们有

$$\dot{S}=m(\ddot{x}\dddot{x}+\ddot{y}\dddot{y}+\ddot{z}\dddot{z}),\quad\dot{S}_0=m(\ddot{x}\dddot{x}+\ddot{y}\dddot{y})$$

$$\dot{S}_1=m\ddot{z}\dddot{z},\quad\dot{\tilde{S}}_1=m\ddot{z}(\dddot{x}\ddot{y}+\ddot{x}\dddot{y})$$

方程（3.4.22）给出

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial\dot{\tilde{S}}_1}{\partial\dddot{x}}=Q_x+Q_z\frac{\partial\dddot{z}}{\partial\dddot{x}}\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}-\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial\dot{\tilde{S}}_1}{\partial\dddot{y}}=Q_y+Q_z\frac{\partial\dddot{z}}{\partial\dddot{y}}\end{aligned}\qquad(f)$$

它们仍有形式（d）。 ‖

3. Nielsen 体系方程与 Appell 体系方程的混合

利用 Euler 算子与 Nielsen 算子之间的关系，容易由方程（3.4.14）、（3.4.22）、（3.4.33）和（3.4.39）得到下列 Nielsen 体系与 Appell 体系的混合型方程

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}+\frac{\partial\tilde{S}_1}{\partial\ddot{q}_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma,\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\quad(3.4.41)$$

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}+\frac{\partial\overset{(\tilde{m}-2)}{\underset{(m)}{S}}}{\partial q_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma,\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)(3.4.42)$$

$$\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_\nu}-2\frac{\partial T}{\partial q_\nu}\right)\frac{\partial \dot{q}_\nu}{\partial \omega_\sigma}+\frac{\partial S_1^*}{\partial \omega_\sigma}=P_\sigma^*,\qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon)$$

$$(3.4.43)$$

$$\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_\nu}-2\frac{\partial T}{\partial q_\nu}\right)\frac{\partial \overset{(m)}{q}_\nu}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}+\frac{\partial \overset{(m-2)*}{S}}{\partial \overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}=P_\sigma^*,$$

$$(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\quad(3.4.44)$$

3.4.2 一类新的混合型方程

1. 完整系统的运动方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定。

命题 5 我们有

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}-\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta\overset{(m)}{q}_s\quad(3.4.45)$$

〔证明〕 由式(2.1.41),有

$$\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \overset{(m+1)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_s}+m\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_s}$$

$$\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}+(m-1)\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \overset{(m-1)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}$$

于是

$$\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}-\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\left\{(m+1)\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}-m\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}\right\}$$

$$+\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$$

由此,注意到式(2.1.34),便得结论。

利用式(3.4.45),万有 D'Alembert 原理(2.1.32)可写成形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}+\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}}+\frac{\partial T}{\partial q_s}+Q_s\right)\delta \overset{(m)}{q_s}=0 \qquad (3.4.46)$$

如果系统是完整的，则式（3.4.46）中的$\delta \overset{(m)}{q_s}$是彼此独立的，于是得到[37]

$$\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}-\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s, \qquad (s=1,\cdots,n) \quad (3.4.47)$$

2. 非完整系统的运动方程

设系统受有 g 个理想 m 阶非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m)}{q_s},t)=0, \qquad (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n) \quad (3.4.48)$$

则约束（3.4.48）加在虚位移$\delta \overset{(m)}{q_s}$上的限制条件为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\delta \overset{(m)}{q_s}=0, \qquad (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n) \quad (3.4.49)$$

由式（3.4.46）和（3.4.49），利用通常 Lagrange 乘子法，容易得到

$$\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}-\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \overset{(m)}{q_s}}, \qquad (s=1,\cdots,n) \quad (3.4.50)$$

下面导出不带乘子的方程。令约束（3.4.48）可表为

$$\overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m-1)}{q_s},\overset{(m)}{q_\sigma},t) \qquad (3.4.51)$$

于是

$$\begin{aligned}\overset{(m+1)}{q}_{\epsilon+\beta}=&\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_s}\dot{q}_s+\cdots+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \overset{(m-2)}{q_s}}\overset{(m-1)}{q_s}+\sum_{\sigma=1}^{\epsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \overset{(m-1)}{q_\sigma}}\overset{(m)}{q_\sigma}\\&+\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\epsilon+\gamma}}\varphi_\gamma+\sum_{\sigma=1}^{\epsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}\overset{(m+1)}{q_\sigma}+\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial t}\\\equiv&\Phi_\beta(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m-1)}{q_s},\overset{(m)}{q_\sigma},\varphi_\gamma,\overset{(m+1)}{q_\sigma},t)\end{aligned} \qquad (3.4.52)$$

令 $\overset{(\widetilde{m-1})}{T}$ 为 $\overset{(m-1)}{T}$ 中借助式（3.4.51）消去 $\overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}$ 所得表达式，则有

$$\frac{\partial \overset{(\widetilde{m-1})}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}=\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma} \tag{3.4.53}$$

令 $\overset{(\widetilde{m})}{T}$ 为 $\overset{(m)}{T}$ 中借助式（3.4.51）消去 $\overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}$ 并借助式（3.4.52）消去 $\overset{(m+1)}{q}_{\varepsilon+\beta}$ 所得表达式，则有

$$\frac{\partial \overset{(\widetilde{m})}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}=\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m+1)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} \tag{3.4.54}$$

利用关系（3.4.53）和（3.4.54），原理（3.4.46）可变换为

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Bigg\{&-\frac{\partial \overset{(\widetilde{m})}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}+\frac{\partial \overset{(\widetilde{m-1})}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}-\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}\right)\\&+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}+\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}\\&+\tilde{Q}_\sigma\Bigg\}\delta \overset{(m)}{q}_\sigma=0\end{aligned} \tag{3.4.55}$$

其中

$$\tilde{Q}_\sigma=Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} \tag{3.4.56}$$

由 $\delta \overset{(m)}{q}_\sigma$ 的独立性，得到[38]

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \overset{(\widetilde{m})}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}-\frac{\partial \overset{(\widetilde{m-1})}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}-\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}\right)\\&-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\varepsilon-\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}-\left(\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}\right)=\tilde{Q}_\sigma\end{aligned}$$

$$(\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.4.57}$$

这是高阶非完整系统广义坐标下的一类混合型方程。

选彼此函数独立的 $\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma$，考虑到式（3.4.48），有

$$\overset{(m)}{q}_s=\psi_s(q_k,\dot{q}_k,\cdots,\overset{(m-1)}{q}_k,\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma,t)\qquad(3.4.58)$$

将其对时间 t 求导数，得

$$\begin{aligned}\overset{(m+1)}{q}_s&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\psi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k+\cdots+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\psi_s}{\partial\overset{(m-1)}{q}_k}\psi_k\\&+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\psi_s}{\partial\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}\overset{(m)}{\omega}_\sigma+\frac{\partial\psi_s}{\partial t}\\&\equiv\Psi_s(q_k,\dot{q}_k,\cdots,\overset{(m-1)}{q}_k,\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma,\overset{(m)}{\omega}_\sigma,t)\qquad(3.4.59)\end{aligned}$$

令 $\overset{(m-1)*}{T}$ 为 $\overset{(m-1)}{T}$ 中借助式（3.4.58）消去 $\overset{(m)}{q}_s$ 所得表达式，令 $\overset{(m)*}{T}$ 为 $\overset{(m)}{T}$ 中借助式（3.4.58）消去 $\overset{(m)}{q}_s$ 并借助式（3.4.59）消去 $\overset{(m+1)}{q}_s$ 所得表达式，则原理（3.4.46）可变换为

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Bigg\{&-\frac{\partial\overset{(m)*}{T}}{\partial\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}+\frac{\partial\overset{(m-1)*}{T}}{\partial\overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m-1)}{T}}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\left(\frac{\partial\Psi_s}{\partial\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}-\frac{\partial\psi_s}{\partial\overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}\right)\\&+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_s}\frac{\partial\psi_s}{\partial\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}+E_\sigma\Bigg\}\delta\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma=0\qquad(3.4.60)\end{aligned}$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial\overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}\overset{\Delta}{=}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\psi_s}{\partial\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}\frac{\partial}{\partial\overset{(m-1)}{q}_s},\quad E_\sigma=\sum_{s=1}^{n}Q_s\frac{\partial\psi_s}{\partial\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}$$

$$(3.4.61)$$

由 $\delta\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma$ 的独立性，得到[38]

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\overset{(m)*}{T}}{\partial\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}-\frac{\partial\overset{(m-1)*}{T}}{\partial\overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m-1)}{T}}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\left(\frac{\partial\Psi_s}{\partial\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}-\frac{\partial\psi_s}{\partial\overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}\right)\\&-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_s}\frac{\partial\psi_s}{\partial\overset{(m-1)}{\omega}_\sigma}=E_\sigma,\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\end{aligned}$$

$$(3.4.62)$$

这是高阶非完整系统准坐标下的一类混合型方程。

§ 3.5 正则方程

3.5.1 完整系统的 Hamilton 正则方程

1. Legendre 变换

研究变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数 $\Phi(x_1, \cdots, x_n)$，它是连续的且对所有变量有连续一阶和二阶偏导数。称函数 Φ 为母函数，借助它可将旧变量 $x_1, \cdots, x_n$ 变换到新变量

$$y_s = \frac{\partial \Phi}{\partial x_s}, \qquad (s=1, \cdots, n) \tag{3.5.1}$$

函数组 y_s 的 Jacobi 行列式称为Φ 的 Hess行列式，记作 $H(\Phi)$，其元素为 Φ 对 x_k 的二阶偏导数

$$H(\Phi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n \partial x_1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} \tag{3.5.2}$$

方程组（3.5.1），可在 Hess 行列式不等于零的区域上解出旧变量，得到旧变量用新变量表示的逆变换

$$x_s = x_s(y_1, \cdots, y_n), \qquad (s=1, \cdots, n) \tag{3.5.3}$$

这个变换可写成形式（3.5.1)。为此，引入新变量的母函数 $\Psi(y_1, \cdots, y_n)$

$$\Psi(y_1, \cdots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \Phi(x_1, \cdots, x_n) \tag{3.5.4}$$

其中旧变量用式（3.5.3）替代。Ψ 对 y_s 求偏导数，得

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_s} = x_s + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial y_s} y_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_s}$$

利用式（3.5.1），则有

$$x_s=\frac{\partial\Psi}{\partial y_s}, \qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (3.5.5)$$

关系（3.5.1）和（3.5.5）确定正变换和逆变换，组成Legendre变换。

特别地，如母函数 Φ 是二次形

$$\Phi=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}x_sx_k \qquad (3.5.6)$$

于是有

$$H(\Phi)=|a| \qquad (3.5.7)$$

如矩阵 $\|a\|$ 非奇异，即 $|a|$ 异于零，那么线性方程组

$$y_s=\frac{\partial\Phi}{\partial x_s}=\sum_{k=1}^{n}a_{sk}x_k, \qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (3.5.8)$$

可解出旧变量

$$x_s=\sum_{k=1}^{n}b_{sk}y_k, \qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (3.5.9)$$

逆变换的母函数，据式（3.5.4）和（3.5.1），有

$$\Psi=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k-\Phi=2\Phi-\Phi=\Phi \qquad (3.5.10)$$

而 Φ 应以新变量表示。这样

$$\Psi=\Phi=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}x_sy_s=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{sk}y_sy_k \qquad (3.5.11)$$

2．运动的 Hamilton 正则方程

有 n 个自由度的完整系统的 Lagrange 方程是 n 个二阶常微分方程。可以用许多办法将这个方程组用 $2n$ 个一阶方程来替代。例如，取 $\dot{q}_s=r_s$，那么 $\dot{r}_s$ 可用 q_k、r_k 表出。但这样做，并没有带来方便。

作为一阶方程组的 $2n$ 个变量，可取广义坐标 q_1、$\cdots$，q_n 以及广义速度的线性函数——广义动量 $p_1,\cdots,p_n$。广义动量定义为

$$p_s=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}, \qquad (s=1, \cdots, n) \qquad (3.5.12)$$

当广义力有势时，在这样选取变量下，运动方程可写成非常对称、非常紧凑的形式，称之为正则形式。动能 T 作为广义速度的函数，起着由旧变量 $\dot{q}_s$ 向新变量 p_s 过渡的母函数的作用。它的Hess行列式是二次形 T_2 的系数矩阵行列式。这个行列式不为零，因此可由式（3.5.12）解出

$$\dot{q}_s=\dot{q}_s(p_k, q_k, t), \qquad (s, k=1, \cdots, n) \qquad (3.5.13)$$

它们相对广义动量是线性的。这 n 个一阶方程是正则方程的第一组。

Legendre变换可将式（3.5.13）写成另一种形式。据式（3.5.4），逆变换的母函数为

$$\Psi=\sum_{s=1}^{n} p_s \dot{q}_s-T=\Psi(q_k, p_k, t) \qquad (3.5.14)$$

其中广义速度用广义动量表示。按（3.5.5），得

$$\dot{q}_s=\frac{\partial \Psi}{\partial p_s}, \qquad (s=1, \cdots, n) \qquad (3.5.15)$$

利用它可组成运动方程的第二组。注意到

$$\frac{\partial \Psi}{\partial q_s}=-\frac{\partial T}{\partial q_s} \qquad (3.5.16)$$

利用Lagrange方程（3.1.2），关系（3.5.12）及（3.5.16），得到

$$\dot{p}_s=-\frac{\partial \Psi}{\partial q_s}+Q_s, \qquad (s=1, \cdots, n) \qquad (3.5.17)$$

这是对变量 q_s、p_s 的正则方程的第二组。当广义力有势时，它可过渡到Hamilton正则方程的第二组。定义Hamilton函数为

$$H(q_k, p_k, t)=\Psi+V=\sum_{s=1}^{n} p_s \dot{q}_s-T+V$$

或

$$H=\sum_{s=1}^{n} p_s\dot{q}_s - L = \Psi + V \qquad (3.5.18)$$

势能 V 不依赖于广义动量，替代式(3.5.15)和(3.5.17)，有

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\qquad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s},\qquad (s=1,\cdots,n)\ (3.5.19)$$

这便是Hamilton正则方程。满足Hamilton正则方程的变量 q_s 和 p_s 称为正则变量。

研究正则方程有重要意义。首先，正则方程(3.5.19)在形式上比Lagrange方程要简单，结构上又对称，在解许多复杂的力学问题时，如天体力学、摄动理论，更便于作普遍讨论。其次，与正则方程相联系所引进的新概念，如正则变量，在力学和物理学中，如统计物理，量子力学等，有很多用途。最后，由正则方程建立了一整套积分方法——Poisson定理，Jacobi方法等。

例 1 Kepler-Newton空间问题

质量为 m 的质点在万有引力场中运动，受质量为 M 的中心吸引，认为引力中心不动。取点的球坐标 r，θ（纬度），φ（经度）为广义坐标。点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta) \qquad (a)$$

势能为

$$V=-\frac{\mu m}{r} \qquad (b)$$

令 $q_1=r$，$q_2=\theta$，$q_3=\varphi$，则广义动量为

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}=m\dot{r},\quad p_2=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}=mr^2\dot{\theta},\quad p_3=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3}=mr^2\dot{\varphi}\cos^2\theta \qquad (c)$$

Hamilton函数为

$$H=\sum_{s=1}^{3} p_s\dot{q}_s-L=\frac{1}{2m}\left(p_1^2+\frac{p_2^2}{r^2}+\frac{p_3^2}{r^2\cos^2\theta}\right)-\frac{\mu m}{r} \qquad (d)$$

Hamilton 正则方程（3.5.19）给出为

$$\dot{r}=\frac{\partial H}{\partial p_1},\quad \dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial p_2},\quad \dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial p_3}$$
$$\dot{p}_1=-\frac{\partial H}{\partial r},\quad \dot{p}_2=-\frac{\partial H}{\partial \theta},\quad \dot{p}_3=-\frac{\partial H}{\partial \varphi} \tag{e}$$

即

$$\dot{r}=\frac{p_1}{m},\quad \dot{p}_1=\frac{p_2^2}{mr^3}+\frac{p_3^2}{mr^3\cos^2\theta}-\frac{\mu m}{r^2}$$
$$\dot{\theta}=\frac{p_2}{mr^2},\quad \dot{p}_2=-\frac{\sin\theta}{mr^2\cos^3\theta}p_3^2 \tag{f}$$
$$\dot{\varphi}=\frac{p_3}{mr^2\cos^2\theta},\quad \dot{p}_3=0$$

3.5.2 非完整系统的正则方程

为使属于完整系统动力学正则方程的积分理论中的某些定理和结论有可能推广到非完整系统中去，我们将非完整系统的运动方程写成接近于完整系统所建立的通常正则方程的形式。

1. Routh 方程的正则形式

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定，系统的运动受有一阶线性非完整约束

$$\sum_{s=1}^{n}a_{\varepsilon+\beta,s}\dot{q}_s+a_{\varepsilon+\beta}=0,\qquad (\beta=1,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g) \tag{3.5.20}$$

系统的 Routh 方程为式（3.1.47），即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta a_{\varepsilon+\beta,s}$$
$$(s=1,\cdots,n;\ \varepsilon=n-g) \tag{3.5.21}$$

如果广义力有势，即

$$Q_s = -\frac{\partial V}{\partial q_s}$$

则方程（3.5.21）成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta a_{\varepsilon+\beta, s}, \qquad (s=1, \cdots, n) \tag{3.5.22}$$

其中 $L = T - V$。

引入 Hamilton 函数

$$H = \sum_{s=1}^{n} p_s \dot{q}_s - L \tag{3.5.23}$$

其中

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \tag{3.5.24}$$

为广义动量。于是有

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_s} = -\frac{\partial L}{\partial q_s} \tag{3.5.25}$$

将式（3.5.25）第二式及式（3.5.24）代入式（3.5.22），得到

$$\dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta a_{\varepsilon+\beta, s} \tag{3.5.26}$$

于是 Routh 方程（3.5.22）的正则形式为

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta a_{\varepsilon+\beta, s}, \quad (s=1, \cdots, n) \tag{3.5.27}$$

正则方程（3.5.27）联同约束方程（3.5.20），便可求解 q_s，p_s，λ_β 作为时间的函数。

非完整系统 Routh 方程的正则形式（3.5.27）的第二组比完整系统的多出了带乘子的项 $\sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta a_{\varepsilon+\beta, s}$。如在运动微分方程积分之前解出 λ_β 作为 q, $\dot{q}$, t, $a_{\varepsilon+\beta, s}$ 和 $a_{\varepsilon+\beta}$ 的函数，则多出的项为

q, p, t 的函数，这样便实现了正则化。

如果系统所受约束是非线性的

$$f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t)=0, \qquad (\beta=1, \cdots, g; \ s=1, \cdots, n) \tag{3.5.28}$$

则 Routh 方程（3.1.45）的正则形式为

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}, \ \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}, \qquad (s=1, \cdots, n) \tag{3.5.29}$$

其中第二组方程右端第二项需换成（q, p, t）的函数。

例 2 Appell-Hamel 例

问题的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)-mgq_3 \tag{a}$$

约束可表为

$$f=\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2-\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_3^2=0 \tag{b}$$

在§3.1例5中已解出不定乘子

$$\lambda=-\frac{mg\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_3}{2\left(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\frac{a^4}{b^4}\dot{q}_3^2\right)} \tag{c}$$

广义动量为

$$p_1=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=m\dot{q}_1, \quad p_2=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}=m\dot{q}_2, \quad p_3=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}=m\dot{q}_3 \tag{d}$$

Hamilton 函数为

$$H=\sum_{s=1}^{3}p_s\dot{q}_s-L=\frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+mgq_3 \tag{e}$$

正则方程（3.5.29）的第一组为

$$\dot{q}_1=\frac{\partial H}{\partial p_1}=\frac{p_1}{m},\quad \dot{q}_2=\frac{p_2}{m},\quad \dot{q}_3=\frac{p_3}{m} \tag{f}$$

为求第二组方程，需将式（c）和（d）代入右端第二项，以消去λ和$\dot{q}_4$，我们有

$$\dot{p}_1=-\frac{\partial H}{\partial q_1}+\lambda\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1}=2\lambda\dot{q}_1=-\frac{mg\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_3\dot{q}_1}{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\frac{a^4}{b^4}\dot{q}_3^2}$$

$$=-\frac{mg\frac{a^2}{b^2}p_3p_1}{p_1^2+p_2^2+\frac{a^4}{b^4}p_3^2} \tag{g}$$

类似地，有

$$\dot{p}_2=-\frac{mg\frac{a^2}{b^2}p_3p_2}{p_1^2+p_2^2+\frac{a^4}{b^4}p_3^2},\quad \dot{p}_3=-\frac{mg(p_1^2+p_2^2)}{p_1^2+p_2^2+\frac{a^4}{b^4}p_3^2} \tag{h}$$

方程（f）、（g）和（h）即为所求正则方程。

2. Чаплыгин 方程的正则形式

如果非完整约束是线性、齐次、定常的

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\dot{q}_\sigma,\qquad(\beta=1,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g) \tag{3.5.30}$$

且$B_{\varepsilon+\beta,\sigma}$中不含$q_{\varepsilon+\gamma}$，系统动能$T$中不含$q_{\varepsilon+\gamma}$，且势能$V$不含$q_{\varepsilon+\gamma}$，则运动方程可写成形式（3.1.89），即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}\right)\dot{q}_\nu=0,\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.5.31}$$

因方程（3.5.31）中仅包含独立的广义速度 $\dot{q}_\sigma(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)$ 以及与其相应的广义坐标 q_σ，因此，为了将 Чаплыгин 方程写成正则形式，只要引出 $\varepsilon=n-g$ 个广义动量

$$p_\sigma=\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_\sigma},\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\qquad(3.5.32)$$

并取函数

$$\tilde{H}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}p_\sigma\dot{q}_\sigma-\tilde{L}\qquad(3.5.33)$$

就够了。于是，有

$$\dot{q}_\sigma=\frac{\partial\tilde{H}}{\partial p_\sigma},\quad\frac{\partial\tilde{H}}{\partial q_\sigma}=-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_\sigma}\qquad(3.5.34)$$

而 Чаплыгин 方程（3.5.31）引向正则形式

$$\dot{q}_\sigma=\frac{\partial\tilde{H}}{\partial p_\sigma},$$

$$\dot{p}_\sigma=-\frac{\partial\tilde{H}}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}\right)\frac{\partial\tilde{H}}{\partial p_\nu},$$

$$(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\qquad(3.5.35)$$

其中 $(\partial L/\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta})$ 表示 $\partial L/\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 中借助非完整约束(3.5.30)以及关系（3.5.32）消去全部广义速度所得到的表达式。方程（3.5.35）组成为确定 q_σ、$p_\sigma(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)$ 作为时间 t 的函数的 2ε 个方程的完全方程组。

3. Boltzmann-Hamel 方程的正则形式

设系统所受非完整约束为线性、齐次、定常的，广义力是有势的，则系统的 Boltzmann-Hamel 方程（3.1.95）可写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial\omega_\sigma}-\frac{\partial L^*}{\partial\pi_\sigma}+\sum_{r=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\frac{\partial L^*}{\partial\omega_r}\gamma_{\nu\sigma}^{r}\omega_\nu=0,$$

$$(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\quad(3.5.36)$$

其中 L^* 为 L 中广义速度用准速度替代所得到的表达式，L^* 一般说来依赖于所有准速度 $\omega_s(s=1,\cdots,n)$。后面 g 个准速度按约束

方程左端选取，有

$$\omega_{\varepsilon+\beta}=\sum_{s=1}^{n}a_{\varepsilon+\beta,s}\dot{q}_s=0,\qquad(\beta=1,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g)$$

(3.5.37)

因此有

$$\dot{q}_s=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}b_{s\sigma}\omega_\sigma,\qquad(s=1,\cdots,n)\qquad(3.5.38)$$

方程（3.5.36）和（3.5.38）组成为确定 q_s，ω_σ 作为时间 t 的函数的 $2n-g$ 个方程的完全组。

引入 n 个广义动量

$$p_s=\frac{\partial L^*}{\partial\omega_s},\qquad(s=1,\cdots,n)\qquad(3.5.39)$$

以及函数 H^*

$$H^*=\sum_{s=1}^{n}p_s\omega_s-L^*\qquad(3.5.40)$$

对式（3.5.40）取变分，并注意到式（3.5.39）和（3.5.38），得到

$$\delta H^*=\sum_{s=1}^{n}\omega_s\delta p_s+\sum_{s=1}^{n}p_s\delta\omega_s-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial q_s}\delta q_s-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial\omega_s}\delta\omega_s$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\omega_s\delta p_s-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial\pi_s}\delta\pi_s\qquad(3.5.41)$$

另一方面，对 $H^*(q_s,p_s,t)$ 取变分，有

$$\delta H^*=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H^*}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H^*}{\partial\omega_s}\delta\omega_s$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H^*}{\partial\pi_s}\delta\pi_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H^*}{\partial\omega_s}\delta\omega_s\qquad(3.5.42)$$

比较式（3.5.41）和（3.5.42），得到

$$\omega_s=\frac{\partial H^*}{\partial p_s}, \quad -\frac{\partial L^*}{\partial \pi_s}=\frac{\partial H^*}{\partial \pi_s}, \qquad (s=1, \cdots, n) \quad (3.5.43)$$

利用式（3.5.43），Boltzmann-Hamel 方程（3.5.36）可表为正则形式

$$\omega_\sigma=\frac{\partial H^*}{\partial p_\sigma}, \quad \dot{p}_\sigma=-\frac{\partial H^*}{\partial \pi_\sigma}-\sum_{r=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{\epsilon}\gamma^r_{\nu\sigma}p_r\frac{\partial H^*}{\partial p_\nu},$$

$$(\sigma=1, \cdots, \epsilon) \quad (3.5.44)$$

对方程（3.5.44）还需加上以下两组关系。一组关系是由式（3.5.43）利用条件（3.5.37）得到的，即

$$\frac{\partial H^*}{\partial p_{\epsilon+\beta}}=0, \qquad (\beta=1, \cdots, g; \ \epsilon=n-g) \quad (3.5.45)$$

另一组关系是式（3.5.38），利用式（3.5.43），可写成

$$\dot{q}_s=\sum_{\sigma=1}^{\epsilon}b_{s\sigma}\frac{\partial H^*}{\partial p_\sigma}, \qquad (s=1, \cdots, n) \quad (3.5.46)$$

于是，方程（3.5.44）、（3.5.45）和（3.5.46）组成为确定 q_s，p_s、ω_σ($s=1, \cdots, n$; $\sigma=1, \cdots, \epsilon$)作为时间 t 的函数的 $3n-g$ 个方程的完全组。

§3.6 历 史 资 料

3.6.1 名家介绍

C. A. Чаплыгин（1869—1942） 俄国、苏联力学家。他以气体动力学中的天才发现而知名。他又是非完整力学的奠基人之一。他建立了非完整系统的Чаплыгин 方程（1897），指出了积分一类非完整系统方程的导出乘子法（1911）等。

V. Volterra（1860—1940） 意大利数学家。他以积分方程中的卓越贡献而知名。他又是非完整力学的奠基人之一。他提出了“运动学特性”（即准速度）的概念，得到了非完整系统的一

类运动方程（1898）。

P. Appell（1855—1930）　法国数学家、力学家。他是非完整力学的奠基人之一。他得到了适合完整系统和非完整系统的一类运动方程，即 Appell 方程（1899）。他的 5 卷巨著《理性力学》是分析力学的名著。

G. Hamel（1877—1954）　德国数学家、力学家。他是非完整力学的奠基人之一。他提出了非完整系统准坐标下的运动方程（1904）。他的著作《理论力学》（1949）也相当有名。

П. В. Воронец（1871—1923）　俄国力学家。他是非完整力学的奠基人之一。他在非完整动力学，动力学方程——变换理论和积分理论，刚体动力学以及 n 体问题等领域有过重要贡献。

И. Ценов（1885—1967）　保加利亚数学家、力学家。他在分析力学中的主要贡献有：提出非完整系统的一类混合型方程（1924），高阶方程（1953）等。

3.6.2 关于分析力学的运动方程

本章 § 3.1 中讨论了 Euler-Lagrange 体系的方程，包括完整系统的第二类 Lagrange 方程；一阶非完整系统的 Routh 方程，Mac-Millan 方程，Volterra 方程，Чаплыгин 方程和 Boltzmann-Hamel 方程；以及高阶非完整系统的广义 Чаплыгин 方程。

在 § 3.2 中讨论了 Nielsen 体系的方程，包括完整系统的 Nielsen 方程；一阶非完整系统的带乘子的 Nielsen 方程，Nielsen 自然方程，广义坐标下的广义 Nielsen 方程，准坐标下第一形式的和第二形式的广义 Nielsen 方程；以及高阶非完整系统的广义 Nielsen 方程。在 § 3.2 中还证明了 Euler-Lagrange 体系方程与 Nielsen 体系方程的等价关系。

在 § 3.3 中讨论了 Appell 体系的方程，包括 Appell 方程和 Ценов 方程及其近代发展。

在§3.4中讨论了两类混合型方程。一类是上述三大体系方程的两两混合，另一类是新的混合型方程。

在§3.5中讨论了完整系统和一阶非完整系统正则形式的方程。

本章所讨论的方程包括了Lagrange力学和Hamilton力学的基本方程，完整系统与非完整系统的动力学方程，一阶非完整系统和高阶非完整系统的动力学方程。各种各样的动力学方程都有各自的特点，各自的长处和短处，在具体应用时可按问题的性质与需要选用合宜的方程。

习　　题

1．试由Mac-Millan方程（3.1.55）出发导出广义Чаплыгин方程（3.1.30）。

2．试推导变质量完整系统准坐标下的Чаплыгин方程

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{Д T}{Д\omega_s}-\frac{Д T}{Д\pi_s}-\sum_{k=1}^{n}\frac{Д T}{Д\dot{q}_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial\omega_s}-\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial\pi_s}\right)=Q_s+\Psi_s$$

$$(s=1,\cdots,n)$$

其中Д为把质量当作常数时的偏导数记号，$\frac{D}{Dt}$为把质量当作常数时对时间的导数，Ψ_s为广义反推力，有

$$\Psi_s=\sum_{i=1}^{N}\dot{m}_i\boldsymbol{u}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}$$

这里$\boldsymbol{u}_i$为微粒分离的相对速度。

3．试由方程（3.2.33）导出广义Nielsen方程（3.2.35）。

4．试证明，对任意函数$f(m_i, q_s, \dot{q}_s, t)$，有

$$N^t=E^t$$

其中

$$N^t=\frac{Д}{Д\dot{q}_s}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}-2\frac{Д}{Д q_s},\quad E^t=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{Д}{Д\dot{q}_s}-\frac{Д}{Д q_s}$$

5．设与刚体相固联的轴为惯性主轴，角速度在这些轴上的投影取为准速度 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$。试证，对定点转动刚体，准速度下的 Цепов 函数为

$$K^* = \frac{1}{2}(J_1\dot{\omega}_1^2 + J_2\dot{\omega}_2^2 + J_3\dot{\omega}_3^2) + \dot{\omega}_1\omega_2\omega_3(J_3 - J_2) + \dot{\omega}_2\omega_3\omega_1(J_1 - J_3)$$

$$+ \dot{\omega}_3\omega_1\omega_2(J_2 - J_1) - \frac{Q_\psi}{\sin\theta}(\dot{\omega}_1\sin\varphi + \dot{\omega}_2\cos\varphi)$$

$$- Q_\varphi\{\dot{\omega}_3 - (\dot{\omega}_1\sin\varphi + \dot{\omega}_2\cos\varphi)\mathrm{ctg}\,\theta\} - Q_\theta(\dot{\omega}_1\cos\varphi - \dot{\omega}_2\sin\varphi)$$

并由此导出 Euler 动力学方程。

6．试导出完整系统关于广义速度的 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} - \frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_s} = Q_s^* \qquad (s = 1, \cdots, n)$$

其中

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}_i$$

为系统的加速度能量，而

$$Q_s^* = \sum_{i=1}^{N} \dot{\boldsymbol{F}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}$$

这里 $\dot{\boldsymbol{F}}_i$ 为作用在第 i 个质量上的主动力对时间的导数。

参 考 文 献

〔1〕 Santilli RM. Foundations of theoretical mechanics. Vol. I, Berlin: S-V., 1978.

〔2〕 梅凤翔.分析力学专题.北京：北京工业学院出版社，1988.

〔3〕 Desloge EA. Classical mechanics. Ⅱ. New York: John Wiley & Sons, 1982.

〔4〕 Лурье АИ. Аналитическая механика. М: ГИФМЛ, 1961.

〔5〕 Новоселов ВС. Сведение задачи неголономной механики к условной задаче механики голономных систем. Механика. Уч. зап. ЛГУ, №217, 1957.

〔6〕 牛青萍.经典力学基本微分原理与不完整力学组的运动方程.力学学报，第7卷第2期，1964.

〔7〕 梅凤翔.非完整系统力学基础.北京:北京工业学院出版社,1985.

〔8〕 梅凤翔.Mac-Millan方程对非线性非完整系统的推广.应用数学和力学，第5卷第5期，1984.

〔9〕 Mac-Millan. Dynamics of rigid bodies. New York and London, 1936.

〔10〕 梅凤翔.Volterra方程对非线性非完整系统的推广.兵工学报，1，1985.

〔11〕 Шаги-Султан И З. Метод кинематических характеристик в аналитической механике. Алма-Ата, 1966.

〔12〕 Неймарк Ю И, Фуфаев НА. Динамика неголономных систем. М: Наука, 1967.

〔13〕 Volterra V. Sopra una classe di equazioni dinamiche. Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, V. 33,1898.

〔14〕 陈滨.分析动力学.北京：北京大学出版社，1987.

〔15〕 Новоселов В С. Расширенные уравнениях движения Нелинейных неголономных систем. Механика, уч. 3 ап. ЛГУ, No217, 1957.

〔16〕 Воронец П В. Об уравнениях движения для неголономных систем. Мат. сб., Т. 22, Вып. 4, 1901.

〔17〕 Чаплыгин С А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. Труды отделения физических наук общества любителей естествознания, антрополотии и этнографии, т. 9, вып. 1, 1897.

〔18〕 Hamel G. Theoretische Mechanik. Berlin; S-V, 1949.

〔19〕 刘正福，金伏生，梅凤翔.分析力学中的高阶Nielsen算子和高阶Euler算子.应用数学和力学，第7卷第1期，1986.

〔20〕 Mei Fengxiang. *Nouvelles équations du mouvement des systèmes mécaniques non-holonomes*. Thèse d'Etat. Nantes: ENSM, Mai, 1982.

〔21〕 Nielsen J. Vorlesungen Über elementare Mechanik. Berlin;

S-V, 1935.

〔22〕 Добронравов В В. Основы механики неголономных систем. М: Высшая школа, 1970.

〔23〕 梅凤翔.非完整力学系统的广义 Nielsen 方程.力学与实践，第 2 卷第 3 期，1980.

〔24〕 梅凤翔.分析力学中的 Nielsen 算子和 Euler 算子.力学学报，第 16 卷第 6 期，1984.

〔25〕 梅凤翔.非完整动力学研究.北京：北京工业学院出版社，1987.

〔26〕 Исполов ЮГ. Об уравнениях Аппеля в нелинейных квазиускорениях и квазискоростях. ПММ, Т. 46, вып.3, 1982.

〔27〕 Погосов Г С. Уравнения движения для систем с неголономными нелинейными связями. Вестн. МГУ, No 10, 1948.

〔28〕 Appell P. Exemple de mouvement d'un point assujetti à une liaison exprimée par une relation non linéaire entre les composantes de la vitesse. Rendel circole mathematic di Parlermo, T.32, 1911.

〔29〕 Гантмахер Ф Р. Лекции по аналитической механике. М: ГИФМЛ, 1960.

〔30〕 袁士杰，梅凤翔.关于准速度和准加速度表示的 Appell 方程.力学学报，第 19 卷第 2 期，1987.

〔31〕 Yuan Shijie, Mei Fengxiang. Appell equations in terms of quasi-velocities and quasi-accelerations. Acta Mechanica Sinica, Vol.3, No.3, 1987.

〔32〕 罗勇，刘桂林.变质量高阶非完整力学系统的两类新型方程.北京工业学院学报，3，1987.

〔33〕 Ценов И. Об одной форме уравнений аналитической механики. ДАНСССР, Т.89, No 1, 1953.

〔34〕 Mangeron D, Deleanu S. Sur une classe d'équations de la mécanique analytique au sens de I. Tzénoff. Докл. Болг. АН, Т.15, No 1, 1962.

〔35〕 Dolaptchiew B. Sur les systèmes mécaniques non holonomes assujettis à les liaisons arbitraires. C. R. Acad. Sc. Paris, t.262, No 11, 1966.

〔36〕 Tzénoff I. Sur les équations du mouvement des systèmes matériels non holonomes. Math. Annalen, Leipzig, B.91, 1924.

〔37〕 Mićević Dušan, Rusov Lazar. Nove forme jednačina analitičke mechanike. 3 б. рад. мат. ин-т, Београд, 4, 1984.

〔38〕 申泽淳，梅凤翔. 关于高阶非完整系统的一类新型运动微分方程，应用数学和力学，第8卷第2期，1987.

第四章 分析力学的某些专门问题

分析力学的理论与方法广泛应用于许多经典问题与近代问题。

本章讨论运动稳定性和小振动理论、刚体绕固定点转动问题、相对运动动力学、可控力学系统的分析动力学、打击运动的分析动力学、变质量问题的分析动力学、机电系统的分析动力学、事件空间的分析动力学以及分析动力学逆问题等九个彼此独立的专题。

§4.1 运动稳定性和小振动理论

本节讨论两个相关的问题：运动稳定性和小振动。由 Poincaré 和 Ляпунов 创立的运动稳定性理论广泛应用于陀螺力学、自动控制、机器的运转、电力的传输、飞行器姿态动力学等方面。小振动是发生在系统稳定平衡位置附近的振动。本节简要地讨论完整系统平衡的稳定性和运动稳定性，完整系统的小振动，以及非完整系统平衡状态附近的小振动等。

4.1.1 完整系统平衡的稳定性和运动稳定性

1. 完整系统的平衡条件及平衡位置的稳定性

设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定，系统的平衡位置为 $q_s^0(s=1,\cdots,n)$。由方程 (3.1.11)，得到平衡条件

$$\left(-\frac{\partial B_s}{\partial t}\right)_0+\left(\frac{\partial T_0}{\partial q_s}\right)_0+(Q_s)_0=0, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.1.1}$$

如果约束是定常的，则 q_s^0 为平衡位置的充要条件是

$$(Q_s)_0=0, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.1.2}$$

通过简单的平移变换，可使平衡位置变到

$$q_1^0=q_2^0=\cdots=q_n^0=0 \tag{4.1.3}$$

定义 1 对任意的 $\varepsilon>0$，总可以找到 $\eta=\eta(\varepsilon)>0$，使得只要在初始时刻 $t=t_0$

$$|q_s^0|<\eta, \ |\dot{q}_s^0|<\eta, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.1.4}$$

对 $t\geqslant t_0$ 就满足不等式

$$|q_s(t)|<\varepsilon, \ |\dot{q}_s(t)|<\varepsilon, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.1.5}$$

具有这样性质的平衡位置 $q_s^0=0(s=1,\cdots,n)$ 称为稳定的平衡位置。反之，不具有上述条件的平衡位置称为不稳定的平衡位置。

定义 2 所谓保守系统是指系统所受约束是理想的、完整的、定常的，主动力有势，且势能不显含时间。

下述定理给出判别保守系统平衡位置稳定性的准则。

定理 1（Lagrange-Dirichlet） 如果在保守系统的某个平衡位置上势能有严格的极小，那么此位置是系统稳定的平衡位置。

证明参见文献[1,2]。

2．完整系统运动稳定性的一些概念和结论

首先，讨论一些基本概念。

完整力学系统的运动微分方程（3.1.11)可化成 $2n$ 个一阶方程，记作

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}=Y_i(y_j,t), \qquad (i,j=1,\cdots,m) \tag{4.1.6}$$

其中 $m=2n$。令

$$y_i=f_i(t), \qquad (i=1,\cdots,m) \tag{4.1.7}$$

是方程（4.1.6)的一个特解，称之为未扰运动。其它的运动 $y_i(t)$ 称之为受扰运动。令

$$x_i=y_i(t)-f_i(t), \qquad (i=1,\cdots,m) \tag{4.1.8}$$

并称之为扰动，则式（4.1.6）成为

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=Y_i(x_j+f_j,t)-Y_i(f_j,t)\equiv X_i(x_j,t), \qquad (i,j=1,\cdots,m) \tag{4.1.9}$$

显然有

$$X_i(0,t)=0 \tag{4.1.10}$$

这样，原系统的未扰运动就化成以扰动 x_i 为变量的系统的零解，而原系统未扰运动的稳定性就相应于系统（4.1.9）的零解稳定性。

定义 3 如果对于任意正数 ε，无论它多么小，总可以找到一个相应的 $\eta=\eta(\varepsilon)>0$，使得对于所有受扰运动 $y_i=y_i(t)$，当其在初始时刻 $t=t_0$ 时满足不等式

$$|y_i(t_0)-f_i(t_0)|\leqslant\eta \tag{4.1.11}$$

而在所有 $t>t_0$ 时，满足不等式

$$|y_i(t)-f_i(t)|<\varepsilon \tag{4.1.12}$$

则称未扰运动对于量 y_i 是 Ляпунов 意义下稳定的。反之，称为 Ляпунов 意义下不稳定的运动。

定义 4 如果对于任意正数 ε，无论它多么小，总可以找到一个相应的正数 $\eta(\varepsilon)$，使得对于所有受扰运动，当其初始时刻 t_0 时满足 $|x_i(t_0)|<\eta$，而在所有 $t>t_0$ 时，满足 $|x_i(t)|<\varepsilon$，则未扰运动是 Ляпунов 意义下稳定的。

定义 5 如果未扰运动是稳定的，并且数 η 可选得如此之小，使得满足 $|x_i(t_0)|\leqslant\eta$ 的未扰运动满足条件

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t)=0$$

则未扰运动称为 Ляпунов 意义下渐近稳定的。

其次，给出关于稳定性和不稳定性的一些定理。

定理 2（Ляпунов） 如果对于受扰运动微分方程(4.1.9)，可以找到一个定号函数 V，而由受扰运动方程求出的 $\dot{V}$ 是与 V

异号的常号函数或者恒等于零，则未扰运动 $x_i=0(i=1,\cdots,m)$ 是稳定的。

定理 3 （Ляпунов） 如果对于受扰运动微分方程(4.1.9)，可以找到一个定号函数 V，它具有无穷小上界，而由于运动方程求出的 $\dot{V}$ 是与 V 异号的定号函数，则未扰运动 $x_i=0(i=1,\cdots,m)$ 是渐近稳定的。

定理 4 （Четаев） 对于扰动方程(4.1.9)，如能找到这样的函数 V，使得在某个区域 $D(t_0,H):\left\{t\geqslant t_0,\ \sum_{i=1}^{m}x_i^2\leqslant H\right\}$ 内，有：(1) V 在 $V>0$ 区域内有界；(2) $V>0$ 的区域对于任何的 $t\geqslant t_0$ 及绝对值任意小的变数 x_i 都存在；(3) $\dot{V}$ 在 $V>0$ 区域内正定。那么，未扰运动 $x_i=0(i=1,\cdots,m)$ 是不稳定的。

定理2～4的证明参见文献[1,2]或运动稳定性的有关专著。

最后，讨论线性系统的稳定性与按线性近似来决定稳定性的问题。

扰动方程（4.1.9）的一个特殊情形是常系数线性系统

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j,\qquad (i=1,\cdots,m) \tag{4.1.13}$$

如令 $x=[x_1,\cdots,x_m]^T$，则可写成矩阵形式

$$\dot{x}=Ax \tag{4.1.14}$$

其中

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1m} \\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mm} \end{Vmatrix}$$

方程（4.1.14）的通解为

$$x=\sum_{i=1}^{m}c_i(u_i+u'_i t+\cdots)\ \mathrm{e}^{\lambda_i t} \tag{4.1.15}$$

其中 λ_i 是矩阵 A 的特征根，满足特征方程

$$\det[A-\lambda E]=0 \tag{4.1.16}$$

由此可得关于常系数线性系统零解稳定性的结论：（1）如果矩阵A的特征根λ_i都有负实部，则有

$$\lim_{t\to+\infty} x(t)=0$$

因此，系统（4.1.14）的零解是渐近稳定的。（2）矩阵A的特征根λ_i中只要有一个具有正实部，那么系统（4.1.14）的零解便是不稳定的。

特征方程（4.1.16）可表为带实系数的代数方程

$$f(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0,\quad (a_0>0) \tag{4.1.17}$$

方程（4.1.17）的系数组成 Hurwitz 行列式

$$\Delta_1=a_1,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ a_0 & a_2\end{vmatrix},\ \cdots,\ \Delta_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5\cdots\\ a_0 & a_2 & a_4\cdots\\ 0 & a_1 & a_3\cdots\\ 0 & a_0 & a_2\cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots a_n\end{vmatrix} \tag{4.1.18}$$

我们有 Routh-Hurwitz 条件：使方程（4.1.17）的所有根有负实部的充要条件是

$$\Delta_1>0,\ \Delta_2>0,\cdots,\Delta_n>0 \tag{4.1.19}$$

线性系统的稳定性在一定程度上回答了非线性系统的稳定性问题。注意到$X_i(0,t)=0$，可将式（4.1.9）右端在$x_i=0(i=1,\cdots,m)$处展开，得到

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j+\widetilde{X}_i,\qquad (i=1,\cdots,m) \tag{4.1.20}$$

其中$\widetilde{X}_i$对x_j的展开式最低项是二次项。如果在方程（4.1.20）中略去高阶项$\widetilde{X}_i$，便得线性近似方程

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j,\qquad (i=1,\cdots,m) \tag{4.1.21}$$

当所有 X_i 不显含 t 或为 t 的周期函数时，a_{ij} 和 $\tilde{X}_i$ 也不显含 t 或为 t 的周期函数，在这两种情形下有如下结论：（1）如果线性近似方程(4.1.21)的零解是渐近稳定的，那么原扰动方程(4.1.9)的零解也是渐近稳定的；（2）如果线性近似方程的特征根中至少有一个具有正实部，那么原扰动方程（4.1.9）的零解是不稳定的。

当线性近似方程的特征根有一部分具有负实部，一部分具有零实部的临界情形，需要研究非线性项对稳定性的影响。

例 1 炮弹旋转运动的稳定性[3]

假设炮弹质心作匀速直线运动，β 为炮弹轴与该轴在发射的铅垂平面上的投影之间的夹角，α 为这个投影与炮弹质心轨迹之间的夹角，则运动方程为[3]

$$\begin{aligned}&A\ddot{\beta}+A\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta-Cn\dot{\alpha}\cos\beta=eR\sin\beta\cos\alpha\\&A\ddot{\alpha}\cos\beta-2A\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta+Cn\dot{\beta}\quad=eR\sin\alpha\end{aligned}\qquad (a)$$

其中 C 为炮弹的轴惯性矩，A 为对过质心的横轴的惯性矩，n 为炮弹旋转角速度在其对称轴上的常量投影，e 为质心和压力中心间的距离，R 为迎面阻力，这些都是常数。

方程（a）有特解

$$\alpha=\dot{\alpha}=\beta=\dot{\beta}=0 \qquad (b)$$

取此运动为未扰运动。将方程（a）中第一个方程乘以 $\dot{\beta}$，第二个乘以 $\dot{\alpha}\cos\beta$，然后相加并积分得

$$\begin{aligned}F_1(\alpha,\dot{\alpha},\beta,\dot{\beta})=&\frac{1}{2}A(\dot{\beta}^2+\dot{\alpha}^2\cos^2\beta)\\&+eR(\cos\alpha\cos\beta-1)=\text{const.}\end{aligned}\qquad (c)$$

将方程（a）中第一个方程乘以 $\sin\alpha$，第二个乘以 $\sin\beta\cos\alpha$，然后相减并积分得

$$\begin{aligned}F_2(\alpha,\dot{\alpha},\beta,\dot{\beta})=&A(\dot{\beta}\sin\alpha-\dot{\alpha}\cos\beta\sin\beta\cos\alpha)\\&+Cn(\cos\alpha\cos\beta-1)=\text{const.}\end{aligned}\qquad (d)$$

这两个积分（c）和（d）都不是定号的。现作一新积分

$$V=F_1-\lambda F_2=\text{const}.$$

其中λ是某个常数，我们有$\dot{V}=0$。将函数V展开，得

$$V=\frac{1}{2}\{A\dot{\alpha}^2+(Cn\lambda-eR)\beta^2+2A\lambda\dot{\alpha}\beta\}$$

$$+\frac{1}{2}\{A\dot{\beta}^2+(Cn\lambda-eR)\alpha^2-2A\lambda\dot{\beta}\alpha\}+\cdots \qquad (e)$$

其中未写出之项是不低于三次的，忽略它们不影响V的定号性。由此看出，只要二次型

$$Ax^2+(Cn\lambda-eR)y^2\pm 2A\lambda xy \qquad (f)$$

是正定的，那么V将是正定的。式（f）为正定的充要条件是

$$A>0,\ f(\lambda)=A\lambda^2-Cn\lambda+eR<0 \qquad (g)$$

由此得知，只要

$$A>0,\ C^2n^2-4AeR>0 \qquad (i)$$

按定理2，运动就是稳定的。

下面研究按线性近似来决定稳定性问题。忽略方程（a）中带$\dot{\alpha}^2, \dot{\alpha}\dot{\beta}$，以及更高阶的项，有

$$A\ddot{\beta}-Cn\dot{\alpha}-eR\beta=0,\ A\ddot{\alpha}+Cn\dot{\beta}-eR\alpha=0 \qquad (j)$$

令$x_1=\alpha$，$x_2=\dot{\alpha}$，$x_3=\beta$，$x_4=\dot{\beta}$，则形如（4.1.13）的方程为

$$\dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=-\frac{Cn}{A}x_4+\frac{eR}{A}x_1,\ \dot{x}_3=x_4,\ \dot{x}_4=\frac{Cn}{A}x_2+\frac{eR}{A}x_3$$

特征方程（4.1.16）给出

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ \frac{eR}{A} & -\lambda & 0 & -\frac{Cn}{A} \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{Cn}{A} & \frac{eR}{A} & -\lambda \end{vmatrix}=0$$

即

$$\left(\lambda^2-\frac{eR}{A}\right)^2+\frac{C^2n^2}{A^2}\lambda^2=0$$

由此解得

$$\lambda=\frac{\pm Cni\pm\sqrt{4AeR-C^2n^2}}{2A} \tag{k}$$

因此，如满足

$$4AeR-C^2n^2>0$$

则两个根有正实部，未扰运动是不稳定的。如满足

$$4AeR-C^2n^2<0$$

则特征方程的四个根都是纯虚数。此时，有临界情形，欲判断稳定性，需进一步研究方程（a）中的非线性部分。‖

4.1.2 完整系统的小振动

小振动是自然界和工程实际中常见的一种现象。用分析力学的方法研究力学系统的小振动，可以得到具有极为概括的结果。

1. 保守系统的小振动

研究约束是理想双面完整的、定常的，力是有势的，且$\frac{\partial V}{\partial t}=0$的系统在稳定平衡位置附近的小振动。设系统位形由$n$个广义坐标$q_s(s=1,\cdots,n)$来确定，稳定平衡位置为$q_s=0$。系统的动能和势能为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}(q_r)\dot{q}_s\dot{q}_k,\quad V=V(q_s),\qquad (s=1,\cdots,n)$$

且

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_s}\right)_0=0,\qquad (s=1,\cdots,n)$$

假设$V(0)=0$，于是在原点邻近展开T,V，得

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k+\cdots,\quad V=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{sk}q_sq_k+\cdots \tag{4.1.22}$$

其中$a_{sk}=A_{sk}(0)$。式（4.1.22）中的两个二次型的系数都是常数，并且分别为广义速度和广义坐标的正定二次型。在小振动情

形下，高阶项可以略去不计。于是

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k,\quad V=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{sk}q_sq_k \tag{4.1.23}$$

其中 a_{sk},c_{sk} 均为常数，$\|a_{sk}\|$，$\|c_{sk}\|$ 都是正定矩阵。将式（4.1.23）代入 Lagrange 方程（3.1.4），得小振动方程

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{sk}\ddot{q}_k+c_{sk}q_k)=0,\qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.1.24}$$

用矩阵表为

$$A\ddot{q}+Cq=0 \tag{4.1.25}$$

其中 $q=[q_1,\cdots,q_n]^T$，$A=\begin{Vmatrix}a_{11}\cdots a_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{Vmatrix}$，$C=\begin{Vmatrix}c_{11}\cdots c_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ c_{n1}\cdots c_{nn}\end{Vmatrix}$

A，C 分别称为质量阵和刚度阵。

定义 6 振动系统的各广义坐标以同频率、同相位作谐振的特解称为主振动。

主振动的表达式为

$$q_s=u_s\sin(\omega t+\alpha),\qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.1.26}$$

其中 ω 称为主频率，非零矢量 $[u_1,\cdots,u_n]^T$ 称为与主频率 ω 相应的主振型矢量。将式（4.1.26）代入式（4.1.24），得到

$$\sum_{k=1}^{n}(c_{sk}-\omega^2a_{sk})u_k=0,\qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.1.27}$$

为保证主振型矢量非零，主频率必须满足方程

$$\det[c_{sk}-\omega^2a_{sk}]=0 \tag{4.1.28}$$

这就是主频率方程。

为用主振动这样的特解来构造振动系统的一般解，需要找出系统所有的主频率和所有相互线性独立的主振型。

定理 5（展开定理） 如果振动系统的频率方程 $\det[C-\lambda A]=0$ 的根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 互不相等，则系统的任一振动均可用主振动的线性组合来构成。

定理的证明见文献[2]。

2. 主坐标描述下的自由振动与强迫振动

首先，讨论自由振动。

设经过非奇异线性变换

$$q_s=\sum_{k=1}^{n}u_{sk}\theta_k,\qquad (s=1,\cdots,n)\qquad (4.1.29)$$

振动系统的动能和势能可表为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\dot{\theta}_s^2,\quad V=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\theta_s^2\qquad (4.1.30)$$

变量 $\theta_1,\cdots,\theta_n$ 称为主坐标。利用主坐标中的 T,V 表达式，Lagrange 方程（3.1.4）给出

$$\ddot{\theta}_s+\lambda_s\theta_s=0,\qquad (s=1,\cdots,n)\qquad (4.1.31)$$

这是分离变量的简单谐振子方程，其通解为

$$\theta_s=C_s\sin(\omega_s t+\alpha_s),\qquad (s=1,\cdots,n)\qquad (4.1.32)$$

即每个主坐标只发生与其相应的频率的振动，其频率 $\omega_s=\sqrt{\lambda_s}$ $(s=1,\cdots,n)$，而 C_s,α_s 为积分常数。广义坐标下的通解为

$$q_s=\sum_{k=1}^{n}u_{sk}C_k\sin(\omega_k t+\alpha_k),\qquad (s=1,\cdots,n)\quad (4.1.33)$$

在主坐标描述下，当系统某一主坐标发生振动，而其它主坐标全为零时，这种运动正是主振动。

其次，讨论强迫振动。

设在广义坐标 q_s 下，除由势能 V 产生的有势力外，还有随时间变化的强迫力

$$Q_s=Q_s(t),\qquad (s=1,\cdots,n)$$

在变换（4.1.29）下，与主坐标相应的广义力为

$$P_s=\sum_{k=1}^{n}u_{ks}Q_k,\qquad (s=1,\cdots,n)\qquad (4.1.34)$$

此时 Lagrange 方程给出

$$\ddot{\theta}_s+\omega_s^2\theta_s=P_s(t), \qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (4.1.35)$$

方程（4.1.35）的通解为

$$\theta_s(t)=C_s\sin(\omega_s t+\alpha_s)+\theta_s^*(t), \qquad (s=1,\cdots,n) \quad (4.1.36)$$

其中 $\theta_s^*(t)$ 是方程（4.1.35）的任一组特解，它反映了系统的强迫振动部分。第一部分决定了系统的自由振动部分，其中 C_s,α_s 为积分常数，由初始条件确定。假设

$$P_s(t)=A_s\sin\Omega t \qquad (4.1.37)$$

则

$$\theta_s^*(t)=\frac{A_s}{\omega_s^2-\Omega^2}\sin\Omega t \qquad (4.1.38)$$

当强迫力频率 Ω 与系统某一主频率接近或重合，且 $A_s\neq0$，将出现共振现象。

例 2　耦合摆[1]

两质量为 m，长为 l 的同样数学摆的悬挂点在一水平线上。在离悬挂点为 h 处联一刚度为 k 的弹簧。当摆在铅垂位置时，弹簧处于未变形状态。试确定系统在铅垂平面内的小振动。

取摆与铅垂线夹角 φ_1,φ_2 为广义坐标。在平衡位置 $\varphi_1=\varphi_2=0$ 附近，系统势能为

$$V=\frac{1}{2}mgl(\varphi_1^2+\varphi_2^2)+\frac{1}{2}kh^2(\varphi_2-\varphi_1)^2\equiv\frac{1}{2}c(\varphi_1^2+\varphi_2^2)-b\varphi_1\varphi_2 \qquad (a)$$

动能为

$$T=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2)\equiv\frac{1}{2}a(\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2) \qquad (b)$$

其中　$a=ml^2$，$c=mgl+kh^2$，$b=kh^2$。

主频率方程（4.1.28）给出

$$\begin{vmatrix} c-\omega^2a & -b \\ -b & c-\omega^2a \end{vmatrix}=0 \qquad (c)$$

由此得主频率

$$\omega_1^2=\frac{c-b}{a}=\frac{g}{l}, \quad \omega_2^2=\frac{c+b}{a}=\frac{g}{l}+2\frac{kh^2}{ml^2} \qquad (d)$$

方程（4.1.27）中的一个为

$$(c-\lambda a)u_1-bu_2=0$$

即

$$\frac{u_1}{u_2}=\frac{b}{c-\lambda a} \tag{e}$$

对第一个主振动 $u_1=u_2=C_1$，有

$$\varphi_1=C_1\sin(\omega_1t+\alpha_1),\quad \varphi_2=C_1\sin(\omega_1t+\alpha_1)\qquad (\varphi_1=\varphi_2) \tag{f}$$

对第二个主振动 $u_1=-u_2=C_2$，有

$$\varphi_1=C_2\sin(\omega_2t+\alpha_2),\quad \varphi_2=-C_2\sin(\omega_2t+\alpha_2)\qquad (\varphi_1=-\varphi_2) \tag{g}$$

在第一个主振动中，两摆处于同一位相，弹簧不变形。在第二个主振动中，两摆反位相。

有了两个主振动，可得到任何振动

$$\begin{aligned}\varphi_1&=C_1\sin(\omega_1t+\alpha_1)+C_2\sin(\omega_2t+\alpha_2)\\ \varphi_2&=C_1\sin(\omega_1t+\alpha_1)-C_2\sin(\omega_2t+\alpha_2)\end{aligned} \tag{h}$$ ||

4.1.3 非完整系统平衡状态附近的小振动

1. 非完整系统平衡位置附近小振动的特点

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定，系统的运动受有 g 个线性齐次定常的非完整约束

$$\sum_{s=1}^{n}a_{\varepsilon+\beta,s}\dot{q}_s=0,\qquad (\beta=1,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g) \tag{4.1.39}$$

其中系数 $a_{\varepsilon+\beta,s}$ 不依赖于时间 t。假设广义力是有势的，势能 V 不含时间 t，而能量耗散用耗散函数 F 来表示，则系统运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta a_{\varepsilon+\beta,s}-\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_s},\qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.1.40}$$

其中　$L=T-V$。

现在设 $q_1=q_2=\cdots=q_n=0$ 是系统的平衡位置。由式(4.1.39)和（4.1.40）得知，在系统的平衡位置上满足关系

$$\frac{\partial V(0,\cdots,0)}{\partial q_s}-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta a_{\varepsilon+\beta,s}(0,\cdots,0)=0,\qquad (s=1,\cdots,n)\tag{4.1.41}$$

由式（4.1.41）知，当非完整系统平衡时，$\frac{\partial V}{\partial q_s}$ 不同于完整系统的情形，一般说不等于零。将V在平衡位置附近展开，得

$$V=V(0,\cdots,0)+\sum_{s=1}^{n}C_s^0q_s+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}C_{sk}^0q_sq_k+\cdots\tag{4.1.42}$$

其中

$$C_s^0=\left(\frac{\partial V}{\partial q_s}\right)_0,\quad C_{sk}^0=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_s\partial q_k}\right)_0$$

对于小量 $q_1,\cdots,q_n,\dot q_1,\cdots,\dot q_n$，函数$T$和$F$如同完整系统情形一样，是带常系数的广义速度的齐二次式

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}^0\dot q_s\dot q_k,\quad F=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}B_{sk}^0\dot q_s\dot q_k\tag{4.1.43}$$

带乘子的项的线性化给出

$$\begin{aligned}\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta a_{\varepsilon+\beta,s}&=\sum_{\beta=1}^{g}(\lambda_\beta^0+\lambda_\beta^1)\left(a_{\varepsilon+\beta}^0+\sum_{k=1}^{n}a_{\varepsilon+\beta,s}^kq_k+\cdots\right)\\&=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta^0a_{\varepsilon+\beta,s}^0+\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{k=1}^{n}\lambda_\beta^0a_{\varepsilon+\beta,s}^kq_k\\&\quad+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta^1a_{\varepsilon+\beta,s}^0+\cdots\end{aligned}\tag{4.1.44}$$

其中 $a_{\varepsilon+\beta,s}^0=a_{\varepsilon+\beta,s}(0,\cdots,0)$，$a_{\varepsilon+\beta,s}^k=\frac{\partial a_{\varepsilon+\beta,s}}{\partial q_k}$，$\lambda_\beta^0$ 为不定乘子 λ_β 在系统平衡位置的值。

将式（4.1.44）和（4.1.43）代入式（4.1.40）并注意到式（4.1.41），得到

$$\sum_{k=1}^{n} A_{sk}^{0}\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} B_{sk}^{0}\dot{q}_k + \sum_{k=1}^{n}\left(C_{sk}^{0} - \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_{\beta}^{0}a_{\varepsilon+\beta,s}^{k}\right)q_k$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_{\beta}^{1}a_{\varepsilon+\beta,s}^{0} = 0, \qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (4.1.45)$$

对这些方程还需补充非完整约束的线性化方程

$$\sum_{s=1}^{n} a_{\varepsilon+\beta,s}^{0}\dot{q}_s = 0, \qquad (\beta=1,\cdots,g) \qquad (4.1.46)$$

方程（4.1.45）和（4.1.46）称为非完整系统在平衡位置 $q_1=\cdots=q_n=0$ 附近的小振动方程。将形如

$$q_k = M_k e^{pt}, \quad \lambda_{\beta}^{1} = N_{\beta}e^{pt}, \qquad (k=1,\cdots,n;\ \beta=1,\cdots,g)$$

的解代入这些方程，得到特征方程

$$p^{g}\begin{vmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} & a_{\varepsilon+1,1}^{0} & \cdots & a_{n1}^{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn} & a_{\varepsilon+1,n}^{0} & \cdots & a_{nn}^{0} \\ a_{\varepsilon+1,1}^{0} & \cdots & a_{\varepsilon+1,n}^{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{0} & \cdots & a_{nn}^{0} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.1.47)$$

其中

$$P_{sk} = A_{sk}^{0}p^2 + B_{sk}^{0}p + C_{sk}^{0} - \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_{\beta}^{0}a_{\varepsilon+\beta,s}^{k}$$

由特征方程得知：（1）特征方程的系数矩阵不像完整系统那样有对称性，而是非对称的。（2）特征方程有 g 个零根。

非完整系统小振动的研究归结为研究线性微分方程（4.1.45）和（4.1.46）。但是，按小振动理论的通常提法，既不能给出稳定性的解答，也不能揭示零根的性质。

2. 非完整系统平衡状态的流形及其稳定性

现将方程（4.1.40）写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta a_{\varepsilon+\beta,s}, \qquad (s=1,\cdots,n)$$

(4.1.48)

其中 Q_s 为除有势力以外的广义力，它们可为 q_s，$\dot{q}_s$ 的函数。由式（4.1.48）得知，非完整系统的平衡状态满足方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}+Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta a_{\varepsilon+\beta,s}=0, \qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (4.1.49)$$

这是关于 $n+g$ 个未知量 q_s,λ_β 的 n 个方程，因此有 g 个量可以是任意的。在一般情形中，我们有非完整系统平衡状态的流形。此流形在 n 维空间中组成维数为 g 的曲面 O_g。曲面 O_g 用参数表示为

$$q_s^0=q_s^0(\lambda_1,\cdots,\lambda_g)$$

在实际问题中，方程（4.1.49）可能不全是独立的，此时平衡状态的维数将大于 g。

由于有平衡的流形，说到"非完整系统孤立平衡状态的稳定性"是没有意义的，或者说，非完整系统没有孤立的平衡状态。与此相关，关于非完整系统小振动问题的提法本身就应改变。正确提法是研究非完整系统在平衡状态的流形附近的小振动，而不是在孤立平衡状态的邻域。

可以证明[4]，在研究流形的稳定性时，可由式（4.1.47）简单地去掉零根的办法来得到特征方程。对这个特征方程，所有著名的稳定性判据都能应用。

例 3 斜面上的雪橇[4,5]

假设雪橇在与水平面成 α 角的斜平面上运动。设雪橇的刀片与斜面接触点 P 的坐标为 x,y，雪橇绕垂直于斜平面的直线的转角为 θ。质心 C 在斜平面上的投影位于垂直于刀片的平面上，距 P 为 l。对质心 C 的惯性半径为 k。系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m\{(\dot{x}+l\dot{\theta}\cos\theta)^2+(\dot{y}+l\dot{\theta}\sin\theta)^2+k^2\dot{\theta}^2\}$$

$$-mg(y-l\cos\theta)\sin\alpha \qquad (a)$$

设系统受有粘性阻尼，引入耗散函数

$$F=\frac{1}{2}m\{h(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+h_1\dot{\theta}^2\} \tag{b}$$

其中 $h\geqslant 0$，$h_1\geqslant 0$ 分别为滑动粘摩擦系数和旋转粘摩擦系数。

非完整约束方程为

$$\dot{y}-\dot{x}\operatorname{tg}\theta=0 \tag{c}$$

系统的 Routh 方程（4.1.40）给出

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}+l\dot{\theta}\cos\theta)+h\dot{x}+\frac{\lambda}{m}\operatorname{tg}\theta=0\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{y}+l\dot{\theta}\sin\theta)+h\dot{y}+g\sin\alpha-\frac{\lambda}{m}=0\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{l(\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta)+(l^2+k^2)\dot{\theta}\}+h_1\dot{\theta}+gl\sin\alpha\sin\theta=0
\end{aligned} \tag{d}$$

因此，平衡状态满足方程

$$\lambda\operatorname{tg}\theta=0,\quad \lambda=mg\sin\alpha,\quad \sin\theta=0 \tag{e}$$

此平衡状态在空间（x,y,θ）中组成两个平面：$\theta=0$和 $\theta=\pi$。系统有一个非完整约束方程，但非完整系统平衡状态流形的维数是 2 。这是因为方程（e）中第一与第三个方程相关。设 $x=x_0+\xi$，$y=y_0+\eta$，$\theta=\theta_0+\zeta$，$\lambda=\lambda_0+\kappa$，其中 $x_0,y_0,\theta_0,\lambda_0$ 为满足方程（e）的值，即

$$\lambda_0\operatorname{tg}\theta_0=0,\quad \lambda_0=mg\sin\alpha,\quad \sin\theta_0=0 \tag{f}$$

而 ξ,η,ζ,κ 为小量。对方程（c）、（d）实行线性化，有

$$\begin{aligned}
&\dot{\eta}=0,\quad \ddot{\xi}\pm l\ddot{\zeta}+h\dot{\xi}+g\zeta\sin\alpha=0\\
&\ddot{\eta}+h\dot{\eta}-\frac{\kappa}{m}=0,\quad (l^2+k^2)\ddot{\zeta}\pm l\ddot{\xi}+h_1\dot{\zeta}\pm gl\zeta\sin\alpha=0
\end{aligned} \tag{g}$$

其中加号对应 $\theta=0$，而减号对应 $\theta=\pi$。方程（g）的特征方程为

$$\begin{vmatrix}
0 & p & 0 & 0\\
p^2+hp & 0 & \pm lp^2+g\sin\alpha & 0\\
0 & p^2+hp & 0 & -\dfrac{1}{m}\\
\pm lp^2 & 0 & (l^2+k^2)p^2+h_1p\pm gl\sin\alpha & 0
\end{vmatrix}=0$$

即

$$p^2\{k^2p^3+[h(l^2+k^2)+h_1]p^2+hh_1p\pm hgl\sin\alpha\}=0 \qquad (h)$$

简单地去掉零根，研究括号内的多项 式。当 $\theta=\pi$ 时，最后一项系数是负的，这种情形是不稳定的。而当 $\theta=0$ 时，稳定性条件，按 Routh-Hurwitz 判据为

$$\Delta_1=h(l^2+k^2)+h_1>0$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} h(l^2+k^2)+h_1 & k^2 \\ hgl\sin\alpha & hh_1 \end{vmatrix}>0$$

设 $h>0$，$h_1>0$，则第一式满足。第二式成为

$$(l^2+k^2)h>\frac{k^2gl\sin\alpha}{h_1}-h_1 \qquad (i)$$

§4.2 刚体定点转动问题的分析动力学

重刚体绕固定点运动问题是理论力学中最激起好奇心的问题之一，寻求刚体动力学问题的精确解乃是分析力学的精华。

1758年 Euler 建立了刚体动力学方程并给出刚体动力学问题的一般提法。从1758年至1959年这二百年间得到了刚体绕定点转动问题的十二种解，其中三种为通解，九种为特解。各种解的发现没有一般方法，主要靠研究者的技巧，并且在很大程度上带有偶然性。

刚体动力学的新成就是本世纪后半期以苏联学 者 П. В. Харламов 为首的一批学者的贡献。根据已知积分将原始方 程组降阶的问题很早就提出来了，但著名的方法归结为异常笨重的、而因此实际上不适用的方程。Харламов 放弃传统的主轴，引入所谓专门坐标轴，新选取的基本变量在此坐标轴中以自 然 方 式建立，因此降阶基本完成。所 得 的 Харламов 方 程 是两个一阶方程。在对质量分布的一个限制下，Харламова 将问 题归结为一个积分-微分方程。

本节概要讨论刚体动力学的基本结果，包括 Euler-Poisson 方程及三个经典可积情形，Харламов 方程及其降阶问题，以及 Euler-Poisson 方程的若干特殊可积情形，最后讨论带有非完整约束的刚体定点转动问题。

4.2.1 Euler-Poisson 方程及三种经典可积情形

1. Euler-Poisson 方程

研究刚体在重力作用下绕固定点 O 的转动问题。设刚体总质量为 M，刚体质心在与刚体相固联的轴系中的坐标为 x_G, y_G, z_G。铅垂向上的单位矢量在动系上的投影为 $\gamma, \gamma', \gamma''$。假设动系轴为刚体对 O 的惯性主轴，惯性主矩为 A, B, C。刚体角速度在动系上的投影为 p, q, r。Euler 动力学方程为

$$
\begin{aligned}
&A\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+(C-B)qr=Mg(z_G\gamma'-y_G\gamma'') \\
&B\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+(A-C)rp=Mg(x_G\gamma''-z_G\gamma) \qquad (4.2.1) \\
&C\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+(B-A)pq=Mg(y_G\gamma-x_G\gamma')
\end{aligned}
$$

在 Euler 动力学方程（4.2.1）中出现时间 t 的六个未知函数 $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ 以及表征刚体质量分布的六个常数 A, B, C, x_G, y_G, z_G。为寻求这六个未知函数，需再补充三个方程。由铅垂向上单位矢量的端点速度在固定坐标系中等于零，得到

$$
\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=r\gamma'-q\gamma'',\quad \frac{\mathrm{d}\gamma'}{\mathrm{d}t}=p\gamma''-r\gamma,\quad \frac{\mathrm{d}\gamma''}{\mathrm{d}t}=q\gamma-p\gamma' \qquad (4.2.2)
$$

这就是 Poisson 方程。

对六个未知函数 $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ 的六个非线性微分方程（4.2.1）和（4.2.2），称为 Euler-Poisson 方程。

2. Euler-Poisson 方程的三个第一积分

现将 Euler-Poisson 方程（4.2.1）和（4.2.2）写成形式

$$\frac{dp}{dt}=P,\quad \frac{dq}{dt}=Q,\quad \frac{dr}{dt}=R,\quad \frac{d\gamma}{dt}=\Gamma,$$

$$\frac{d\gamma'}{dt}=\Gamma',\quad \frac{d\gamma''}{dt}=\Gamma'' \tag{4.2.3}$$

其中

$$\begin{aligned}
&P=\{Mg(z_G\gamma'-y_G\gamma'')-(C-B)qr\}A^{-1}\\
&Q=\{Mg(x_G\gamma''-z_G\gamma)-(A-C)rp\}B^{-1}\\
&R=\{Mg(y_G\gamma-x_G\gamma')-(B-A)pq\}C^{-1}\\
&\Gamma=r\gamma'-q\gamma'',\quad \Gamma'=p\gamma''-r\gamma,\quad \Gamma''=q\gamma-p\gamma'
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

方程（4.2.3）还可写成

$$\frac{dp}{P}=\frac{dq}{Q}=\frac{dr}{R}=\frac{d\gamma}{\Gamma}=\frac{d\gamma'}{\Gamma'}=\frac{d\gamma''}{\Gamma''}=dt \tag{4.2.5}$$

为解方程（4.2.1）和（4.2.2）需要知道六个独立的第一积分。但是，由关系（4.2.4）知，$P,Q,R,\Gamma,\Gamma',\Gamma''$ 不显含时间 t，因此只要求得不含 t 的五个第一积分就够了。进而，因 1 是 Euler-Poisson 方程的最后乘子，按 Jacobi 定理，只要知道四个第一积分就够了[7]。

Euler-Poisson方程的三个不含时间的独立的第一积分如下：

（1）能量积分

将六个方程（4.2.1）和（4.2.2）两端分别乘以 p,q,r 和 Mgx_G,Mgy_G,Mgz_G，然后相加，并积分得

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2+2Mg(x_G\gamma+y_G\gamma'+z_G\gamma'')=c_1=2h \tag{4.2.6}$$

（2）面积积分

将六个方程（4.2.1）和（4.2.2)两端分别乘以 γ,γ',γ'' 和 Ap,Bq,Cr，然后相加，并积分得

$$Ap\gamma+Bq\gamma'+Cr\gamma''=c_2 \tag{4.2.7}$$

（3）平凡积分（几何积分）

$$\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=c_3=1 \tag{4.2.8}$$

有了这三个经典第一积分，刚体绕定点转动问题的解便归结

为寻求第四个积分。

3. Euler-Poisson 方程的三种经典可积情形

需补充的第四个第一积分，虽经众多数学家的努力，但在一般情形下尚未找到。在对刚体质量分布的限制下，即对常数 A，B，C，x_G、y_G、z_G 的限制下，补充的第一积分仅在下列三种情形中求得。

（1）Euler 情形

在 Euler 情形，有

$$x_G = y_G = z_G = 0 \tag{4.2.9}$$

此时 Euler 动力学方程（4.2.1）有形式

$$\begin{aligned} &A\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + (C-B)qr = 0, \quad B\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + (A-C)rp = 0, \\ &C\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + (B-A)pq = 0 \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

将式（4.2.10）三个方程两端分别乘以 Ap,Bq 和 Cr，然后相加并积分，得到第四个积分

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = c_4 \tag{4.2.11}$$

（2）Lagrange 情形

在 Lagrange 情形，有

$$A = B, \quad x_G = y_G = 0 \tag{4.2.12}$$

在此情形，方程（4.2.1）的最后一个有形式

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0$$

而第四个积分为

$$r = c_4 \tag{4.2.13}$$

（3）Ковалевская 情形

在 Ковалевская 情形，有

$$A = B = 2C, \quad y_G = z_G = 0 \tag{4.2.14}$$

在此情形，Euler 方程（4.2.1）为

$$2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}-qr=0,\quad 2\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+rp=c\gamma'',\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-c\gamma' \tag{4.2.15}$$

其中

$$c=\frac{Mgx_G}{C}$$

将方程（4.2.15）第二个乘以 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 并与第一个相加，得

$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p+\mathrm{i}q)=-\mathrm{i}r(p+\mathrm{i}q)+\mathrm{i}c\gamma'' \tag{4.2.16}$$

将 Poisson 方程（4.2.2）第二个乘以 i 并与第一个相加，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma+\mathrm{i}\gamma')=-\mathrm{i}r(\gamma+\mathrm{i}\gamma')+\mathrm{i}\gamma''(p+\mathrm{i}q) \tag{4.2.17}$$

将式（4.2.16）乘以（$p+\mathrm{i}q$），式（4.2.17）乘以（$-c$），然后相加，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{(p+\mathrm{i}q)^2-c(\gamma+\mathrm{i}\gamma')\}=-\mathrm{i}r\{(p+\mathrm{i}q)^2-c(\gamma+\mathrm{i}\gamma'')\}$$

它可改写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\{(p+\mathrm{i}q)^2-c(\gamma+\mathrm{i}\gamma')\}=-\mathrm{i}r \tag{4.2.18}$$

用（$-\mathrm{i}$）代替 i，重复前面讨论，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\{(p-\mathrm{i}q)^2-c(\gamma-\mathrm{i}\gamma')\}=\mathrm{i}r \tag{4.2.19}$$

将式（4.2.18）与（4.2.19）相加，并积分，得

$$\{(p+\mathrm{i}q)^2-c(\gamma+\mathrm{i}\gamma')\}\{(p-\mathrm{i}q)^2-c(\gamma-\mathrm{i}\gamma')\}=c_4$$

或写成

$$(p^2-q^2-c\gamma)^2+(2pq-c\gamma')^2=c_4 \tag{4.2.20}$$

这就是补充的第一积分。

在以上三种情形，问题归结为求积分。在前两种情形中，Euler-Poisson 方程的通解表为时间的椭圆函数，而在第三种情形表为时间的超椭圆函数。

4.2.2 Харламов方程及其降阶问题

1. 专门坐标轴中的运动方程

取任意直角坐标系 $O\xi_1\xi_2\xi_3$，轴向单位矢量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 固联在刚体上，动量矩为

$$\boldsymbol{K}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$$

角速度为

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2+\omega_3\boldsymbol{e}_3$$

因为

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}$$

其中

$$L=\begin{pmatrix}L_{11} & L_{12} & L_{13}\\ L_{21} & L_{22} & L_{23}\\ L_{31} & L_{32} & L_{33}\end{pmatrix}$$

是惯量张量，于是

$$x_i=L_{i1}\omega_1+L_{i2}\omega_2+L_{i3}\omega_3,\qquad (i=1,2,3)\quad (4.2.21)$$

由此可反解出

$$\omega_i=l_{i1}x_1+l_{i2}x_2+l_{i3}x_3\qquad (4.2.22)$$

其中

$$l_{11}=\frac{1}{\Delta}(L_{22}L_{33}-L_{23}^2),\quad l_{22}=\frac{1}{\Delta}(L_{33}L_{11}-L_{31}^2),$$

$$l_{33}=\frac{1}{\Delta}(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)$$

$$l_{23}=l_{32}=\frac{1}{\Delta}(L_{12}L_{31}-L_{11}L_{23}),\quad l_{31}=l_{13}=\frac{1}{\Delta}(L_{23}L_{12}-L_{22}L_{31}),$$

$$l_{12}=l_{21}=\frac{1}{\Delta}(L_{31}L_{23}-L_{33}L_{12})$$

$$\Delta=\det(L_{ij})\neq 0\qquad (4.2.23)$$

刚体的动能为

$$T=\frac{1}{2}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}(L_{11}\omega_1^2+L_{22}\omega_2^2+L_{33}\omega_3^2)+L_{23}\omega_2\omega_3$$
$$+L_{31}\omega_3\omega_1+L_{12}\omega_1\omega_2 \tag{4.2.24}$$

将式（4.2.22）代入式（4.2.24），得

$$T=\frac{1}{2}(l_{11}x_1^2+l_{22}x_2^2+l_{33}x_3^2)+l_{23}x_2x_3+l_{31}x_3x_1+l_{12}x_1x_2 \tag{4.2.25}$$

现将坐标轴$O\xi_1\xi_2\xi_3$绕$O\xi_1$转一角α，得到新坐标系$O\xi_1^*\xi_2^*\xi_3^*$，动量矩的新坐标记作x_1^*,x_2^*,x_3^*，且

$$x_1=x_1^*,\quad x_2=x_2^*\cos\alpha-x_3^*\sin\alpha,\quad x_3=x_2^*\sin\alpha+x_3^*\cos\alpha$$

而动能为

$$T=\frac{1}{2}(l_{11}^*x_1^{*2}+l_{22}^*x_2^{*2}+l_{33}^*x_3^{*2})+l_{23}^*x_2^*x_3^*+l_{31}^*x_3^*x_1^*+l_{12}^*x_1^*x_2^*$$

其中l_{ij}^*容易用l_{ij}表示，特别地

$$l_{23}^*=\frac{1}{2}(l_{33}-l_{22})\sin 2\alpha+l_{23}\cos 2\alpha$$

现在取

$$\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2l_{23}}{l_{22}-l_{33}}$$

则$l_{23}^*=0$，而动能简化为

$$T=\frac{1}{2}(l_{11}^*x_1^{*2}+l_{22}^*x_2^{*2}+l_{33}^*x_3^{*2})+(l_{31}^*x_3^*+l_{12}^*x_2^*)x_1^* \tag{4.2.26}$$

现取专门坐标系$O\eta_1\eta_2\eta_3$，使$O\eta_1$通过刚体质心G，而轴$O\eta_2$和$O\eta_3$如此放置以使动能有表达式（4.2.26）。用a,a_1,a_2,b_1,b_2代替$l_{11}^*,l_{22}^*,l_{33}^*,l_{12}^*,l_{13}^*$；用$x,y,z$代替$x_1^*,x_2^*,x_3^*$；用$\omega_x,\omega_y,\omega_z$代替$\omega_1,\omega_2,\omega_3$。于是，动能和角速度表为

$$T=\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x \tag{4.2.27}$$

$$\omega_x=ax+b_1y+b_2z,\quad \omega_y=a_1y+b_1x,\quad \omega_z=a_2z+b_2x \tag{4.2.28}$$

于是重刚体绕固定点运动的方程在专门坐标系中表为[6,7]

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(a_2-a_1)yz+(b_2y-b_1z)x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(a-a_2)zx+(b_1y+b_2z)z-b_2x^2-\nu_3\Gamma \quad (4.2.29)$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-(a-a_1)yx-(b_1y+b_2z)y+b_1x^2+\nu_2\Gamma$$

$$\frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}t}=(a_2z+b_2x)\nu_2-(a_1y+b_1x)\nu_3$$

$$\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}t}=(ax+b_1y+b_2z)\nu_3-(a_2z+b_2x)\nu_1 \quad (4.2.30)$$

$$\frac{\mathrm{d}\nu_3}{\mathrm{d}t}=-(ax+b_1y+b_2z)\nu_2+(a_1y+b_1x)\nu_1$$

其中 ν_1,ν_2,ν_3 为铅垂向上单位矢量在专门坐标轴中的投影，而 $\Gamma=-Mg\rho_G$（ρ_G 为距离 $\overline{OG}$）。

在专门坐标系中三个经典第一积分为

$$\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-\nu_1\Gamma=E \quad (4.2.31)$$

$$x\nu_1+y\nu_2+z\nu_3=m_1 \quad (4.2.32)$$

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1 \quad (4.2.33)$$

2. Харламов 方程

现在利用积分(4.2.31)—(4.2.33)来降阶方程(4.2.29)、(4.2.30)。用式(4.2.29)后两个方程及积分(4.2.31)来表示量 ν_1,ν_2,ν_3，有

$$\nu_1\Gamma=\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-E$$

$$\nu_2\Gamma=(a-a_1)yx+(b_1y+b_2z)y-b_1x^2+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \quad (4.2.34)$$

$$\nu_3\Gamma=(a-a_2)zx+(b_1y+b_2z)z-b_2x^2-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

将式（4.2.34）代入积分（4.2.32）和（4.2.33），得到

$$y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}-z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(b_1y+b_2z)(y^2+z^2)+x\left\{\left(a-\frac{a_1}{2}\right)y^2\right.$$

$$\left.+\left(a-\frac{a_2}{2}\right)z^2\right\}+\frac{1}{2}ax^3-Ex-m=0\qquad(m=\Gamma m_1)$$

$$\left\{\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-E\right\}^2$$

$$+\left\{(a-a_1)yx+(b_1y+b_2z)y-b_1x^2+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right\}^2$$

$$+\left\{(a-a_2)zx+(b_1y+b_2z)z-b_2x^2-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\}^2-\Gamma^2=0$$

（4.2.35）

由方程（4.2.35）借助方程（4.2.29）第一个消去 t，得到两个一阶方程

$$\{(a_2-a_1)yz+(b_2y-b_1z)x\}\left(y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

$$+(b_1y+b_2z)(y^2+z^2)+x\left\{\left(a-\frac{a_1}{2}\right)y^2+\left(a-\frac{a_2}{2}\right)z^2\right\}$$

$$+\frac{1}{2}ax^3-Ex-m=0$$

$$\left\{(a-a_1)xy+(b_1y+b_2z)y-b_1x^2+[(a_2-a_1)yz+(b_2y\right.$$

$$\left.-b_1z)x]\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right\}^2+\left\{(a-a_2)xz+(b_1y+b_2z)z-b_2x^2\right.$$

$$\left.+[(a_1-a_2)yz+(b_1z-b_2y)x]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right\}^2$$

$$+\left\{\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-E\right\}^2-\Gamma^2=0$$

（4.2.36）

由方程（4.2.36）可解出$\frac{dy}{dx}$和$\frac{dz}{dx}$，有

$$
\begin{aligned}
&(y^2+z^2)\{(a_2-a_1)yz+(b_2y-b_1z)x\}\frac{dy}{dx}=(y^2+z^2)\{(a-a_2)zx \\
&\quad+(b_1y+b_2z)z-b_2x^2\}+xz\left\{\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)\right. \\
&\quad\left.+(b_1y+b_2z)x-E\right\}-mz-yR \qquad (4.2.37)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(y^2+z^2)\{(a_1-a_2)yz+(b_1z-b_2y)x\}\frac{dz}{dx}=(y^2+z^2)\{(a-a_1)xy \\
&\quad+(b_1y+b_2z)y-b_1x^2\}+xz\left\{\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)\right. \\
&\quad\left.+(b_1y+b_2z)x-E\right\}-my-zR
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
R^2=&(y^2+z^2)I'^2+2mx\left\{\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-E\right\} \\
&-(x^2+y^2+z^2)\left\{\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2-a_2z^2)\right. \\
&\left.+(b_1y+b_2z)x-E\right\}^2-m^2 \qquad (4.2.38)
\end{aligned}
$$

方程(4.2.37)称为Харламов方程[6,7]。设由方程(4.2.37)解得$y=y(x)$，$z=z(x)$，将其代入方程（4.2.29）第一个可求得$x=x(t)$，再将这些代入式（4.2.34）可求得ν_1,ν_2,ν_3。注意到，方程（4.2.36）在条件$x\neq$const.时才是对的，因此，其中$x=$const.的解应单独研究。还要注意，Харламов方程（4.2.37）还可归结为一个二阶方程[7]。

3．归结为一个积分-微分方程

当$b_2=0$时，Харламова证明，专门坐标轴中的方程可归结为一个积分-微分方程[7]

$$\mathrm{Re}\left\{\left[2\Gamma\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}+a_2(x-\mathrm{i}y)\right]\left\{\exp\mathrm{i}a_2\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}\xi}{X[y(\xi),\xi]}\left[\nu_{10}+\mathrm{i}\nu_{20}\right.\right.\right.$$

$$+\int_{x_0}^{x}\frac{(a_1-\mathrm{i}b_1)y(\xi)+(b_1-\mathrm{i}a)\xi}{X[y(\xi),\xi]}\frac{\mathrm{d}Y[y(\xi),\xi]}{\mathrm{d}\xi}$$

$$\left.\left.\left.\left(\exp\mathrm{i}a_2\int_{\xi}^{x_0}\frac{\mathrm{d}\eta}{X[y(\eta),\eta]}\right)\mathrm{d}\xi\right]\right\}\right\}$$

$$=a_2m_1+(a_1y^2+2b_1xy+ax^2-2E)\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\qquad(4.2.39)$$

其中

$$\begin{aligned}X(y,x)&=(a_1-a_2)y+b_1x\\ \Gamma Y(y,x)&=\frac{1}{2}(a_1-a_2)y^2+b_1xy+\frac{1}{2}(a-a_2)x^2+m_2\end{aligned}\qquad(4.2.40)$$

而 m_2 为任意常数。

4.2.3 Euler-Poisson 方程的若干特殊可积情形

Euler 情形，Lagrange 情形和 Ковалевская 情形是 Euler-Poisson 方程的通解。如果不仅对质量分布加以限制，而且对运动的初始条件也加以限制，则找到的解为特解。从1890年到1959年，人们总共找到九种特解。

1. Hess 情形（1890年）

在 Hess 情形，对刚体质量分布的限制条件为

$$y_G=0,\quad Ax_G^2(B-C)=Cz_G^2(A-B)\qquad(4.2.41)$$

此时有第四个积分

$$Ax_Gp+Cz_Gr=0\qquad(4.2.42)$$

条件（4.2.42）表示刚体动量矩在固定点 O 与质心 G 的联线上的投影为零，这是对运动初始条件的限制，它是一个特殊积分。

2. Бобылев-Стеклов 情形（1896年）

在此情形，对刚体质量分布的限制条件为

$$B=2A,\ x_G=z_G=0 \tag{4.2.43}$$

此时积分为

$$r=0,\ q=q_0=\text{const.},\ p=\frac{Mgy_G}{Aq_0}\gamma \tag{4.2.44}$$

3. Стеклов 情形（1899年）

在 Стеклов 情形，对刚体质量分布的限制条件为

$$y_G=z_G=0 \tag{4.2.45}$$

在此情形有

$$-\gamma'=pq\frac{(A-B)(A-C)}{(2C-A)Mgx_G} \tag{4.2.46}$$

$$-\gamma''=pr\frac{(A-B)(A-C)}{(2B-A)Mgx_G} \tag{4.2.47}$$

$$Ap^2+(2B-A)q^2+(2C-A)r^2=0 \tag{4.2.48}$$

$$A^2p^2+(2B-A)Bq^2+(2C-A)Cr^2=L$$

$$=A\frac{(2B-A)(A-2C)}{(B-A)(A-C)}Mgx_G \tag{4.2.49}$$

4. Горячев 情形（1899年）

在 Горячев 情形，对刚体质量分布的限制条件为

$$y_G=z_G=0,\ AC=8(A-2B)(B-C) \tag{4.2.50}$$

此时有

$$-\gamma'=\frac{4B-3A}{2Mgx_G}pq,\quad -\gamma''=\frac{(\varepsilon+\mu p^2)pr}{Mgx_G} \tag{4.2.51}$$

其中

$$\varepsilon=\frac{3A-4B}{BC}(2B-C)(2B-3C) \tag{4.2.52}$$

$$\mu=\frac{\varepsilon A(3A-4B)(4B-3C)(5C-4B)}{32Mgx_GBC(B-C)}$$

以及

$$\frac{B-C}{A}r^2=\frac{A-B+\frac{1}{2}(4B-3A)}{C}p^2$$

$$+\frac{BCMgx_G}{(3A-4B)(2B-C)(2B-3C)} \quad (4.2.53)$$

5. Чаплыгин 情形（1904 年）

在 Чаплыгин 情形，对刚体质量分布的限制条件为

$$9(2B-A)(2C-A)=4BC, \quad y_G=z_G=0 \qquad (4.2.54)$$

此时有

$$-\gamma'=(\delta+\lambda p^{-4/3})\frac{pq}{Mgx_G}, \quad -\gamma''=(\varepsilon+\mu p^{-4/3})\frac{pr}{Mgx_G} \qquad (4.2.55)$$

其中

$$\delta=\frac{(B-A)(C-A)}{2C-A}, \quad \varepsilon=\frac{(B-A)(C-A)}{2B-A},$$

$$\lambda=\frac{C(3A-2B)}{2C-A}s, \quad \mu=\frac{B(3A-2C)}{2B-A}s \qquad (4.2.56)$$

而 s 为下列方程的根

$$A^3(2B+2C-3A)s^3=\frac{4(2B-A)^2(2C-A)^2}{9(3A-2B)(3A-2C)}M^2g^2x_G^2 \qquad (4.2.57)$$

并且有

$$A^2p^2-(2B-A)(2B-3A)q^2-(2C-A)(2C-3A)r^2=0 \qquad (4.2.58)$$

6. Kowalewski 情形（1908 年）

在 Kowalewski 情形，对刚体质量分布的限制条件为

$$A=18C\frac{B-C}{10B-9C}, \quad y_G=z_G=0 \qquad (4.2.59)$$

此时有

$$-Mg\gamma'' x_G = 3C\,\frac{3C-2B}{10B-9C}\,r\left\{p-\frac{(3C-2B)(3C-4B)}{b(10B-9C)}\right\} \tag{4.2.60}$$

以及

$$q^2 + m_0(p-c_0)^2 = m_1 = \text{const.} \tag{4.2.61}$$

其中

$$m_0 = \frac{36C^2}{(10B-9C)^2},\quad c_0 = \frac{3}{2}\,\frac{(3C-2B)^2(3C-4B)}{bB(10B-9C)}$$

（b 为常数） (4.2.62)

7. Горячев-Чаплыгин 情形（1900 年）

在 Горячев-Чаплыгин 情形，对刚体质量分布的限制条件为

$$A=B=4C,\quad y_G=z_G=0 \tag{4.2.63}$$

此时有

$$4(p\gamma+q\gamma')+r\gamma''=0 \tag{4.2.64}$$

以及

$$r(p^2+q^2)-\frac{Mgx_G}{C}p\gamma''=\text{const.} \tag{4.2.65}$$

8. Grioli 情形（1947 年）

在 Grioli 情形，对刚体质量分布的限制条件为

$$y_G=0,\quad \sqrt{B-C}\,x_G=\sqrt{A-B}\,z_G \tag{4.2.66}$$

此时有积分

$$(Ax_Gp+Cz_Gr)q-Mg(x_G^2+z_G^2)\gamma'=0 \tag{4.2.67}$$

$$x_Gp+z_Gr=m_0=\text{const.} \tag{4.2.68}$$

$$Bm_0(z_Gp-x_Gr)-(A-C)(x_G^2+z_G^2)pr + Mg(x_G^2+z_G^2)(x_G\gamma''-z_G\gamma)=0 \tag{4.2.69}$$

$$p^2+q^2+r^2=c=\text{const.} \tag{4.2.70}$$

9. Харламова 情形（1959 年）

在 Харламова 情形，对刚体质量分布的限制条件为

$$y_G=0,\quad (2C-A)\sqrt{A(C-B)(2C-A)}\,x_G$$
$$+(C-2A)\sqrt{C(A-B)(C-2A)}\,z_G=0$$
$$C>2A>2B\quad (x_G<0) \tag{4.2.71}$$

此时有积分

$$Ap\cos\theta+Cr\sin\theta=n=\text{const.} \tag{4.2.72}$$
$$-Mg\gamma'\sqrt{x_G^2+z_G^2}=q(bp+b''r) \tag{4.2.73}$$

其中

$$\begin{aligned}
\sin\theta&=\sqrt{\frac{A(C-B)(2C-A)}{(C-A)\{3AC-B(A+C)\}}},\\
\cos\theta&=\sqrt{\frac{C(A-B)(C-2A)}{(C-A)\{3AC-B(A+C)\}}},\\
b&=\frac{(A-B)\sqrt{x_G^2+z_G^2}\sin\theta}{z_G\cos\theta-x_G\sin\theta},\\
b''&=\frac{(B-C)\sqrt{x_G^2+z_G^2}\cos\theta}{z_G\cos\theta-x_G\sin\theta}
\end{aligned} \tag{4.2.74}$$

需要注意的是，在 Харламова 情形中，要求 $C>2A>2B$。但是，对刚体来说，这个条件不能实现，因为这与 $A-B>C$ 相矛盾。后来有人证明，这个条件对于充满无摩擦不可压缩流体的回转刚体是可实现的。

从本世纪六十年代开始，人们借助不变关系方法找到了一些新的精确解[8]。

4.2.4 带有非完整约束的刚体绕固定点转动问题

刚体定点运动的经典问题，现时因与各种技术领域相关，已具有新的意义。例如，飞行器或应相对某固定坐标系保持定向，或者按确定的规划改变方位；又如，两个人造卫星的对接，这些都是具有非完整约束的刚体运动问题。

1. 有非完整约束时重刚体绕固定点的转动

研究一重刚体绕固定点 O 的转动，此刚体的运动受有约束，

使刚体的瞬时转动轴总是在与刚体相固联的平面 $x'Oy'$ 上。令角速度在动系 $Ox'y'z'$ 中的投影为 ω_1，ω_2，ω_3，则所受约束为

$$\omega_3=0 \qquad (4.2.75)$$

这是一个非完整约束。由§3.3中例3知，刚体绕定点转动的加速度能量在准速度下表为

$$\begin{aligned}S_0=&\frac{1}{2}(J_1\dot\omega_1^2+J_2\dot\omega_2^2+J_3\dot\omega_3^2-2J_{12}\dot\omega_1\dot\omega_2-2J_{23}\dot\omega_2\dot\omega_3\\&-2J_{31}\dot\omega_3\dot\omega_1)+(\dot\omega_2\omega_3-\dot\omega_3\omega_2)(J_1\omega_1-J_{12}\omega_2-J_{31}\omega_3)\\&+(\dot\omega_3\omega_1-\dot\omega_1\omega_3)(-J_{12}\omega_1+J_2\omega_2-J_{13}\omega_3)\\&+(\dot\omega_1\omega_2-\dot\omega_2\omega_1)(-J_{13}\omega_1-J_{23}\omega_2+J_3\omega_3)\end{aligned}$$

考虑到非完整约束(4.2.75)，则

$$\begin{aligned}S_0^*=&\frac{1}{2}(J_1\dot\omega_1^2+J_2\dot\omega_2^2-2J_{12}\dot\omega_1\dot\omega_2)\\&+(\dot\omega_1\omega_2-\dot\omega_2\omega_1)(-J_{13}\omega_1-J_{23}\omega_2)\end{aligned} \qquad (4.2.76)$$

Appell 方程（3.3.53）给出

$$\frac{\partial S_0^*}{\partial\dot\omega_1}=P_1^*,\qquad \frac{\partial S_0^*}{\partial\dot\omega_2}=P_2^* \qquad (4.2.77)$$

因

$$P_1^*=Mg(z_G\gamma'-y_G\gamma''),\quad P_2^*=Mg(x_G\gamma''-z_G\gamma) \qquad (4.2.78)$$

将式（4.2.76）和（4.2.78）代入方程（4.2.77），得

$$\begin{aligned}&J_1\dot\omega_1-J_{12}\dot\omega_2-(J_{13}\omega_1+J_{23}\omega_2)\omega_2=Mg(z_G\gamma'-y_G\gamma'')\\&J_2\dot\omega_2-J_{12}\dot\omega_1+(J_{13}\omega_1+J_{23}\omega_2)\omega_1=Mg(x_G\gamma''-z_G\gamma)\end{aligned} \qquad (4.2.79)$$

在有非完整约束（4.2.75）时，Poisson 方程（4.2.2）成为

$$\dot\gamma=-\omega_2\gamma'',\quad \dot\gamma'=\omega_1\gamma'',\quad \dot\gamma''=\omega_2\gamma-\omega_1\gamma' \qquad (4.2.80)$$

方程（4.2.79）联同 Poisson 方程（4.2.80），可求解问题。此问题有两个第一积分

$$J_1\omega_1^2+J_2\omega_2^2-2J_{12}\omega_1\omega_2+2Mg(x_G\gamma+y_G\gamma'+z_G\gamma'')=2h \qquad (4.2.81)$$

以及

$$\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1 \tag{4.2.82}$$

2. 当作用力通过固定点时刚体的运动

现在研究当作用力通过固定点时，刚体绕定点的转动问题。为简单起见，令 $J_{12}=0$。此时式（4.2.79）成为

$$J_1\dot{\omega}_1-(J_{13}\omega_1+J_{23}\omega_2)\omega_2=0,\quad J_2\dot{\omega}_2+(J_{13}\omega_1+J_{23}\omega_2)\omega_1=0 \tag{4.2.83}$$

将式（4.2.83）第一式乘以 ω_1，第二式乘以 ω_2，然后相加并积分，得能量积分

$$J_1\omega_1^2+J_2\omega_2^2=2h \tag{4.2.84}$$

令

$$\omega_1=\sqrt{\frac{2h}{J_1}}\sin\chi,\qquad \omega_2=\sqrt{\frac{2h}{J_2}}\cos\chi \tag{4.2.85}$$

则方程（4.2.83）成为

$$\dot{\chi}=\frac{J_{23}}{J_2}\sqrt{\frac{2h}{J_1}}\cos\chi+\frac{J_{13}}{J_1}\sqrt{\frac{2h}{J_2}}\sin\chi \tag{4.2.86}$$

引进常数 k 和 α

$$k^2=\frac{2h}{J_1^2J_2^2}(J_{23}^2J_1+J_{13}^2J_2),\quad \alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{J_{23}}{J_{13}}\sqrt{\frac{J_1}{J_2}}\right) \tag{4.2.87}$$

则方程（4.2.86）成为

$$\dot{\chi}=k\sin(\chi+\alpha) \tag{4.2.88}$$

积分之，得

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\chi+\alpha}{2}\right)=e^{kt+\tau} \tag{4.2.89}$$

其中 τ 为任意常数。

由式（4.2.89）得知，当 $t\to\infty$时，$\chi=\pi-\alpha$，因此由式（4.2.85）得

$$\omega_1\to\sqrt{\frac{2h}{J_1}}\sin\alpha,\qquad \omega_2\to-\sqrt{\frac{2h}{J_2}}\cos\alpha \tag{4.2.90}$$

于是，有

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \to -\sqrt{\frac{J_2}{J_1}}\,\mathrm{tg}\alpha = -\frac{J_{23}}{J_{13}} \tag{4.2.91}$$

公式（4.2.90）和（4.2.91）表明，刚体渐近地近似于以常角速度绕某直线转动。

§4.3 相对运动动力学

随着近代科学技术的发展，对复杂力学系统的动力学研究变得越来越重要。这些复杂系统的运动包括载体的运动以及被载系统相对于载体的运动。研究复杂系统的运动，可在惯性坐标系中进行，也可在固联于载体上的动坐标系中进行。用分析力学的理论和方法研究力学系统的相对运动动力学，不仅在表现形式上达到统一，而且对复杂系统显示出优越性。

本节讨论完整系统和非完整系统相对运动动力学方程。

4.3.1 完整系统的相对运动动力学

1. 被载体相对运动微分方程的一般形式

研究一质点系，它由载体和N个质点（被载体）组成。设载体的运动给定，需要确定被载体的运动，并且假定被载体的运动不改变载体事先给定的运动规律。

设载体的运动由基点O的速度$\boldsymbol{v}_0$和它的角速度$\boldsymbol{\omega}$来确定。被载质点相对惯性坐标系$\bar{O}xyz$的位置由矢径$\boldsymbol{r}_i$确定，相对与载体相固联的坐标系$Ox'y'z'$的位置由矢径$\boldsymbol{r}'_i$确定，设$\boldsymbol{r}'_i$中不显含时间t，即

$$\boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{r}'_i(q_s), \quad (i=1,\cdots,N;\ s=1,\cdots,n) \tag{4.3.1}$$

用$\boldsymbol{r}_0$表示载体基点的矢径，则有

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}'_i$$

其中$\boldsymbol{r}_0$为时间的已知函数。将式（4.3.1）对时间t求导数，得

$$\dot{\boldsymbol{r}}'_i = \overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_i \qquad (4.3.2)$$

其中 $\overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i$ 为 $\boldsymbol{r}'_i$ 的相对导数。系统绝对运动的动能为

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{1}{2} M v_0^2 + M \boldsymbol{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_c) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta}^0 \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i \cdot \overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i + \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{Q}_r + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{K}_r^0 \qquad (4.3.3)$$

其中 $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ 为被载体的总质量，$\boldsymbol{r}'_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}'_i$ 为被载体质心在 $Ox'y'z'$ 中的矢径，$\boldsymbol{\theta}^0$ 为系统在 O 点的惯量张量，$\boldsymbol{Q}_r$ 为系统相对动量主矢：$\boldsymbol{Q}_r = \sum_{i=1}^{N} m_i \overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i$，$\boldsymbol{K}_r^0$ 为系统对基点 O 的相对动量矩主矢：$\boldsymbol{K}_r^0 = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}'_i \times \overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i$。将式（4.3.3）写成形式

$$T = T_e + T_m + T_r \qquad (4.3.4)$$

则

$$T_e = \frac{1}{2} M v_0^2 + M \boldsymbol{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_c) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta}^0 \cdot \boldsymbol{\omega} \qquad (4.3.5)$$

$$T_m = \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{Q}_r + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{K}_r^0 \qquad (4.3.6)$$

$$T_r = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i \cdot \overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i \qquad (4.3.7)$$

它们分别为牵连运动动能，混合动能和相对运动动能。

现在由 Lagrange 方程(3.1.2)导出相对运动动力学的 Lagrange 方程。将式（4.3.4）代入式（3.1.2），得

$$E_s(T_e) + E_s(T_m) + E_s(T_r) = Q_s, \qquad (s = 1, \cdots, n) \qquad (4.3.8)$$

我们计算得[9]

$$E_s(T_e) = -M(\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}'_c}{\partial q_s} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}^0}{\partial q_s} \cdot \boldsymbol{\omega} \qquad (4.3.9)$$

$$E_s(T_m) = M\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}'_c}{\partial q_s} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}^0_r}{\partial \dot{q}_s} + \boldsymbol{\omega} \cdot E^*_s(\boldsymbol{K}^0_r) \quad (4.3.10)$$

这里星号表示在计算 Euler 算子时对时间的导数是在与载体相固联的坐标系中进行的。将式(4.3.9)和(4.3.10)代入式(4.3.8)，得

$$E_s(T_r) = Q_s - M(\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}'_c}{\partial q_s} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}^0}{\partial q_s} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$- \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}^0_r}{\partial \dot{q}_s} - \boldsymbol{\omega} \cdot E^*_s(\boldsymbol{K}^0_r) \quad (4.3.11)$$

下面说明方程（4.3.11）右端各项的力学意义。矢量

$$-M\dot{\boldsymbol{v}}_0 = -M(\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)$$

称为平动运动的惯性力，而量

$$Q^v_s = -M\dot{\boldsymbol{v}}_0 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}'_c}{\partial q_s} = -\frac{\partial}{\partial q_s} M(\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0) \cdot \boldsymbol{r}'_c = -\frac{\partial V^0}{\partial q_s} \quad (4.3.12)$$

称为平动运动的广义惯性力，其中 V^0 为这些力的均匀场势能。角速度投影的二次形

$$V^\omega = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta}^0 \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (4.3.13)$$

为离心力势能，而量

$$Q^\omega_s = -\frac{\partial V^\omega}{\partial q_s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}^0}{\partial q_s} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (4.3.14)$$

是广义离心力。又

$$-\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}^0_r}{\partial \dot{q}_s} = -\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}'_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s} = Q^{\dot{\omega}}_s \quad (4.3.15)$$

为广义转动惯性力。最后一项

$$-\boldsymbol{\omega} \cdot E^*_s(\boldsymbol{K}^0_r) = -\sum_{i=1}^{N} m_i(2\,\boldsymbol{\omega} \times \overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s} \quad (4.3.16)$$

表示广义 Coriolis 惯性力，同时也可作为广义陀螺力

$$-\boldsymbol{\omega}\cdot E_s^*(\boldsymbol{K}_r^0)=\Gamma_s=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{sk}\dot{q}_k \tag{4.3.17}$$

其中陀螺系数为

$$\gamma_{sk}=2\boldsymbol{\omega}\cdot\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i'}{\partial q_s}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}_i'}{\partial q_k}=-\gamma_{ks} \tag{4.3.18}$$

最后，将式(4.3.12)、(4.3.14)、(4.3.15)和 (4.3.17) 代入式(4.3.11)，便得[9]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s-\frac{\partial}{\partial q_s}(V^0+V^\omega)+Q_s^{\dot\omega}+\Gamma_s,\quad(s=1,\cdots,n) \tag{4.3.19}$$

方程 (4.3.19) 就是相对运动动力学的 Lagrange 方程。方程左端仅依赖于由被载体相对载体的位形和运动所确定的量。只要在方程右端给主动力加上由载体运动引起的惯性力，相对运动方程就有绝对运动的形式。

2．被载体相对运动微分方程的几种特殊形式

下面讨论相对运动动力学方程 (4.3.19) 的几种特殊形式。

首先，如果载体作平动，则有

$$V^\omega=Q_s^{\dot\omega}=\Gamma_s=0 \tag{4.3.20}$$

此时方程 (4.3.19) 成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s-\frac{\partial V^0}{\partial q_s},\quad(s=1,\cdots,n) \tag{4.3.21}$$

其次，如果载体作定点运动，可取固定点为基点，于是有

$$V^0=0 \tag{4.3.22}$$

而方程 (4.3.19) 成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s-\frac{\partial V^\omega}{\partial q_s}+Q_s^{\dot\omega}+\Gamma_s,\quad(s=1,\cdots,n) \tag{4.3.23}$$

最后，如果载体作定轴匀速转动，我们有

$$V^0=Q_i^a=0 \tag{4.3.24}$$

于是方程（4.3.19）给出

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s-\frac{\partial V^\omega}{\partial q_s}+\Gamma_s,\quad (s=1,\cdots,n) \tag{4.3.25}$$

如取定轴为 $\tilde{O}z(Oz')$，则

$$V^\omega=-\frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i(x_i'^2+y_i'^2)$$

$$\Gamma_s=2\omega\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\overset{*}{y}_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}-\overset{*}{x}_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}\right)$$

于是方程（4.3.25）给出

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_r}{\partial q_s}\\&=Q_s+\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}+y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}\right)\\&\quad+2\omega\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\overset{*}{y}_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}-\overset{*}{x}_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}\right),\quad (s=1,\cdots,n)\end{aligned} \tag{4.3.26}$$

在不少情况下，方程（4.3.26）的右端第三项为零。

3. 能量方程

现将广义力 Q_s 分成两部分

$$Q_s=Q_s'+Q_s''$$

其中 Q_s'' 为有势力

$$Q_s''=-\frac{\partial V}{\partial q_s}$$

而 Q_s' 为非势力。这样，方程（4.3.19）可写成形式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L_r}{\partial q_s}=Q_s^a+\Gamma_s+Q_s',\quad (s=1,\cdots,n) \tag{4.3.27}$$

其中

$$L_r = T_r - V - V^0 - V^\omega \tag{4.3.28}$$

由式（4.3.27）容易计算得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s - L_r\right) = \sum_{s=1}^{n} Q_s^{\omega}\dot{q}_s + \sum_{s=1}^{n}\Gamma_s\dot{q}_s + \sum_{s=1}^{n}Q_s'\dot{q}_s - \frac{\partial L_r}{\partial t} \tag{4.3.29}$$

由陀螺力的性质，有

$$\sum_{s=1}^{n}\Gamma_s\dot{q}_s = 0 \tag{4.3.30}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s - L_r\right) = \sum_{s=1}^{n} Q_s^{\omega}\dot{q}_s + \sum_{s=1}^{n}Q_s'\dot{q}_s - \frac{\partial L_r}{\partial t} \tag{4.3.31}$$

方程（4.3.31）可称为完整系统相对运动动力学的能量方程。由此得下述命题。

命题 1 如果 L_r 不显含时间 t，非势力为陀螺力或不存在，且 $\dot{\omega}=0$，则存在广义能量积分[10]

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s - L_r = h = \text{const.} \tag{4.3.32}$$

4. 相对平衡

设

$$q_s = q_s^0 = \text{const.},\qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.3.33}$$

是被载体的相对平衡位置。当研究被载体相对平衡时，自然提出下述问题：（1）载体怎样运动才存在相对平衡；（2）如何确定可能的相对平衡位置；（3）什么样的相对平衡位置是稳定的，什么样是不稳定的。我们限于研究载体的这种运动：载体上任何点的加速度，对于与载体固联的轴系来说，其大小和方向都不改变。因此，基点的加速度和载体的角速度对载体来说大小和方向保持不变。此外，还假设方程（4.3.19）中的广义力 Q_r 不

依赖于时间。

当被载体处于相对平衡时，广义相对速度 $\dot{q}_s$ 和广义相对加速度 $\ddot{q}_s$ 等于零，因此，相对运动动能 T_r 和陀螺力 Γ_s 也等于零。此外，据对载体运动所作假设，广义转动惯性力 $Q_s^{\cdot}$ 也等于零。由方程(4.3.19)，得到广义坐标 q_s^0 满足方程

$$Q_s - \frac{\partial}{\partial q_s}(V^0 + V^\omega) = 0, \quad (s=1,\cdots,n) \qquad (4.3.34)$$

如果 n 个方程（4.3.34）有解（4.3.33）（1个或几个），那么就确定了相对平衡位置。相对平衡位置的稳定性可按运动稳定性的通常方法分别对每个可能的相对平衡位置进行研究。

5. 被载体相对运动微分方程的其它形式

被载体相对运动微分方程的 Lagrange 形式（4.3.19），可变换为 Nielsen 形式和 Appell 形式。

命题 2 我们有

$$N_s(T_r) = E_s(T_r), \quad (s=1,\cdots,n) \qquad (4.3.35)$$

命题 3 我们有

$$E_s(T_r) = \frac{\partial S_r}{\partial \ddot{q}_s} \qquad (4.3.36)$$

其中 S_r 为相对运动的加速度能量。

命题 2 和命题 3 容易证明。

据命题 2，方程(4.3.19)，(4.3.21)，(4.3.23)和(4.3.26)可写成 Nielsen 形式

$$N_s(T_r) = Q_s - \frac{\partial}{\partial q_s}(V^0 + V^\omega) + Q_s^{\cdot} + \Gamma_s, \quad (s=1,\cdots,n) \qquad (4.3.37)$$

$$N_s(T_r) = Q_s - \frac{\partial V^0}{\partial q_s}, \quad (s=1,\cdots,n) \qquad (4.3.38)$$

$$N_s(T_r) = Q_s - \frac{\partial V^\omega}{\partial q_s} + Q_s^{\cdot} + \Gamma_s, \quad (s=1,\cdots,n) \qquad (4.3.39)$$

$$N_s(T_r)=Q_s+\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i\left(x'_i\frac{\partial x'_i}{\partial q_s}+y'_i\frac{\partial y'_i}{\partial q_s}\right)$$
$$+2\omega\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\overset{*}{y}'_i\frac{\partial x'_i}{\partial q_s}-\overset{*}{x}'_i\frac{\partial y'_i}{\partial q_s}\right)$$
$$(s=1,\cdots,n) \qquad (4.3.40)$$

据命题 3，方程(4.3.19),(4.3.21),(4.3.23)和(4.3.26)可写成 Appell 形式

$$\frac{\partial S_r}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s-\frac{\partial}{\partial q_s}(V^0+V^*)+Q_s^{\circ}+\Gamma_s, \quad (s=1,\cdots,n)$$
$$(4.3.41)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s-\frac{\partial V^0}{\partial q_s}, \quad (s=1,\cdots,n) \qquad (4.3.42)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s-\frac{\partial V^*}{\partial q_s}+Q_s^{\circ}+\Gamma_s, \quad (s=1,\cdots,n) \quad (4.3.43)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s+\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i\left(x'_i\frac{\partial x'_i}{\partial q_s}+y'_i\frac{\partial y'_i}{\partial q_s}\right)$$
$$+2\omega\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\overset{*}{y}'_i\frac{\partial x'_i}{\partial q_s}-\overset{*}{x}'_i\frac{\partial y'_i}{\partial q_s}\right), \quad (s=1,\cdots,n)$$
$$(4.3.44)$$

例 1 一质量为m的质点在重力作用下在半径为a的光滑圆管中运动，此圆管以角速度ω绕与其平面成α角并过圆心的固定铅垂轴Oz匀速转动。研究质点相对运动微分方程和相对平衡位置[11]。

此问题属于载体以匀角速度ω作定轴转动的情形。取质点离圆管最低点张角θ为广义坐标，则相对运动的动能为

$$T_r=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 \qquad (a)$$

势能为

$$V=-mga\cos\theta\cos\alpha \qquad (b)$$

在圆管上固联一坐标系 $Ox'y'z'$，其中 Oz' 与 Oz 重合，Oy' 与 Oz' 垂直且在圆管平面内，Ox' 与 Oy'，Oz' 成右手系。点的相对坐标为

$$x'=a\cos\theta\sin\alpha,\quad y'=a\sin\theta,\quad z'=-a\cos\theta\cos\alpha$$

相对运动动力学的 Lagrange 方程（4.3.26）给出为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r}{\partial\dot\theta}-\frac{\partial T_r}{\partial\theta}=-\frac{\partial V}{\partial\theta}+m\omega^2\left(x'\frac{\partial x'}{\partial\theta}+y'\frac{\partial y'}{\partial\theta}\right)$$

$$+2\omega m\left(\overset{*}{y}'\frac{\partial x'}{\partial\theta}-\overset{*}{x}'\frac{\partial y'}{\partial\theta}\right)$$

即

$$ma^2\ddot\theta=-mga\sin\theta\cos\alpha+m\omega^2a^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\alpha \qquad (c)$$

这就是所求相对运动微分方程。

此问题存在广义能量积分

$$\frac{\partial L_r}{\partial\dot\theta}\dot\theta-L_r=h$$

即

$$\frac{1}{2}ma^2\dot\theta^2-mga\cos\theta\cos\alpha-\frac{1}{2}m\omega^2a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta\sin^2\alpha)=h \qquad (d)$$

此积分亦可直接由方程(c)积分而得到。

假设 $\theta=\theta_0$ 为相对平衡位置，则有

$$-mga\sin\theta_0\cos\alpha+m\omega^2a^2\sin\theta_0\cos\theta_0\cos^2\alpha=0$$

因此

$$\sin\theta_0=0 \qquad (e)$$

$$\cos\theta_0=\frac{g}{a\omega^2\cos\alpha} \qquad (f)$$

方程(e)表明，$\theta_0=0$ 或 $\theta_0=\pi$ 是两个相对平衡位置。在方程(f)中，如果 $\frac{g}{a\omega^2\cos\alpha}\leqslant1$，则有解

$$\theta_0=\arccos\left(\frac{g}{a\omega^2\cos\alpha}\right)$$ ‖

4.3.2 非完整系统的相对运动动力学

1. Euler-Lagrange 形式的方程

首先，讨论非完整系统相对运动动力学的带乘子的方程。设被载系统的运动受有 g 个理想非线性非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0,\quad (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n)\quad (4.3.45)$$

系统在惯性坐标系中的 Routh 方程为(3.1.45)，即

$$E_s(T)=Q_s+\sum_{\beta=1}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s},\quad (s=1,\cdots,n)\quad (4.3.46)$$

按照 4.3.1 中的方法，容易将方程（4.3.46）在与载体相固联的动坐标系中写出为

$$E_s(T_r)=Q_s-\frac{\partial}{\partial q_s}(V^0+V^\omega)+Q_s^*+\Gamma_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s},$$

$$(s=1,\cdots,n)\quad (4.3.47)$$

这是非完整系统相对运动动力学的 Routh 方程。

其次，讨论非完整系统相对运动动力学的广义 Чаплыгин 方程。非完整系统在惯性坐标系中的广义 Чаплыгин 方程为（3.1.81），即

$$E_\sigma(\tilde{T})-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}T_\sigma^{\varepsilon+\beta}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma$$

$$(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\quad (4.3.48)$$

类似于 4.3.1 中的讨论，将 $\tilde{T}=\tilde{T}_e+\tilde{T}_m+\tilde{T}_r$ 代入（4.3.48），得到

$$E_\sigma(\tilde{T}_r)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T_r}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}T_\sigma^{\varepsilon+\beta}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\tilde{T}_r}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}=$$

$$=\tilde{Q}_\sigma-\frac{\partial}{\partial q_\sigma}(V^0+V^\omega)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial(V^0+V^\omega)}{\partial q_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}+\tilde{Q}_\sigma^{\dot{\omega}}+\tilde{\Gamma}_\sigma,$$

$$(\sigma=1,\cdots,\epsilon)\qquad(4.3.49)$$

其中

$$\tilde{Q}_\sigma^{\dot{\omega}}=Q_\sigma^{\dot{\omega}}+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\epsilon+\beta}^{\dot{\omega}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma},\quad\tilde{\Gamma}_\sigma=\Gamma_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\Gamma_{\epsilon+\beta}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}$$

方程(4.3.49)就是非完整系统相对运动动力学的广义Чаплыгин方程[12]。

2. Nielsen 形式的方程

设系统受有非完整约束(3.1.51)。

命题4 我们有

$$N_\sigma(\tilde{T}_r)=E_\sigma(\tilde{T}_r)+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\tilde{T}_r}{\partial q_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma},\qquad(\sigma=1,\cdots,\epsilon)$$

$$(4.3.50)$$

由§3.2中命题10容易证明此命题。

将式(4.3.50)代入式(4.3.49),得到

$$N_\sigma(\tilde{T}_r)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T_r}{\partial\dot{q}_{\epsilon+\beta}}N_\sigma(\varphi_\beta)-2\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T_r}{\partial q_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}$$

$$=\tilde{Q}_\sigma-\frac{\partial}{\partial q_\sigma}(V^0+V^\omega)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial(V^0+V^\omega)}{\partial q_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}+\tilde{Q}_\sigma^{\dot{\omega}}+\tilde{\Gamma}_\sigma,$$

$$(\sigma=1,\cdots,\epsilon)\qquad(4.3.51)$$

方程(4.3.51)就是非完整系统相对运动动力学的广义Nielsen方程[12]。

3. Appell 形式的方程

命题5 我们有

$$\frac{\partial\tilde{S}_r}{\partial\ddot{q}_\sigma}=E_\sigma(\tilde{T}_r)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T_r}{\partial\dot{q}_{\epsilon+\beta}}T_\sigma^{\epsilon+\beta}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\tilde{T}_r}{\partial q_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma},$$

$$(\sigma=1,\cdots,\epsilon)\qquad(4.3.52)$$

其中 $\tilde{S}_r$ 为 S_r 中借助约束（3.1.51）消去 $\dot{q}_{\epsilon+\beta}$ 和 $\ddot{q}_{\epsilon+\beta}$ 所得表达式。

〔证明〕

$$\frac{\partial \tilde{S}_r}{\partial \ddot{q}_\sigma}=\frac{\partial S_r}{\partial \ddot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial S_r}{\partial \ddot{q}_{\epsilon+\beta}}\cdot\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}=E_\sigma(T_r)+\sum_{\beta=1}^{g}E_{\epsilon+\beta}(T_r)\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}$$

$$E_\sigma(\tilde{T})-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_{\epsilon+\beta}}T_\sigma^{\epsilon+\beta}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \tilde{T}_r}{\partial q_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}$$

$$=E_\sigma(T_r)+\sum_{\beta=1}^{g}E_{\epsilon+\beta}(T_r)\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}$$

利用命题5，方程（4.3.49）可写成Appell形式

$$\frac{\partial \tilde{S}_r}{\partial \ddot{q}_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma-\frac{\partial}{\partial q_\sigma}(V^0+V^\omega)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial(V^0+V^\omega)}{\partial q_{\epsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}$$

$$+\tilde{Q}_\sigma^{\omega}+\tilde{\Gamma}_\sigma,\qquad(\sigma=1,\cdots,\epsilon)\tag{4.3.53}$$

方程（4.3.53）就是非完整系统相对运动动力学的Appell方程[12]。

4. 能量方程

将广义力分成有势的 Q''_s 和非势的 Q'_s，有

$$Q''_s=-\frac{\partial V}{\partial q_s}$$

此时方程（4.3.47）给出

$$E_s(L_r)=Q_s^{\omega}+\Gamma_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}+Q'_s,\qquad(s=1,\cdots,n)\tag{4.3.54}$$

用类似于得到式（4.3.31）的讨论，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L_r\right)=$$

$$=\sum_{s=1}^{n} Q_s^0\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n} Q_s'\dot{q}_s-\frac{\partial L_r}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s \quad (4.3.55)$$

方程（4.3.55）可称为非完整系统相对运动动力学的能量方程。由此，得到下述命题。

命题6 如果L_r不显含t，非势力为陀螺力或不存在，$\dot{\boldsymbol{\omega}}=0$，且约束方程对广义速度$\dot{q}_s$是齐次的，则存在广义能量积分

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L_r=h=\text{const.} \quad (4.3.56)$$

例 2 设载体为一水平面，基点O的速度$\boldsymbol{v}_0$在平面内，角速度$\boldsymbol{\omega}$垂直于平面，且$\boldsymbol{v}_0$和$\boldsymbol{\omega}$都是时间的已知函数。试研究平面上的Чаплыгин雪橇的运动[5]。

假设雪橇质心C在对称轴（刀片方向）上，其在平面上投影距雪橇与平面的接触点P为a，雪橇对通过C而垂直于水平面的轴的转动惯量为J_c。设P在动系$Ox'y'$中的坐标为x'，y'，雪橇对称轴CP与轴Ox'的夹角为θ，则非完整约束为

$$\dot{y}'=\dot{x}'\text{tg}\theta \quad (a)$$

系统相对运动的动能为

$$T_r=\frac{1}{2}m\{(\dot{x}-a\dot{\theta}\sin\theta)^2+(\dot{y}+a\dot{\theta}\cos\theta)^2\}+\frac{1}{2}J_c\dot{\theta}^2 \quad (b)$$

考虑到约束（a）后，有

$$\tilde{T}_r=\frac{1}{2}m\frac{\dot{x}^2}{\cos^2\theta}+\frac{1}{2}(J_c+ma^2)\dot{\theta}^2 \quad (c)$$

方程（4.3.49）给出为

$$E_{x'}(\tilde{T}_r)-\frac{\partial T_r}{\partial \dot{y}'}T_{x'}^{y'}-\frac{\partial \tilde{T}_r}{\partial y'}\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \dot{x}'}$$

$$=\tilde{Q}_{x'}-\frac{\partial}{\partial x'}(V^0+V^\omega)-\frac{\partial(V^0+V^\omega)}{\partial y'}\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \dot{x}'}+\tilde{Q}_{x'}^{\dot{\omega}}+\tilde{\Gamma}_{x'} \quad (d)$$

$$E_\theta(\widetilde{T}_r)-\frac{\partial T_r}{\partial \dot{y}'}T_\theta^{y'}-\frac{\partial \widetilde{T}_r}{\partial y'}\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \dot{\theta}}$$

$$=\widetilde{Q}_\theta-\frac{\partial}{\partial \theta}(V^0+V^\omega)-\frac{\partial(V^0+V^\omega)}{\partial y'}\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \dot{\theta}}+\widetilde{Q}_\theta^{\dot{\varphi}}+\widetilde{\Gamma}_\theta \qquad (e)$$

由式(a)、(b)和(c)计算得

$$E_{x'}(\widetilde{T}_r)=m\left(\frac{\ddot{x}'}{\cos^2\theta}+\frac{2\dot{x}'\dot{\theta}\sin\theta}{\cos^3\theta}\right),$$

$$E_\theta(\widetilde{T}_r)=(J_c+ma^2)\ddot{\theta}-\frac{m\dot{x}'^2\sin\theta}{\cos^3\theta},$$

$$\frac{\partial T_r}{\partial \dot{y}'}T_{x'}^{y'}=m(\dot{x}'\mathrm{tg}\theta+a\dot{\theta}\cos\theta)\frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta}, \qquad (f)$$

$$\frac{\partial T_r}{\partial \dot{y}'}T_\theta^{y'}=-m(\dot{x}'\mathrm{tg}\theta+a\dot{\theta}\cos\theta)\frac{\dot{x}'}{\cos^2\theta},$$

$$\frac{\partial \widetilde{T}_r}{\partial y'}=0$$

设雪橇除受重力外，无其它主动力作用，则有

$$\widetilde{Q}_{x'}=0,\quad \widetilde{Q}_\theta=0 \qquad (g)$$

设基点加速度在固定坐标系中的投影为a_{0x}、a_{0y}，则

$$V^0=m\{[a_{0x}(x'+a\cos\theta)+a_{0y}(y'+a\sin\theta)]\cos\varphi$$
$$+[-a_{0x}(y'+a\sin\theta)+a_{0y}(x'+a\cos\theta)]\sin\varphi\}$$

其中$\varphi=\omega$，于是有

$$\frac{\partial V^0}{\partial x'}+\frac{\partial V^0}{\partial y'}\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \dot{x}'}=\frac{m}{\cos\theta}[a_{0x}\cos(\theta+\varphi)+a_{0y}\sin(\theta+\varphi)]$$

$$\frac{\partial V^0}{\partial \theta}+\frac{\partial V^0}{\partial y'}\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \dot{\theta}}=ma[-a_{0x}\sin(\theta+\varphi)+a_{0y}\cos(\theta+\varphi)] \qquad (h)$$

又

$$V^\omega=-\frac{1}{2}\{J_c+m[(x'+a\cos\theta)^2+(y'+a\sin\theta)^2]\}\omega^2$$

因此

$$\frac{\partial V^{\omega}}{\partial x'}+\frac{\partial V^{\omega}}{\partial y'}\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \dot{x}'}=-m\omega^2[(x'+a\cos\theta)+(y'+a\sin\theta)\mathrm{tg}\theta] \qquad (i)$$

$$\frac{\partial V^{\omega}}{\partial \theta}+\frac{\partial V^{\omega}}{\partial y'}\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \dot{\theta}}=-ma\omega^2(-x'\sin\theta+y'\cos\theta)$$

广义转动惯性力可计算得

$$Q_1^{\dot{\omega}}=m\dot{\omega}(y'+a\sin\theta),$$

$$Q_2^{\dot{\omega}}=-m\dot{\omega}(x'a\cos\theta+y'\sin\theta+a^2)-J_c\dot{\omega},$$

$$Q_3^{\dot{\omega}}=-m\dot{\omega}(x'+a\cos\theta)$$

其中令 $q_1=x'$，$q_2=\theta$，$q_3=y'$。于是

$$\widetilde{Q}_1^{\dot{\omega}}=Q_1^{\dot{\omega}}+Q_3^{\dot{\omega}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{x}}=m\dot{\omega}(y'-x'\mathrm{tg}\theta),$$

$$\widetilde{Q}_2^{\dot{\omega}}=-m\dot{\omega}(x'a\cos\theta+y'a\sin\theta+a^2)-J_c\dot{\omega} \qquad (j)$$

广义陀螺力为

$$\Gamma_1=2ma\omega\dot{\theta}\cos\theta+2m\omega\dot{x}'\mathrm{tg}\theta,\quad \Gamma_2=-2ma\omega\frac{\dot{x}'}{\cos\theta},$$

$$\Gamma_3=-2m\omega\dot{x}'+2ma\omega\dot{\theta}\sin\theta$$

于是

$$\widetilde{\Gamma}_1=\Gamma_1+\Gamma_3\frac{\partial \dot{y}'}{\partial \dot{x}'}=\frac{2ma\omega\dot{\theta}}{\cos\theta},\quad \widetilde{\Gamma}_2=-2ma\omega\frac{\dot{x}'}{\cos\theta} \qquad (k)$$

最后，将式(f)，(g)，(h)，(i)，(j)和(k)代入方程(d)和(e)，得

$$m\left(\frac{\ddot{x}'}{\cos^2\theta}+\frac{2\dot{x}'\dot{\theta}\sin\theta}{\cos^3\theta}\right)-m(\dot{x}'\mathrm{tg}\theta+a\dot{\theta}\cos\theta)\frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta}$$

$$=-\frac{m}{\cos\theta}[a_{0x}\cos(\theta+\varphi)+a_{0y}\sin(\theta+\varphi)]$$

$$+m\omega^2[x'+a\cos\theta+(y'+a\sin\theta)\mathrm{tg}\theta]$$

$$+m\dot{\omega}(y'-x'\mathrm{tg}\theta)+2ma\omega\frac{\dot{\theta}}{\cos\theta} \qquad (l)$$

$$(J_c+ma^2)\ddot{\theta}-m\frac{\dot{x}'^2\sin\theta}{\cos^3\theta}+m(\dot{x}'\mathrm{tg}\theta+a\dot{\theta}\cos\theta)\frac{\dot{x}'}{\cos^2\theta}$$

$$=-ma[-a_{0x}\sin(\theta+\varphi)+a_{0y}\cos(\theta+\varphi)]$$

$$+ma\omega^2(-x'\sin\theta+y'\cos\theta)$$

$$-m\dot{\omega}(x'a\cos\theta+y'a\sin\theta+a^2)-J_c\dot{\omega}-2ma\omega\frac{\dot{x}'}{\cos\theta}\qquad\|$$

§4.4 可控力学系统的分析动力学

可控系统的分析动力学问题大致可以分成三类：约束方程中包含控制参数的，带有伺服约束的，以及受迫控制的。本节讨论这三类可控力学系统的动力学问题。

4.4.1 带参数约束系统的分析动力学

众所周知，力学系统的运动依赖于作用力以及所施加的约束。因此，既可借助于力来控制运动（称为动力学控制），也可借助于约束来控制运动（称为运动学控制）。这里我们研究一类力学系统，它的约束依赖于某些控制参数。

力学中所研究的通常约束是表示物体间的接触条件的。这类约束的反力显然是接触作用力，它属于被动力的范畴，以区别于加在物体上的主动力。我们这里所研究的约束也表示接触条件，但不同于通常的约束，它的约束反力不纯粹是被动力，因为这些反力不仅依赖于主动力，而且一般说来还依赖于出现于约束方程中的控制参数，主动的作用可以借助这些参数加在系统的运动上。

1. 带参数约束系统的微分变分原理

研究一质点系，点的质量为 $m_\nu(\nu=1,\cdots,N)$，直角坐标为 $x_i(i=1,\cdots,3N)$，主动力在坐标轴上的投影为 $X_i(i=1,\cdots,3N)$，因此，第 ν 个质点的质量，它的坐标以及主动力在坐标轴

上投影分别为$m_{3\nu-2}=m_{3\nu-1}=m_{3\nu}$，$x_{3\nu-2}$，$x_{3\nu-1}$，$x_{3\nu}$，$X_{3\nu-2}$，$X_{3\nu-1}$，$X_{3\nu}$。设系统受有$m$个完整约束

$$f_\rho(x_i,u_r,t)=0,$$

$$(\rho=1,\cdots,m;\ i=1,\cdots,3N;\ r=1,\cdots,l) \qquad (4.4.1)$$

以及g个非完整约束

$$\varphi_\beta(x_i,\dot{x}_i,u_r,t)=0, \quad (\beta=1,\cdots,g) \qquad (4.4.2)$$

并且$m+g<3N$。在一般情形下，约束方程(4.4.1)和(4.4.2)中包含参数u_r。约束(4.4.1)和(4.4.2)称为参数约束，而参数u_r称为控制参数。

系统的虚位移满足条件

$$\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial f_\rho}{\partial x_i}\delta x_i=0, \quad \sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i=0 \qquad (4.4.3)$$

假设约束(4.4.1)和(4.4.2)是理想的，即约束反力R_i在系统虚位移上所作的元功之和为零

$$\sum_{i=1}^{3N}R_i\delta x_i=0 \qquad (4.4.4)$$

在理想约束下，带参数约束系统的D'Alembert-Lagrange原理为

$$\sum_{i=1}^{3N}(X_i-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i=0 \qquad (4.4.5)$$

类似地，可建立这类系统的Jourdain原理

$$\sum_{i=1}^{3N}(X_i-m_i\ddot{x}_i)\delta \dot{x}_i=0 \qquad (4.4.6)$$

和Gauss原理

$$\sum_{i=1}^{3N}(X_i-m_i\ddot{x}_i)\delta \ddot{x}_i=0 \qquad (4.4.7)$$

它们的理想约束条件分别为

$$\sum_{i=1}^{3N} R_i \delta \dot{x}_i = 0 \tag{4.4.8}$$

和

$$\sum_{i=1}^{3N} R_i \delta \ddot{x}_i = 0 \tag{4.4.9}$$

由原理（4.4.5）—（4.4.7）可以看出，带参数约束系统的基本微分原理与通常力学系统的基本微分原理有相同的形式。

2．带参数约束系统的运动微分方程

首先，讨论 Euler-Lagrange 体系的方程。选$n=3N-m$个广义坐标$q_s(s=1,\cdots,n)$，点的直角坐标可表为

$$x_i = x_i(q_s, u_r, t), \quad (i=1,\cdots,3N;\ s=1,\cdots,n;\ r=1,\cdots,l) \tag{4.4.10}$$

将式（4.4.10）代入式（4.4.1），则后者成为恒等式。令

$$\Psi_\beta(q_s,\dot{q}_s,u_r,\dot{u}_r,t) \equiv \varphi_\beta(x_i(q_s,u_r,t),\ \dot{x}_i(q_s,\dot{q}_s,u_r,\dot{u}_r,t),u_r,t)$$

则非完整约束（4.4.2）成为

$$\Psi_\beta(q_s,\dot{q}_s,u_r,\dot{u}_r,t)=0 \tag{4.4.11}$$

由式(4.4.10)，有

$$\dot{x}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \sum_{r=1}^{l} \frac{\partial x_i}{\partial u_r}\dot{u}_r + \frac{\partial x_i}{\partial t} \tag{4.4.12}$$

因此，仍有两个经典关系

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial x_i}{\partial q_s}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_s} \tag{4.4.13}$$

利用关系（4.4.13)，容易将原理(4.4.5）表为Euler-Lagrange形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s = 0 \tag{4.4.14}$$

如果系统是完整的，则原理（4.4.14）中各δq_s彼此独立，于是得到[13]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s, \quad (s=1,\cdots,n) \qquad (4.4.15)$$

这就是带参数约束完整系统的Lagrange方程。它们与通常系统的第二类Lagrange方程有同样的形式。但是，在方程（4.4.15）中还包含一些控制参数。仅当给出控制规律时，方程（4.4.15）才是封闭的。

如果系统是非完整的，原理（4.4.14）中的各 δq_s 将不是独立的，而要受到非完整约束（4.4.11）的限制，这些限制为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \Psi_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0, \quad (\beta=1,\cdots,g) \qquad (4.4.16)$$

由原理（4.4.14）和关系(4.4.16)，利用通常的Lagrange乘子法，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial \Psi_\beta}{\partial \dot{q}_s}, \quad (s=1,\cdots,n) \quad (4.4.17)$$

其中 λ_β 为不定乘子。方程（4.4.17）就是带参数约束系统的Routh方程。如将非完整约束表为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,u_r,\dot{u}_r,t) \qquad (4.4.18)$$

利用原理(4.4.14)，可导出广义坐标下的广义Чаплыгин方程[34]

$$E_\sigma(\tilde{T})-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}E_\sigma(\varphi_\beta)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma,$$

$$(\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \qquad (4.4.19)$$

准坐标下的广义Чаплыгин方程

$$E_\sigma^*(T^*)-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}E_\sigma^*(\dot{q}_s)=E_\sigma^*, \quad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \quad (4.4.20)$$

以及Boltzmann-Hamel方程

$$E_\sigma^*(T^*)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\sum_{s=1}^{n}E_s(\omega_k)\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_\sigma}=E_\sigma^*, \quad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon)$$

$$(4.4.21)$$

必须注意，尽管带参数约束的非完整系统的 Euler-Lagrange 形式的方程(4.4.17)，(4.4.19)—(4.1.21)与通常非完整系统的方程有同样的形式，但是，在带参数约束系统的方程中出现控制参数。仅当给出控制规律时，这些方程才是封闭的。当然，如果系统中不出现任何控制参数，则这些方程成为通常的方程。

其次，讨论 Nielsen 体系的方程。将 § 3.2 中的命题 9—命题 11 应用于带参数约束系统，容易将 Euler-Lagrange 形式的方程(4.4.17)、(4.4.19)—(4.4.21)写成 Nielsen 形式

$$N_s(T)=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s},\qquad(s=1,\cdots,n)\tag{4.1.22}$$

$$N_\sigma(\widetilde{T})-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}N_\sigma(\varphi_\beta)-2\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}=\widetilde{Q}_\sigma$$

$$(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\tag{4.4.23}$$

$$N_\sigma^*(T^*)-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}N_\sigma^*(\dot{q}_s)=E_\sigma^*,\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\tag{4.4.24}$$

$$N_\sigma^*(T^*)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial\omega_k}\sum_{s=1}^{n}N_s(\omega_k)\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\omega_\sigma}=E_\sigma^*,\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\tag{4.4.25}$$

最后，讨论 Appell 形式的方程。原理（4.4.14）可写成 Appell 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s-\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_s}\right)\delta q_s=0\tag{4.4.26}$$

令 $\widetilde{S}$ 为 S 中借助式（4.4.18）消去 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 和 $\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 所得表达式，则由式（4.4.26）得到

$$\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial\ddot{q}_\sigma}=\widetilde{Q}_\sigma,\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\tag{4.4.27}$$

在带参数约束系统的 Nielsen 体系的方程与 Appell 体系的方程中出现一些控制参数。当给定这些参数时，问题可解。

例 1 在四轮小车的例子中，假设手舵的转角 χ 是可控制的，试建立问题的运动微分方程[5]。

系统的位置由八个参数确定：铰链 B 的坐标 x，y，角 θ，χ（控制参数）以及四个轮子的转角 φ_1，φ_2，φ_3，φ_4。系统的运动受有六个非完整约束，分别代表铰链 B、后轴中心 A 的速度没有横向分量，以及四个轮子纯滚动的条件，即

$$
\begin{aligned}
&-\dot{x}\sin(\theta+\chi)+\dot{y}\cos(\theta+\chi)=0\\
&-\dot{x}\sin\theta+\dot{y}\cos\theta-l\dot{\theta}=0\\
&\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta-a\dot{\theta}-r_1\dot{\varphi}_1=0\\
&\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta+a\dot{\theta}-r_1\dot{\varphi}_2=0\\
&\dot{x}\cos(\theta+\chi)+\dot{y}\sin(\theta+\chi)-c(\dot{\theta}+\dot{\chi})-r_2\dot{\varphi}_3=0\\
&\dot{x}\cos(\theta+\chi)+\dot{y}\sin(\theta+\chi)+c(\dot{\theta}+\dot{\chi})-r_2\dot{\varphi}_4=0
\end{aligned}
\tag{a}
$$

系统的动能为[9]

$$
\begin{aligned}
T=&\frac{1}{2}M_1\{\dot{x}^2+\dot{y}^2+2(s-l)\dot{\theta}(-\dot{x}\sin\theta+\dot{y}\cos\theta)+(s-l)^2\dot{\theta}^2\}\\
&+\frac{1}{2}(\Theta_1-M_1s^2)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}M_2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)\\
&+\frac{1}{2}\Theta_2(\dot{\theta}+\dot{\chi})^2+m_1\{\dot{x}^2+\dot{y}^2+(a^2+l^2)\dot{\theta}^2\\
&-2l\dot{\theta}(-\dot{x}\sin\theta+\dot{y}\cos\theta)\}+J_1'\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}J_1(\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2)\\
&+m_3\{\dot{x}^2+\dot{y}^2+c^2(\dot{\theta}-\dot{\chi})^2\}+J_3'(\dot{\theta}+\dot{\chi})^2+\frac{1}{2}J_3(\dot{\varphi}_3^2+\dot{\varphi}_4^2)
\end{aligned}
\tag{b}
$$

其中 M_1，M_2 分别为后轴和前轴的质量（不包括轮子），Θ_1，Θ_2 分别为它们过 A 和 B 并垂直于路面的轴的惯性矩；m_1，m_3 分别为后轮和前轮的质量，J_1，J_3 分别为它们对过轮心并与轮面相垂直的轴的惯性矩，J_1'，J_3' 分别为它们对直径的惯性矩。

取

$$\omega_1 = \dot{x}\cos(\theta+\varkappa)+\dot{y}\sin(\theta+\varkappa) \tag{c}$$

由式(a)，(c)解得

$$\dot{q}_1=\dot{x}=\omega_1\cos(\theta+\varkappa),\quad \dot{q}_2=\dot{y}=\omega_1\sin(\theta-\varkappa)$$

$$\dot{q}_3=\dot{\theta}=\frac{\omega_1}{l}\sin\varkappa,\quad \dot{q}_4=\dot{\varPhi}_1=\frac{1}{r_1}\omega_1\left(\cos\varkappa-\frac{a}{l}\sin\varkappa\right)$$

$$\dot{q}_5=\dot{\varPhi}_2=\frac{1}{r_1}\omega_1\left(\cos\varkappa+\frac{a}{l}\sin\varkappa\right) \tag{d}$$

$$\dot{q}_6=\dot{\varPhi}_3=\frac{1}{r_2}\omega_1\left(1-\frac{c}{l}\sin\varkappa\right)-\frac{c}{r_2}\dot{\chi}$$

$$\dot{q}_7=\dot{\varPhi}_4=\frac{1}{r_2}\omega_1\left(1+\frac{c}{l}\sin\varkappa\right)+\frac{c}{r_2}\dot{\chi}$$

将式(d)代入式(b)，得

$$T^*=\frac{1}{2}\{(\mu+\mu_1\sin^2\varkappa)\omega_1^2+l\nu\dot{\chi}^2+2\nu\omega_1\dot{\chi}\sin\varkappa\} \tag{e}$$

其中

$$\mu=M_1+2m_1+M_2+2m_3+\frac{2J_1}{r_1^2}+\frac{2J_3}{r_2^2}$$

$$\mu_1=\frac{1}{l^2}(\Theta_1+2m_1a^2+2J_1'+\Theta_2+2m_3c^2+2J_3') \tag{f}$$

$$-M_1-2m_1+\frac{2J_3}{r_2^2}\frac{c^2}{l^2}-\frac{2J_1}{r_1^2}\left(1-\frac{a^2}{l^2}\right)$$

$$\nu=\frac{1}{l}\left(\Theta_2+2m_3c^2+2J_3'+2\frac{J_3c^2}{r_2^2}\right)$$

于是有

$$\dot{T}^*=(\mu+\mu_1\sin^2\varkappa)\omega_1\dot{\omega}_1+\mu_1\sin\varkappa\cos\varkappa\,\omega_1^2\dot{\varkappa}+l\nu\dot{\chi}\ddot{\chi}$$

$$+\nu\dot{\omega}_1\dot{\chi}\sin\varkappa+\nu\omega_1\dot{\varkappa}^2\cos\varkappa+\nu\omega_1\ddot{\chi}\sin\varkappa \tag{g}$$

方程（4.4.24）给出

$$\frac{\partial\dot{T}^*}{\partial\omega_1}-2\frac{\partial T^*}{\partial\pi_1}-\sum_{s=1}^{7}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\partial\ddot{q}_s}{\partial\omega_1}-2\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\pi_1}\right)=E_1^* \tag{h}$$

容易计算得

$$\frac{\partial \dot{T}^*}{\partial \omega_1}=(\mu+\mu_1\sin^2\chi)\dot{\omega}_1+2\mu_1\omega_1\dot{\chi}\sin\chi\cos\chi+\nu\dot{\chi}^2\cos\chi+\nu\ddot{\chi}\sin\chi$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \pi_1}=\sum_{s=1}^{7}\frac{\partial T^*}{\partial q_s}\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_1}=0$$

$$\sum_{s=1}^{7}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \ddot{q}_s}{\partial \omega_1}-2\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \pi_1}\right)=\mu_1\omega_1\dot{\chi}\sin\chi\cos\chi+\nu\dot{\chi}^2\cos\chi$$

将这些表达式代入方程(h)，得到

$$(\mu+\mu_1\sin^2\chi)\dot{\omega}_1+\mu_1\omega_1\dot{\chi}\sin\chi\cos\chi+\nu\ddot{\chi}\sin\chi=E_1^* \quad (i)$$

如果已知控制规律 $\chi=\chi(t)$ 以及 E_1^*，那么可由方程(i)解得 $\omega_1=\omega_1(t)$，进而可求得 x，y，θ，φ_1，φ_2，φ_3，φ_4 为时间的函数。

4.4.2 包含伺服约束系统的分析动力学

包含伺服约束的系统是一类可控力学系统。在这类系统中，约束的实现不是被动的，而是利用某些力（电磁力、压缩空气的压力等），即一些辅助能源，这些能源自动地起作用，并自动地实现这样或那样的约束。

1. 约束的分类和 D'Alembert–Lagrange 原理的应用

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定，并受有 g 个理想的通常非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0, \quad (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n) \quad (4.4.28)$$

以及 r 个包含伺服的约束：n_1 个完整约束及 $n_2(n_2=r-n_1)$ 个非完整约束

$$\begin{aligned}&\varphi_\alpha(q_s,t)=0, \quad (\alpha=1,\cdots,n_1)\\&\Psi_{n_1+\gamma}(q_s,\dot{q}_s,t)=0, \quad (\gamma=1,\cdots,n_2)\end{aligned} \quad (4.4.29)$$

我们称式(4.4.28)为第一类约束，称式(4.4.29)为第二类约束。对于第一类约束(4.4.28)，按 Appell–Четаев 定义，有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0, \quad (\beta=1,\cdots,g) \tag{4.4.30}$$

第一类约束反力的虚功之和为零，但第二类约束反力的功一般说异于零。在为第一类约束所允许的虚位移中间，存在一些虚位移，使第二类约束反力在其上所作功为零；设这些虚位移满足 j 个关系

$$\sum_{s=1}^{n}A_{\nu s}\delta q_s=0, \quad (\nu=1,\cdots,j) \tag{4.4.31}$$

一般说来，$A_{\nu s}$ 与约束（4.4.29）没有联系。

一般形式的 D'Alembert-Lagrange 原理为

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_{i1}+\boldsymbol{R}_{i2})\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{4.4.32}$$

其中 $\boldsymbol{R}_{i1}$ 为第一类约束反力，$\boldsymbol{R}_{i2}$ 为第二类约束反力，$\boldsymbol{F}_i$ 为主动力。因第一类约束反力的虚功之和为零，即

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_{i1}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{4.4.33}$$

于是原理（4.4.32）可写成

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_{i2})\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{4.4.34}$$

进而，如果限于研究使第二类约束反力的功为零的虚位移，即满足下式的虚位移

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_{i2}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{4.4.35}$$

则原理（4.4.34）可写成形

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{4.4.36}$$

原理（4.4.34）和（4.4.36）可表为广义坐标形式。

在 Euler-Lagrange 体系中，表为

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial T}{\partial q_s}+Q_s+L_{s2}\right)\delta q_s=0 \qquad (4.4.37)$$

其中

$$L_{s2}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_{i2}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}$$

以及

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial T}{\partial q_s}+Q_s\right)\delta q_s=0 \qquad (4.4.38)$$

在 Nielsen 体系中，可表为

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}+2\frac{\partial T}{\partial q_s}+Q_s+L_{s2}\right)\delta q_s=0 \qquad (4.4.39)$$

以及

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}+2\frac{\partial T}{\partial q_s}+Q_s\right)\delta q_s=0 \qquad (4.4.40)$$

在 Appell 体系中，可表为

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}+Q_s+L_{s2}\right)\delta q_s=0 \qquad (4.4.41)$$

以及

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}+Q_s\right)\delta q_s=0 \qquad (4.4.42)$$

原理（4.4.37)—(4.4.42）是推导包含伺服约束系统运动微分方程的依据。

2．包含伺服约束系统的运动方程

首先，建立带乘子的方程。

根据原理（4.4.38)，(4.4.40）和（4.4.42)，以及关系（4.4.30）和（4.4.31)，利用通常的Lagrange乘子法，容易得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{\nu=1}^{j}\mu_\nu A_{\nu s}, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.4.43}$$

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{\nu=1}^{j}\mu_\nu A_{\nu s}, \qquad (s=1,\ \cdots,n) \tag{4.4.44}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{\nu=1}^{j}\mu_\nu A_{\nu s}, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.4.45}$$

其中 λ_β 和 μ_ν 为不定乘子。这些方程的任一组联同表示通常非完整约束的 g 个方程（4.4.28）以及表示伺服约束的 r 个方程(4.4.29)，给出对于 $n+g+j$ 个变量 q_s,λ_β、μ_ν 的 $n+g+r$ 个方程。如果 $r>j$，那么一般地说，问题是不可能成立的；如果 $r=j$，方程的解就确定系统的运动；如果 $r<j$，那么问题是不确定的。

其次，讨论四种特殊情形。

第一种情形。设由式（4.4.30）和（4.4.31）可解出 $g+j=m$ 个 δq：

$$\delta q_{n-m+k}=\sum_{\zeta=1}^{n-m}B_{n-m+k,\zeta}\delta q_\zeta, \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{4.4.46}$$

其中系数 $B_{n-m+k,\zeta}$ 可为 q_s、$\dot{q}_s$、t 的函数。将式(4.4.46) 代入原理（4.4.38)、(4.4.40）和（4.4.42)，并注意到变分 δq_ζ 的独立性，得到以下各种 Maggi 型方程[15,16]

$$E_\zeta(T)+\sum_{k=1}^{m}E_{n-m+k}(T)\,B_{n-m+k,\zeta}=Q_\zeta+\sum_{k=1}^{m}Q_{n-m+k}B_{n-m+k,\zeta}$$

$$(\zeta=1,\cdots,n-m) \tag{4.4.47}$$

$$N_\zeta(T)+\sum_{k=1}^{m}N_{n-m+k}(T)B_{n-m+k,\zeta}=Q_\zeta+\sum_{k=1}^{m}Q_{n-m+k}B_{n-m+k,\zeta}$$

$$(\zeta=1,\cdots,n-m) \tag{4.4.48}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\zeta}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_{n-m+k}}B_{n-m+k,\zeta}=Q_\zeta+\sum_{k=1}^{m}Q_{n-m+k}B_{n-m+k,\zeta}$$

$$(\zeta=1,\cdots,n-m) \qquad (4.4.49)$$

第二种情形。如果关系（4.4.46）归结为

$$\delta q_{n-m+k}=0 \qquad (4.4.50)$$

则由 δq_ζ 的独立性，得到Lagrange方程

$$E_\zeta(T)=Q_\zeta, \qquad (\zeta=1,\cdots,n-m) \qquad (4.4.51)$$

Nielsen方程

$$N_\zeta(T)=Q_\zeta, \qquad (\zeta=1,\cdots,n-m) \qquad (4.4.52)$$

以及Appell方程

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\zeta}=Q_\zeta, \qquad (\zeta=1,\cdots,n-m) \qquad (4.4.53)$$

第三种情形。设第二类约束反力仅仅是障碍运动的辅助系统的接触作用，其位置依赖于坐标 q_s 中的 $q_{n-l+1},\cdots,q_n$。在此情形中，关系（4.4.31）变成

$$\delta q_{n-l+1}=0,\cdots,\delta q_n=0 \qquad (4.4.54)$$

于是方程（4.4.43）—（4.4.45）成为

$$E_\eta(T)=Q_\eta+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_\eta}, \quad (\eta=1,\ \cdots,n-l) \qquad (4.4.55)$$

$$N_\eta(T)=Q_\eta+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_\eta}, \qquad (\eta=1,\cdots,n-l) \qquad (4.4.56)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\eta}=Q_\eta+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_\eta}, \qquad (\eta=1,\cdots,n-l) \qquad (4.4.57)$$

第四种情形。在第三种情形下，再设第一类约束全是完整的，则方程（4.4.55）—（4.4.57）成为

$$E_\eta(T)=Q_\eta, \qquad (\eta=1,\cdots,n-l) \qquad (4.4.58)$$

$$N_\eta(T)=Q_\eta, \qquad (\eta=1,\cdots,n-l) \qquad (4.4.59)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\eta}=Q_\eta, \qquad (\eta=1,\cdots,n-l) \qquad (4.4.60)$$

例 2 一薄板 Q，质量为 m，放在固定光滑水平面上并以点 C 与半径为 R 的圆盘 P 铰接，圆盘也放在同一水平面上，并且可绕其固定中心 O 转动。在点 C 与薄板质心 G 的联线上有一点 A，在 A 上作用有常力 $\boldsymbol{F}$，此力平行于固定直线 Ox。一伺服电机作用在圆盘上，使得实现约束

$$\alpha-\beta=\frac{\pi}{2} \qquad (a)$$

其中 $\alpha=(\widehat{Ox,OC}),\beta=(\widehat{Ox,OA});OC=R,CA=a,CG=b$[11]。

因圆盘 P 的位置仅依赖于参数 α，这属于第四种情形。使第二类约束反力的虚功为零的虚位移满足

$$\delta\alpha=0 \qquad (b)$$

因此，可单独对平板 Q 列写运动微分方程，圆盘 P 的质量不影响运动。平板 Q 的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\{R^2\dot{\alpha}^2+b^2\dot{\beta}^2+2Rb\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\alpha-\beta)+k^2\dot{\beta}^2\} \qquad (c)$$

其中 Mk^2 为平板对质心的惯性矩。考虑到关系 (b)，力 $\boldsymbol{F}$ 的虚功为

$$F\delta(R\cos\alpha+a\cos\beta)=-Fa\sin\beta\delta\beta$$

于是

$$Q_\beta=-Fa\sin\beta \qquad (d)$$

方程（4.4.58）给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\beta}}-\frac{\partial T}{\partial\beta}=Q_\beta \qquad (e)$$

将式(c)、(d)代入方程(e)，考虑到关系(a)消去 α 和 $\dot{\alpha}$，得到

$$m(b^2+k^2)\ddot{\beta}-mRb\dot{\beta}^2+Fa\sin\beta=0 \qquad (f)$$

例 3 一质量平面 P 可在一固定水平面 Oxy 上平动地滑动。在平面 P 上，有一半径为 R，质量为 M 的球可无滑动地滚动。平面 P 的运动用伺服装置自动地调节，以使球心以角速度 ω 相对固定轴 $Oxyz$ 绕 Oz 匀速转动。

设 u,v 为平面 P 上一点 A 对轴 Ox，Oy 的坐标，平面的位置仅由此二参数确定。设 ξ,η 为球心的两个水平坐标，p,q,r 为球的瞬时角速度在固定轴 $Oxyz$ 上的投影，ψ,θ,φ 为 Euler 角。我们有

$$p=\dot\theta\cos\psi+\dot\varphi\sin\theta\sin\psi,\quad q=\dot\theta\sin\psi-\dot\varphi\sin\theta\cos\psi,\quad r=\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta \tag{a}$$

表示球沿平面 P 无滑动的滚动条件的非完整约束是（第一类约束）

$$\dot\xi-qR=\dot u,\quad \dot\eta+pR=\dot v \tag{b}$$

而伺服约束是（第二类约束）

$$\dot\xi+\omega\eta=0,\quad \dot\eta-\omega\xi=0 \tag{c}$$

现在直接应用原理（4.4.37）来建立问题的运动微分方程。

令　$q_1=\xi,q_2=\eta,q_3=\theta,q_4=\varphi,q_5=\psi,q_6=u,q_7=v$。伺服约束反力的虚功之和为 $L_{62}\delta u+L_{72}\delta v$。原理（4.4.37）给出

$$\sum_{l=1}^{5}\{-E_l(T)+Q_l\}\delta q_l+\{-E_6(T)+Q_6+L_{62}\}\delta q_6$$
$$+\{-E_7(T)+Q_7+L_{72}\}\delta q_7=0 \tag{d}$$

系统动能为

$$T=\frac{1}{2}M(\dot\xi^2+\dot\eta^2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}MR^2(\dot\theta^2+\dot\varphi^2+\dot\psi^2+2\dot\varphi\dot\psi\cos\theta) \tag{e}$$

于是

$$E_6(T)=E_7(T)=0 \tag{f}$$

加在球上的主动力仅有重力，故

$$Q_s=0,\qquad (s=1,\cdots,7) \tag{g}$$

第一类约束加在虚位移上的条件为

$$\begin{aligned}\delta q_1&=R(\sin\psi\delta q_3-\sin\theta\cos\psi\delta q_4)+\delta q_6\\ \delta q_2&=-R(\cos\psi\delta q_3+\sin\theta\sin\psi\delta q_4)+\delta q_7\end{aligned} \tag{h}$$

将式（f），（g）和（h）代入原理（d），得

$$\{-E_3(T)-E_1(T)R\sin\psi+E_2(T)R\cos\psi\}\delta q_3+\{-E_4(T)$$
$$+E_1(T)R\sin\theta\cos\psi+E_2(T)R\sin\theta\sin\psi\}\delta q_4+\{-E_5(T)\}\delta q_5$$

$$+\{-E_1(T)+L_{62}\}\delta q_6+\{-E_2(T)+L_{72}\}\delta q_7=0 \qquad (i)$$

原理（i）中各 δq 彼此独立，故得以下五个方程

$$-E_3(T)-E_1(T)R\sin\psi+E_2(T)R\cos\psi=0$$

$$-E_4(T)+E_1(T)R\sin\theta\cos\psi+E_2(T)R\sin\theta\sin\psi=0$$

$$-E_5(T)=0,\quad -E_1(T)+L_{62}=0,\quad -E_2(T)+L_{72}=0 \qquad (j)$$

其中前三个方程用以确定运动，后两个方程可以求出约束反力 L_{62} 和 L_{72}。方程（j）中前三个为

$$-MR\ddot{\xi}\sin\psi+MR\ddot{\eta}\cos\psi-\frac{2}{5}MR^2(\ddot{\theta}+\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta)=0$$

$$MR\ddot{\xi}\sin\theta\cos\psi+MR\ddot{\eta}\sin\theta\sin\psi-\frac{2}{5}MR^2(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)^{\cdot}=0$$

$$\frac{2}{5}MR^2(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^{\cdot}=0$$

借助关系（a）和（b）消去以上方程中的 $\dot{\theta},\dot{\varphi},\dot{\psi},\ddot{\theta},\ddot{\varphi},\ddot{\psi}$，得

$$(-7\ddot{\xi}+2\ddot{u})\sin\psi+(7\ddot{\eta}-2\ddot{v})\cos\psi=0$$

$$(7\ddot{\xi}-2\ddot{u})\sin\theta\cos\psi+(7\ddot{\eta}-2\ddot{v})\sin\theta\sin\psi+\dot{r}\cos\theta=0$$

$$\dot{r}=0$$

进而可化简为

$$7\ddot{\xi}=2\ddot{u},\quad 7\ddot{\eta}=2\ddot{v},\quad \dot{r}=0 \qquad (k)$$

方程（k）联合伺服约束方程（c），便可求解。 ‖

4.4.3 有约束受迫运动控制问题的分析动力学

有约束受迫运动控制问题是不同于上面讨论的两类控制的另一类问题。

1. 有约束的受迫控制问题的基本原理

采用 4.4.1 中的记号 m_i, x_i, X_i，并设约束反力的分量为 X_i^R，则质点运动微分方程为

$$m_i\ddot{x}_i=X_i-X_i^R,\qquad (i=1,\cdots,3N) \qquad (4.4.61)$$

假设对每个质点添加参数 u_i，这些参数按微分方程

$$\mu_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \Phi_i, \qquad (i=1,\cdots,3N) \qquad (4.4.62)$$

而强制改变，其中 $\mu_1=\mu_2=\mu_3,\cdots,\mu_{3N-2}=\mu_{3N-1}=\mu_{3N}$，它们为 t,x_i,u_i 的某些常正函数；Φ_i 为“强制”，可为 $t,u_i,x_i,\dot{x}_i$ 的函数。方程（4.4.62）适合无约束情形。如果有强制反作用力 $X_i^{R''}$，则为

$$\mu_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \Phi_i + X_i^{R''}, \qquad (i=1,\cdots,3N) \qquad (4.4.63)$$

假设所加约束的作用等价于强制反作用 $X_i^{R''}$ 和约束反力 X_i^R，那么理想约束的定义给出[7]

$$\sum_{i=1}^{3N} (X_i^R \delta x_i + X_i^{R''} \delta u_i) = 0 \qquad (4.4.64)$$

由此，考虑到方程（4.4.61）和（4.4.63），得到广义 D'Alembert-Lagrange 原理

$$\sum_{i=1}^{3N} \{(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (\Phi_i - \mu_i\dot{u}_i)\delta u_i\} = 0 \qquad (4.4.65)$$

2．有约束受迫控制问题的运动微分方程

我们研究有完整约束的情形。设系统的运动受有如下 k 个完整约束

$$f_j(x_i, u_i, t) = 0, \qquad (j=1,\cdots,k) \qquad (4.4.66)$$

约束（4.4.66）加在变分 $\delta x_i, \delta u_i$ 上的条件为

$$\sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \delta u_i \right) = 0 \qquad (4.4.67)$$

由原理（4.4.65）和关系（4.4.67），利用 Lagrange 乘子法，容易得到方程

$$X_i - m_i\ddot{x}_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0, \Phi_i - \mu_i\dot{u}_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u_i} = 0$$

$$(i=1,\cdots,3N) \qquad (4.4.68)$$

其中 λ_j 为不定乘子。由 $6N+k$ 个方程（4.4.68）和（4.4.66）可解出 x_i, u_l 和 λ_j。

设系统受有约束(4.4.66)，选 $n=3N-k$ 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$，使得

$$x_i=x_i(q_s,u_l,t),\qquad (i,l=1,\cdots,3N;\ s=1,\cdots,n)\tag{4.4.69}$$

此时，约束（4.4.66）成为恒等式。对式（4.4.69）取变分，得

$$\delta x_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{l=1}^{3N}\frac{\partial x_i}{\partial u_l}\delta u_l\tag{4.4.70}$$

将式（4.4.70）代入原理（4.4.65），得到

$$\sum_{i=1}^{3N}\sum_{s=1}^{n}(X_i-m_i\ddot{x}_i)\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s$$
$$+\sum_{l=1}^{3N}\left\{\sum_{i=1}^{3N}(X_i-m_i\ddot{x}_i)\frac{\partial x_i}{\partial u_l}+\Phi_l-\mu_l\dot{u}_l\right\}\delta u_l=0\tag{4.4.71}$$

由其中的 $\delta q_s, \delta u_l$ 彼此独立，得到方程

$$\sum_{i=1}^{3N}(X_i-m_i\ddot{x}_i)\frac{\partial x_i}{\partial q_s}=0$$

$$\sum_{i=1}(X_i-m_i\ddot{x}_i)\frac{\partial x_i}{\partial u_l}+\Phi_l-\mu_l\dot{u}_l=0$$

$$(s=1,\cdots,n;\ l=1,\cdots,3N)\tag{4.4.72}$$

下面继续变换方程（4.4.72）。引入动能

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N}m_i\dot{x}_i^2$$

则有

$$\sum_{i=1}^{3N}m_i\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s}=E_s(T),\quad \sum_{i=1}^{3N}m_i\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial u_l}=E_l(T)\tag{4.4.73}$$

令

$$\sum_{i=1}^{3N} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} = Q_s, \quad \sum_{i=1}^{3N} X_i \frac{\partial x_i}{\partial u_l} = P_l \qquad (4.4.74)$$

将式（4.4.73）和（4.4.74）代入式（4.4.72），得到有约束受迫控制问题的Lagrange方程[18]

$$E_s(T) = Q_s, \qquad (s=1,\cdots,n)$$

$$E_l(T) = P_l + \Phi_l - \mu_l \dot{u}_l, \qquad (l=1,\cdots,3N) \quad (4.4.75)$$

例 4 一质量为 m，长为 l 的单摆在重力作用下在铅垂平面 Ox_1x_2 内运动，其悬挂点的位移分量为 u_1，u_2。参数 u_1，u_2 的变化受强制作用，满足微分方程

$$\mu_1 \dot{u}_1 = \Phi_1 + X_1^{Ru}, \quad \mu_2 \dot{u}_2 = \Phi_2 + X_2^{Ru} \qquad (a)$$

假设所受约束是理想的、双面的。试建立问题的运动微分方程[18]。

取摆与铅垂向下的线 Ox_1 的夹角 θ 为广义坐标，则

$$x_1 = u_1 + l\cos\theta, \quad x_2 = u_2 + l\sin\theta$$

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = \frac{1}{2}m\{(\dot{u}_1 - l\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{u}_2 + l\dot{\theta}\cos\theta)^2\}$$

方程（4.4.75）给出为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_l} - \frac{\partial T}{\partial u_l} = P_l + \Phi_l - \mu_l \dot{u}_l$$

$$(l=1,2) \qquad (b)$$

进行下列计算

$$E_\theta(T) = m(l^2\ddot{\theta} - l\ddot{u}_1\sin\theta + l\ddot{u}_2\cos\theta)$$

$$E_{u_1}(T) = m(\ddot{u}_1 - l\ddot{\theta}\sin\theta - l\dot{\theta}^2\cos\theta)$$

$$E_{u_2}(T) = m(\ddot{u}_2 + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta)$$

$$P_1 = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial u_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial u_1} = mg$$

$$P_2 = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial u_2} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial u_2} = 0$$

$$Q_\theta = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \theta} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$$

将这些表达式代入方程（ b ），我们得到

$$m(l^2\ddot{\theta}-l\ddot{u}_1\sin\theta+l\ddot{u}_2\cos\theta)=-mgl\sin\theta$$

$$m(\ddot{u}_1-l\ddot{\theta}\sin\theta-l\dot{\theta}^2\cos\theta)=mg+\Phi_1-\mu\dot{u}_1$$

$$m(\ddot{u}_2+l\ddot{\theta}\cos\theta-l\dot{\theta}^2\sin\theta)=\Phi_2-\mu\dot{u}_2$$

‖

§4.5 打击运动的分析动力学

打击运动是指力学系统在量值很大但作用时间很短的打击力作用下的运动。打击力往往由于打击、碰撞、爆炸或突然施加约束而产生。用分析力学的方法研究力学系统，特别是有复杂约束系统的打击运动，有许多方便之处。

打击运动的一般情形由以下两种情形组成：（1）作用在系统上的打击冲量是给定的；（2）在系统上发生瞬时地加上约束的情形，此时引起的打击力事先不知道。

4.5.1 给定打击冲量的情形

1．微分变分原理对打击运动的应用

D'Alembert-Lagrange 原理写成

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \qquad (4.5.1)$$

假设在 $t_0<t<t_1(t_1\to t_0)$ 内，在质点上除作用有限力 $\boldsymbol{F}_i^f$ 外，还作用有很大的打击力 $\boldsymbol{F}_i^i$。由此打击力的作用，点的速度发生有限改变，由 $\dot{\boldsymbol{r}}_{i0}$ 而变为 $\dot{\boldsymbol{r}}_{i1}$。但在打击期间，坐标保持不变。由于打击力瞬时地作用，有意义的只是在打击时间间隔 t_1-t_0 内的积分效应。将原理（4.5.1）从 t_0 至 t_1 对 t 积分，并在 $t_1\to t_0$ 下取极限，得

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{-m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_{i1}-\dot{\boldsymbol{r}}_{i0})+\lim_{t_1\to t_0}\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{F}_i^f\mathrm{d}t+\lim_{t_1\to t_0}\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{F}_i^i\mathrm{d}t\right\}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

$$(4.5.2)$$

因 $\boldsymbol{F}_i^t$ 是 $x_j, \dot{x}_j, t$ 的函数，由中值定理，知

$$\lim_{t_1 \to t_0} \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}_i^t \mathrm{d}t = 0 \tag{4.5.3}$$

令

$$\hat{\boldsymbol{F}}_i = \lim_{t_1 \to t_0} \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}_i^t \mathrm{d}t \tag{4.5.4}$$

这便是打击冲量。将式（4.5.3）和（4.5.4）代入式（4.5.2），得到

$$\sum_{i=1}^{N} \{-m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_{i1} - \dot{\boldsymbol{r}}_{i0}) + \hat{\boldsymbol{F}}_i\} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{4.5.5}$$

原理（4.5.5）可称为打击运动的 D'Alembert-Lagrange 原理。

类似地，可得到打击运动的 Jourdain 原理

$$\sum_{i=1}^{N} \{-m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_{i1} - \dot{\boldsymbol{r}}_{i0}) + \hat{\boldsymbol{F}}_i\} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \tag{4.5.6}$$

和打击运动的 Gauss 原理

$$\sum_{i=1}^{N} \{-m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_{i1} - \dot{\boldsymbol{r}}_{i0}) + \hat{\boldsymbol{F}}_i\} \cdot \delta \ddot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \tag{4.5.7}$$

2．完整系统的打击运动方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定。我们有

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_s, t)$$

以及

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \delta q_s \tag{4.5.8}$$

将式（4.5.8）代入式（4.5.5），得

$$\sum_{s=1}^{n} \left\{ -\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)_1 + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)_0 + \hat{Q}_s \right\} \delta q_s = 0 \tag{4.5.9}$$

其中

$$\hat{Q}_s = \sum_{i=1}^{N} \hat{\boldsymbol{F}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \tag{4.5.10}$$

为广义打击冲量，T 为系统的动能，$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)_1$ 和 $\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)_0$ 分别表示打击后和打击前系统的广义动量。对完整系统来说，原理(4.5.9)中的 δq_s 是彼此独立的，故得

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)_0 = \hat{Q}_s, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.5.11}$$

方程（4.5.11）就是完整系统打击运动的 Lagrange 方程。这是 n 个代数方程，当知道打击前的广义速度 $\dot{q}_{s0}$ 和广义打击冲量 $\hat{Q}_s$ 时，便可求出打击后的广义速度 $\dot{q}_{s1}$。

若引进准速度 $\omega_s(s=1,\cdots,n)$，使得广义速度表为

$$\dot{q}_s = \dot{q}_s(q_k, \omega_k, t) \tag{4.5.12}$$

则有

$$\delta q_s = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_k} \delta \pi_k \tag{4.5.13}$$

将（4.5.13）代入（4.5.9），并引进准速度表示的动能

$$T^*(q_s, \omega_s, t) = T(q_s, \dot{q}_s(q_k, \omega_k, t), t) \tag{4.5.14}$$

则有

$$\sum_{s=1}^{n} \left\{ -\left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_s}\right)_1 + \left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_s}\right)_0 + \hat{P}_s \right\} \delta \pi_s = 0 \tag{4.5.15}$$

其中

$$\hat{P}_s = \sum_{k=1}^{n} \hat{Q}_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s} \tag{4.5.16}$$

为准坐标下的广义打击冲量。由式（4.5.15）中 $\delta \pi_s$ 的独立性，得到

$$\left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_s}\right)_1 - \left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_s}\right)_0 = \hat{P}_s, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.5.17}$$

这是完整系统打击运动准坐标下的 Lagrange 方程。

3. 能量分析

设系统所受完整约束是定常的，则动能为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k$$

在 t_1-t_0 内动能的增量为

$$T_1-T_0=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\dot{q}_{s1}\dot{q}_{k1}-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\dot{q}_{s0}\dot{q}_{k0} \quad (4.5.18)$$

由式（4.5.11），得

$$\sum_{k=1}^{n}A_{sk}(\dot{q}_{k1}-\dot{q}_{k0})=\hat{Q}_s \qquad (4.5.19)$$

将式（4.5.19）代入式（4.5.18），得

$$T_1-T_0=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\dot{q}_{k0}+\hat{Q}_s\right)\dot{q}_{s1}-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\dot{q}_{s0}\dot{q}_{k0}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\hat{Q}_s(\dot{q}_{s1}+\dot{q}_{s0}) \qquad (4.5.20)$$

于是有下述命题。

命题1 在打击力作用下，系统动能的改变等于广义速度的平均值与广义打击冲量乘积的总和。

4. 线性非完整系统的打击运动方程

设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定，并受有 g 个理想一阶线性非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\dot{q}_\sigma+B_{\varepsilon+\beta}, \qquad (\beta=1,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g)$$

$$(4.5.21)$$

约束（4.5.21）加在虚位移上的条件为

$$\delta q_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\delta q_\sigma \qquad (4.5.22)$$

将式（4.5.22）代入原理（4.5.9），注意到 δq_σ 的独立性，得到 Maggi 型方程

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)_1+\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)_0+\hat{Q}_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\left\{-\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)_1+\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)_0+\hat{Q}_{\varepsilon+\beta}\right\}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}=0,\quad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon)$$

（4.5.23）

令 $\tilde{T}$ 为 T 中借助关系（4.5.21）消去不独立广义速度 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 所得表达式，则有

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\qquad(4.5.24)$$

于是，方程（4.5.23）可写成形式

$$\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)_1-\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)_0=\tilde{\hat{Q}}_\sigma,\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\qquad(4.5.25)$$

其中

$$\tilde{\hat{Q}}_\sigma=\hat{Q}_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\hat{Q}_{\varepsilon+\beta}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\qquad(4.5.26)$$

方程（4.5.25）就是线性非完整系统的打击运动方程。

假设约束方程（4.5.21）在打击前后始终保持着，即有

$$(\dot{q}_{\varepsilon+\beta})_0=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}(\dot{q}_\sigma)_0+B_{\varepsilon+\beta}$$

$$(\dot{q}_{\varepsilon+\beta})_1=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}(\dot{q}_\sigma)_1+B_{\varepsilon+\beta}$$

于是得

$$(\dot{q}_{\varepsilon+\beta})_1-(\dot{q}_{\varepsilon+\beta})_0=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\{(\dot{q}_\sigma)_1-(\dot{q}_\sigma)_0\},\qquad(\beta=1,\cdots,g)$$

（4.5.27）

方程（4.5.25）和（4.5.27）联合，便可求解。

5．非线性非完整系统的打击运动方程

设系统受有 g 个理想非线性非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0,\qquad (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n)\qquad (4.5.28)$$

并设这些约束在打击前后始终保持着。Routh 方程（3.1.45）在打击期间 $t_0<t<t_1$ 应写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+Q_s^a+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}$$

$$(t_0<t<t_1,\ s=1,\cdots,n)\qquad (4.5.29)$$

其中 Q_s^a 为广义打击力。将（4.5.29）两端同时乘以 $\mathrm{d}t$，从 t_0 至 t_1 积分，并在 $t_1\to t_0$ 下取极限，得到

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\Big|_{t_0}^{t_1}-\lim_{t_1\to t_0}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial T}{\partial q_s}\mathrm{d}t=\lim_{t_1\to t_0}\int_{t_0}^{t_1}Q_s\mathrm{d}t+\lim_{t_1\to t_0}\int_{t_0}^{t_1}Q_s^a\mathrm{d}t$$

$$+\lim_{t_1\to t_0}\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\mathrm{d}t,\qquad (s=1,\cdots,n)$$

$$(4.5.30)$$

左端第二项和右端第一项显然为零，于是

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\right)_1-\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\right)_0=\hat{Q}_s+\lim_{t_1\to t_0}\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\mathrm{d}t,$$

$$(s=1,\cdots,n)\qquad (4.5.31)$$

此方程右端第一项为广义打击冲量，第二项为广义约束反力的打击冲量。为确定方程（4.5.31）右端第二项，可将式（4.5.29）写成显式，再将约束方程（4.5.28）对 t 求导数，然后从中消去广义加速度，类似于 3.1.2 中的讨论，可解出 λ_β，并记作[20]

$$\lambda_\beta=\sum_{l=1}^{n}a_{\beta l}(q_s,\dot{q}_s,t)Q_l^a+a_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)\qquad (4.5.32)$$

利用中值定理和反常积分第一中值定理，有

$$\lim_{t_1\to t_0}\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\mathrm{d}t=\lim_{t_1\to t_0}\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{l=1}^{n}a_{\beta l}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}Q_l^a\mathrm{d}t$$

$$+\lim_{t_1\to t_0}\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\beta=1}^{g}a_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{l=1}^{n}\left\{\lim_{t_1\to t_0}\left(a_{\beta l}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)_\zeta\lim_{t_1\to t_0}\int_{t_0}^{t_1}Q_l^{*}\mathrm{d}t\right\}$$

$$=\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{l=1}^{n}\left(a_{\beta l}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)_0\hat{Q}_l\qquad(t_0\leqslant\zeta\leqslant t_1)\qquad(4.5.33)$$

将式（4.5.33）代入方程（4.5.31），得

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)_1-\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)_0=\hat{Q}_s+\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{l=1}^{n}\left(a_{\beta l}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)_0\hat{Q}_l$$

$$(s=1,\cdots,n)\qquad(4.5.34)$$

实际上，方程（4.5.34）可当作某完整系统的打击运动方程来研究，此系统有 n 个自由度，所受打击冲量为

$$\hat{Q}_s+\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{l=1}^{n}\left(a_{\beta l}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)_0\hat{Q}_l$$

如果打击开始时刻满足约束方程（4.5.28），那么方程(4.5.34)便给出非完整系统的打击运动。于是得到下述命题。

命题 2 [20] 一个非完整力学系统的打击问题可化为一个有条件的完整系统的打击问题。这个完整系统有 n 个自由度，所受打击冲量包括主动力的打击冲量和非完整约束反力的打击冲量。如果在打击开始时刻，广义速度满足非完整约束方程，那么完整系统的打击问题就给出所研究非完整系统的打击运动。

对于连续运动的类似命题，已由 Agostinelli 和 Новоселов 给出。

例 1 两根相同的直杆 AB 与 BC 铰接后放在桌面上，A、B、C 在一直线上，并在一端 A 作用一与杆垂直的水平冲量 I，求 A、B、C 三点的速度[19]。

令冲击方向为 x 轴，ABC 方向为 y 轴，A、B、C 各点的坐

标为 x_A, x_B, x_C。系统的动能为

$$T = \frac{1}{6} m(\dot{x}_A^2 + \dot{x}_B^2 + \dot{x}_A \dot{x}_B) + \frac{1}{6} m(\dot{x}_B^2 + \dot{x}_C^2 + \dot{x}_B \dot{x}_C) \qquad (a)$$

因此，有

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A} = \frac{1}{6} m(2\dot{x}_A + \dot{x}_B), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_B} = \frac{1}{6} m(4\dot{x}_B + \dot{x}_A + \dot{x}_C),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_C} = \frac{1}{6} m(2\dot{x}_C + \dot{x}_B) \qquad (b)$$

方程（4.5.11）给出

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A}\right)_0 = I, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_B}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_B}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_C}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_C}\right)_0 = 0 \qquad (c)$$

将式(b)代入式(c)，并注意到打击前 A, B, C 三点速度为零，得到

$$\frac{1}{6} m\{2(\dot{x}_A)_1 + (\dot{x}_B)_1\} = I$$

$$\frac{1}{6} m\{4(\dot{x}_B)_1 + (\dot{x}_A)_1 + (\dot{x}_C)_1\} = 0 \qquad (d)$$

$$\frac{1}{6} m\{2(\dot{x}_C)_1 + (\dot{x}_B)_1\} = 0$$

由此解得打击后各点的速度为

$$(\dot{x}_A)_1 = \frac{7I}{2m}, \quad (\dot{x}_B)_1 = -\frac{I}{m}, \quad (\dot{x}_C)_1 = \frac{I}{m}$$ ‖

例 2 沿位于水平面的雪橇的前端垂直于滑木平面给以打击，求打击运动。

取雪橇与平面接触点 P 的坐标 x, y，以及滑木（或冰刀）方向与固定轴 Ox 夹角 θ 为广义坐标。约束方程为

$$\dot{y} = \dot{x} \operatorname{tg} \theta \qquad (a)$$

系统动能为

$$T=\frac{1}{2}m\{(\dot{x}-a\dot{\theta}\sin\theta)^2+(\dot{y}+a\dot{\theta}\cos\theta)^2\}+\frac{1}{2}J_C\dot{\theta}^2 \qquad (b)$$

其中 m 为雪橇质量. J_C 为它对质心的惯性矩，a 为质心 C 距接触点 P 的距离。将式(a)代入式(b)，得

$$\widetilde{T}=\frac{1}{2}m\left\{\frac{\dot{x}^2}{\cos^2\theta}+\left(\frac{J_C}{m}+a^2\right)\dot{\theta}^2\right\} \qquad (c)$$

设打击点 B 在 PC 延长线上，且 $\overline{BC}=b$。打击冲量 $\hat{\boldsymbol{F}}$ 的元功为

$$-\hat{F}\sin\theta\delta x+\hat{F}\cos\theta\delta y+(a+b)\hat{F}\delta\theta$$

于是广义打击冲量为

$$\hat{Q}_x=-\hat{F}\sin\theta,\ \hat{Q}_y=\hat{F}\cos\theta,\ \hat{Q}_\theta=(a+b)\hat{F} \qquad (d)$$

考虑到约束（ a ）后，有

$$\widetilde{\hat{Q}}_x=\hat{Q}_x+\hat{Q}_y\mathrm{tg}\theta=0,\ \widetilde{\hat{Q}}_\theta=\hat{Q}_\theta=(a+b)\hat{F} \qquad (e)$$

打击运动方程（4.5.25）给出

$$\left(\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{x}}\right)_1-\left(\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{x}}\right)_0=\widetilde{\hat{Q}}_x,\ \left(\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{\theta}}\right)_1-\left(\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{\theta}}\right)_0=\widetilde{\hat{Q}}_\theta \qquad (f)$$

注意到打击前系统处于静止状态，有

$$\left(\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{x}}\right)_0=\left(\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{\theta}}\right)_0=0 \qquad (g)$$

于是方程（ f ）给出

$$(\dot{x})_1=0,\ (J_C+ma^2)(\dot{\theta})_1=(a+b)\hat{F}$$

4.5.2 瞬时加上约束的情形

瞬时地加上约束的情形是指系统在没有给定外冲量下突然加上一些约束的情形。如系统中原来运动着的某个点被突然固定住；又如一圆球本来自由运动，突然碰到粗糙地面上。这些都是瞬时加上约束的情形。前一例中所加约束是完整的，后一例中所加约束则是非完整的。

研究一非完整系统，它受有通常的 g 个非完整约束(4.5.21).

在瞬时 t_0 在无外冲量下在系统上加上 h 个理想非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon-h+p}=\sum_{j=1}^{\varepsilon-h}B_{\varepsilon-h+p,j}\dot{q}_j+B_{\varepsilon-h+p}, \quad (p=1,\cdots,h) \quad (4.5.35)$$

于是，在打击期间内坐标的变分有如下补充限制

$$\delta q_{\varepsilon-h+p}=\sum_{j=1}^{\varepsilon-h}B_{\varepsilon-h+p,j}\delta q_j \quad (4.5.36)$$

因此，坐标的独立变分数目为 $\varepsilon-h$ 个。利用导出方程(4.5.25)的讨论，容易得到Maggi型方程[5]

$$\left(\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{q}_j}+\sum_{p=1}^{h}\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{q}_{\varepsilon-h+p}}B_{\varepsilon-h+p,j}\right)_1$$

$$=\left(\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{q}_j}+\sum_{p=1}^{h}\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{q}_{\varepsilon-h+p}}B_{\varepsilon-h+p,j}\right)_0, \quad (j=1,\cdots,\varepsilon-h)$$

$$(4.5.37)$$

这就是瞬时加上非完整约束情形中的待求方程。

分两种情况来讨论。

第一种情况。瞬时加上的非完整约束在打击后仍然保持着。例如，绝对非弹性碰撞就属于这种情况。在此情况下，约束方程(4.5.35)不仅在打击开始时是对的，而且在打击终了也是对的。于是，有

$$(\dot{q}_{\varepsilon-h+p})_1-(\dot{q}_{\varepsilon-h+p})_0=\sum_{j=1}^{\varepsilon-h}B_{\varepsilon-h+p,j}\{(\dot{q}_j)_1-(\dot{q}_j)_0\}$$

$$(p=1,\cdots,h) \quad (4.5.38)$$

这样，方程(4.5.37)、(4.5.27)和(4.5.38)可构成为确定 $(\dot{q}_s)_1$ 的封闭方程组。

第二种情况。瞬时加上的非完整约束在打击终了立刻取消。例如，弹性碰撞就属于这种情况。在此情况下，约束方程(4.5.35)既不在打击前也不在打击后成立。此时，需要补充 h 个关系，才能求解。

例 3 半径为R、质量为M的匀质圆盘在铅垂平面Oxy上运动。在某瞬时t_0，圆盘碰到固定轴Ox，此后仅能沿该轴滚动。试确定圆盘碰撞后的速度。

系统的位置在碰撞前依赖于三个参数：圆盘中心坐标x, y及其转角θ。在打击时刻产生两个新的约束：（1）圆盘保持与轴Ox接触，因此

$$y = R \tag{a}$$

（2）圆盘沿轴Ox滚动，因此

$$x = R\theta \tag{b}$$

由式(a)和(b)知

$$\delta y = 0, \quad \delta x = R\delta\theta \tag{c}$$

原理（4.5.9）给出

$$\left\{-\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)_1 + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)_0\right\}\delta x + \left\{-\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)_1 + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)_0\right\}\delta y$$

$$+ \left\{-\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)_1 + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)_0\right\}\delta\theta = 0$$

考虑到关系(c)，则

$$\left\{-\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)_1 + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)_0\right\}R - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)_1 + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)_0 = 0 \tag{d}$$

圆盘的动能为

$$T = \frac{1}{2}M(k^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{e}$$

将式(e)代入方程(d)，得

$$M\{(\dot{x})_0 - (\dot{x})_1\}R + Mk^2\{(\dot{\theta})_0 - (\dot{\theta})_1\} = 0 \tag{f}$$

由于约束（b）在打击后仍保持，故

$$(\dot{x})_1 = R(\dot{\theta})_1 \tag{g}$$

将式（g）代入方程(f)，整理得

$$(\dot{x})_1 = \frac{R^2(\dot{x})_0 + k^2R(\dot{\theta})_0}{R^2 + k^2} \tag{h}$$

可见，如在碰撞时满足条件

$$R(\dot{x})_0 + k^2(\dot{\theta})_0 = 0 \qquad (i)$$

则圆盘碰后不动。‖

例 4 质量为 m、半径为 a 的匀质圆球沿粗糙水平面无滑动地滚动。在瞬时 t_0，它与粗糙的弹性墙相碰，求碰后的速度。

取球心坐标 x, y, z 及三个 Euler 角 ψ, θ, φ 为广义坐标，球的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}ma^2(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta) \qquad (a)$$

在碰撞前所受非完整约束为

$$\dot{x} = a(\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi),$$
$$\dot{y} = -a(\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi), \quad \dot{z} = 0 \qquad (b)$$

假设与球相碰的墙与平面 yOz 重合，在打击时在系统上瞬时地加上新的补充的约束

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} - a\omega_z = 0, \quad \omega_y = 0$$

它们可归结为两个方程

$$\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi = 0, \quad \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}(\sin\theta\sin\psi + \cos\theta) + \dot{\psi} = 0 \qquad (c)$$

考虑到非完整约束(b)后，式(a)成为

$$\tilde{T} = \frac{1}{2}ma^2\left\{\frac{7}{5}\dot{\theta}^2 + \left(\frac{2}{5} + \sin^2\theta\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{2}{5}(\dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta)\right\} \qquad (d)$$

取 $\dot{\varphi}$ 为独立的广义速度，由方程(c)得

$$\dot{\psi} = -\dot{\varphi}\left(\frac{\sin\theta}{\sin\psi} + \cos\theta\right), \quad \dot{\theta} = \dot{\varphi}\sin\theta\,\mathrm{ctg}\psi \qquad (e)$$

方程 (4.5.37) 给出

$$\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\varphi}} + \frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\psi}}\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\dot{\varphi}} + \frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\theta}}\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial\dot{\varphi}}\right)_1$$
$$= \left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\varphi}} + \frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\psi}}\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\dot{\varphi}} + \frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\theta}}\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial\dot{\varphi}}\right)_0 \qquad (f)$$

即

$$\left(\frac{7}{5}\sin\theta\sin\psi-\frac{2}{5}\cos\theta\right)\{(\dot{\varphi})_1-(\dot{\varphi})_0\}-\frac{2}{5}\{(\dot{\psi})_1-(\dot{\psi})_0\}$$

$$+\frac{7}{5}\{(\dot{\theta})_1-(\dot{\theta})_0\}\cos\psi=0 \qquad (g)$$

为确定碰后速度，尚需两个补充方程。为此，假设球与墙的接触点的速度在打击终了之前等于零，这意味着关系（e）对打击后的状态仍保持，即有

$$(\dot{\psi})_1=-(\dot{\varphi})_1\left(\frac{\sin\theta}{\sin\psi}+\cos\theta\right),\quad (\dot{\theta})_1=(\dot{\varphi})_1\sin\theta\operatorname{ctg}\psi \qquad (h)$$

由三个方程（g）、（h）便可求解。 ‖

§4.6 变质量系统的分析动力学

由于空间技术和其它工业技术的发展，变质量系统动力学的研究日渐重要。喷气飞机，火箭，卫星，航天器等，一般都是变质量系统，而且其中许多是变质量非完整系统。运动中的车辆，由于燃料消耗和喷射气体、液体等使质量不断减少，就是一类变质量非完整系统。

本节讨论变质量力学系统的 D'Alembert-Lagrange 原理，Hamilton 原理，运动微分方程等问题。

4.6.1 变质量力学系统的 D'Alembert-Lagrange 原理

1．变质量力学系统的 D'Alembert-Lagrange 原理

研究由 N 个质点组成的力学系统。在瞬时 t，第 i 个质点的质量为 $m_i(i=1,\cdots,N)$；在瞬时 $t+dt$，由质点分离（或并入）的微粒的质量为 dm_i。对每个质点列写 Мещерский 方程[21]

$$-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i^c+\boldsymbol{R}_i=0, \qquad (i=1,\cdots,N) \qquad (4.6.1)$$

其中 $\boldsymbol{F}_i$ 为作用在质点上的主动力，$\boldsymbol{R}_i^c$ 为约束反力，$\boldsymbol{R}_i$ 为反推

力

$$\boldsymbol{R}_i=\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_i \qquad (4.6.2)$$

其中 $\boldsymbol{u}_i$ 为由质点分离（或并入）的微粒相对质点本身的速度。将方程（4.6.1）两端点乘 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 并对 i 求和，考虑到理想约束条件

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i^c\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

则有

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \qquad (4.6.3)$$

这就是变质量力学系统的D'Alembert-Lagrange原理。下面将原理（4.6.3）变换为广义坐标表示的形式。

2. 凝固导数与凝固偏导数表示的 D'Alembert-Lagrange 原理

变质量力学系统的问题可分成两类。一类是质量变化不改变运动学性质；另一类是质量的变化将引进系统运动学性质的改变。

首先，设系统所受完整约束中不包含点的质量，其位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定。令 д 为把质量当作常数时的偏导数记号，$\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ 为把质量当作常数时对时间 t 的导数，它们分别称为凝固偏导数和凝固导数。令 $T=T(m_i,q_s,\dot{q}_s,t)$ 为系统的动能，容易证明下述命题。

命题 1 对于变质量力学系统，我们有

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\text{д}T}{\text{д}\dot{q}_s}-\frac{\text{д}T}{\text{д}q_s}\right)\delta q_s \qquad (4.6.4)$$

将式(4.6.4)代入原理(4.6.3)，得到 D'Alembert-Lagrange 原理的 Euler-Lagrange 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\text{д}T}{\text{д}\dot{q}_s}+\frac{\text{д}T}{\text{д}q_s}+Q_s+\Psi_s\right)\delta q_s=0 \qquad (4.6.5)$$

其中

$$\Psi_s=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}, \qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (4.6.6)$$

是广义反推力。

命题 2 对变质量力学系统，我们有

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\text{д}}{\text{д}\dot{q}_s}\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}-2\frac{\text{д}T}{\text{д}q_s}\right)\delta q_s \qquad (4.6.7)$$

〔证明〕 因

$$\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i$$

故

$$\begin{aligned}\frac{\text{д}}{\text{д}\dot{q}_s}\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}&=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_s}+\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_s}\\&=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}+2\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}\\&=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\text{д}T}{\text{д}\dot{q}_s}+\frac{\text{д}T}{\text{д}q_s}\end{aligned}$$

将其代入式（4.6.4），便得式（4.6.7）。

将式(4.6.7)代入原理(4.6.3)，得到 D'Alembert-Lagrange 原理的 Nielsen 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\text{д}}{\text{д}\dot{q}_s}\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}+2\frac{\text{д}T}{\text{д}q_s}+Q_s+\Psi_s\right)\delta q_s=0 \qquad (4.6.8)$$

在相当一般的情形下，点的质量可为广义坐标、广义速度和时间的函数，即

$$m_i=m_i(q_s,\dot{q}_s,t), \qquad (i=1,\cdots,N;\ s=1,\cdots,n) \qquad (4.6.9)$$

因此，系统加速度能量对质量的偏导数为零。

命题 3 对变质量力学系统，我们有

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} \delta q_s \qquad (4.6.10)$$

〔证明〕

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} \delta q_s = \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \ddot{q}_s} \delta q_s = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i$$

将式（4.6.10）代入原理（4.6.3），得到 D'Alembert-Lagrange 原理的 Appell 形式

$$\sum_{s=1}^{n} \left(-\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} + Q_s + \Psi_s \right) \delta q_s = 0 \qquad (4.6.11)$$

其次，研究另一类变质量问题，其中质量的变化将引起系统运动学性质的改变。设系统受有 d 个包含质量的完整约束

$$\varphi_\alpha(m_i, x_i, y_i, z_i, t) = 0, \qquad (\alpha = 1, \cdots, d;\ i = 1, \cdots, N) \qquad (4.6.12)$$

并设质量 m_i 为点的坐标和时间的函数，即

$$m_i = m_i(x_j, y_j, z_j, t), \qquad (i, j = 1, \cdots, N) \qquad (4.6.13)$$

将式（4.6.13）代入式（4.6.12），得到新的完整约束

$$\varphi'_\alpha(x_i, y_i, z_i, t) \equiv \varphi_\alpha(m_i(x_j, y_j, z_j, t), x_i, y_i, z_i, t) = 0 \qquad (4.6.14)$$

选 $n = 3N - d$ 个广义坐标 $q_s (s = 1, \cdots, n)$，使约束（4.6.14）成为恒等式。令 $T_D(m_i, q_s, \dot{q}_s, t)$ 表示考虑到质量变化过程中运动学性质改变而计算的动能，即

$$T_D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 (q_s, \dot{q}_s, t) \qquad (4.6.15)$$

其中 m_i 不表为坐标和时间的函数。类似于前面的讨论，D'Alembert-Lagrange 原理可表为 Euler-Lagrange 形式[22]

$$\sum_{s=1}^{n} \left(-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \frac{\pi T_D}{\pi \dot{q}_s} + \frac{\pi T_D}{\pi q_s} + Q'_s + \Psi'_s \right) \delta q_s = 0 \qquad (4.6.16)$$

以及 Nielsen 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\text{д}}{\text{д}\dot{q}_s}\ \frac{\mathrm{D}T_D}{\mathrm{D}t}+2\,\frac{\text{д}T_D}{\text{д}q_s}+Q'_s-\Psi'_s\right)\delta q_s=0 \qquad (4.6.17)$$

其中带“ ′ ”的量表示在计算它们时要考虑到约束对质量变化过程的依赖关系。类似地，引进

$$S_D=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i a_i^2(q_s,\dot{q}_s,\ddot{q}_s,t) \qquad (4.6.18)$$

其中 a_i 为点的加速度，则原理（4.6.3）可表为 Appell 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\partial S_D}{\partial \ddot{q}_s}+Q'_s+\Psi'_s\right)\delta q_s=0 \qquad (4.6.19)$$

3．凝固偏导数表示的 D′Alembert–Lagrange 原理

首先，研究质量变化不改变系统运动学性质的变质量问题。容易证明下述两个命题。

命题 4　我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \frac{\text{д}T}{\text{д}\dot{q}_r}=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\ \frac{\text{д}T}{\text{д}\dot{q}_s}+\sum_{i=1}^{N}\dot{m}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \qquad (4.6.20)$$

命题 5　我们有

$$\frac{\text{д}\dot{T}}{\text{д}\dot{q}_s}=\frac{\text{д}}{\text{д}\dot{q}_s}\ \frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}+\sum_{i=1}^{N}\dot{m}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \qquad (4.6.21)$$

将式（4.6.20）代入原理（4.6.5），得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \frac{\text{д}T}{\text{д}\dot{q}_s}+\frac{\text{д}T}{\text{д}q_s}+Q_s+\Phi_s\right\}\delta q_s=0 \qquad (4.6.22)$$

其中

$$\Phi_s=\Psi_s+\sum_{i=1}^{N}\dot{m}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \qquad (4.6.23)$$

将式（4.6.21）代入原理（4.6.8），得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{-\frac{\text{д}\dot{T}}{\text{д}\dot{q}_s}+2\,\frac{\text{д}T}{\text{д}q_s}+Q_s+\Phi_s\right\}\delta q_s=0 \qquad (4.6.24)$$

原理（4.6.22）和（4.6.24）分别为凝固偏导数表示的 D'Alembert-Lagrange 原理的 Euler-Lagrange 形式和 Nielsen 形式。

其次，研究质量变化改变系统运动学性质的变质量问题。此时，原理（4.6.16）和（4.6.17）在凝固偏导数下可表为

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\text{Д}T_D}{\text{Д}\dot{q}_s}+\frac{\text{Д}T_D}{\text{Д}q_s}+Q'_s+\Phi'_s\right)\delta q_s=0 \tag{4.6.25}$$

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\text{Д}\dot{T}_D}{\text{Д}\dot{q}_s}+2\frac{\text{Д}T_D}{\text{Д}q_s}+Q'_s+\Phi'_s\right)\delta q_s=0 \tag{4.6.26}$$

其中

$$\Phi'_s=\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{R}_i+\dot{m}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \tag{4.6.27}$$

4．普通导数和普通偏导数表示的 D'Alembert-Lagrange 原理

首先，研究质量变化不引起系统运动学性质改变的变质量问题。假设质量变化表为式（4.6.9）。容易证明下述两个命题。

命题 6 我们有

$$\sum_{i=1}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{s=1}^{n}\left\{E_s(T)-\sum_{i=1}^{N}\dot{m}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}-\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}v_i^2\frac{\partial m_i}{\partial\dot{q}_s}\right)+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}v_i^2\frac{\partial m_i}{\partial q_s}\right\}\delta q_s \tag{4.6.28}$$

命题 7 我们有

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{s=1}^{n}\left\{N_s(T)-\sum_{i=1}^{N}\dot{m}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}-\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}v_i^2\frac{\partial m_i}{\partial\dot{q}_s}\right)+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}v_i^2\frac{\partial m_i}{\partial q_s}\right\}\delta q_s \tag{4.6.29}$$

将式（4.6.28）代入原理（4.6.3），得到

$$\sum_{s=1}^{n}\{-E_s(T)+Q_s+P_s\}\delta q_s=0 \qquad (4.6.30)$$

将式（4.6.29）代入原理（4.6.3），得到

$$\sum_{s=1}^{r}\{-N_s(T)+Q_s+P_s\}\delta q_s=0 \qquad (4.6.31)$$

在原理（4.6.30）和（4.6.31）中

$$P_s=\sum_{i=1}^{N}\left\{(\boldsymbol{R}_i+\dot{m}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_s}-\frac{1}{2}v_i^2\frac{\partial m_i}{\partial q_s}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}v_i^2\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s}\right)\right\} \qquad (4.6.32)$$

其次，研究质量变化引起系统运动学性质改变的变质量问题。令 T 为 T_D 中 m_i 用式（4.6.13）替代所得表达式，则有

$$\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{\partial T_D}{\partial q_s}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial m_i}{\partial q_s}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_D}{\partial \dot{q}_s}$$

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial \dot{T}_D}{\partial \dot{q}_s}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial m_i}{\partial q_s}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i$$

将这些表达式代入原理（4.6.25）和（4.6.26），我们得到

$$\sum_{s=1}^{n}\{-E_s(T)+Q'_s+P'_s\}\delta q_s=0 \qquad (4.6.33)$$

$$\sum_{s=1}^{n}\{-N_s(T)+Q'_s+P'_s\}\delta q_s=0 \qquad (4.6.34)$$

其中

$$P'_s=\sum_{i=1}^{N}\left\{(\boldsymbol{R}_i+\dot{m}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}-\frac{1}{2}\frac{\partial m_i}{\partial q_s}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\right\} \qquad (4.6.35)$$

4.6.2 变质量系统的 Hamilton 原理

这里研究质量变化不引起系统运动学性质改变的变质量问题，讨论问题的一般形式的 Hamilton 原理，完整系统的 Hamilton 原理，以及非完整系统的 Hamilton 原理等。

1．变质量力学系统一般形式的 Hamilton 原理

定义 定义一个特殊变分记号 δ^*，当取这种变分时，质量被当作常数来考虑。

根据上述定义，δ^* 对动能 T 的作用为

$$\delta^* T \triangleq \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_s}\delta q_s + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_s \tag{4.6.36}$$

利用式（4.6.36）容易将原理（4.6.22）改写成形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{ (Q_s + \Phi_s)\delta q_s + \delta^* T + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_s - \delta \dot{q}_s\right)\right.$$
$$\left. -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right)\right\} = 0 \tag{4.6.37}$$

将式（4.6.37）两端乘以 $\mathrm{d}t$ 并由 t_0 至 t_1 积分，注意到端点条件 $\delta q_s|_{t=t_0} = \delta q_s|_{t=t_1} = 0$，便得

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{s=1}^{n}(Q_s + \Phi_s)\delta q_s + \delta^* T + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_s - \delta \dot{q}_s\right)\right\}\mathrm{d}t = 0 \tag{4.6.38}$$

原理（4.6.38）可称为变质量力学系统一般形式的 Hamilton 原理。

如果质量不变化，则有 $\delta^* T = \delta T$，$\Phi_s = 0$，记号 ∂ 成为 ∂，再设广义力有势，此时原理（4.6.38）成为原理（2.4.17）。

2．变质量完整系统的 Hamilton 原理

如果系统所受约束是完整的，则有交换关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_s = \delta \dot{q}_s, \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{4.6.39}$$

将式（4.6.39）代入式（4.6.38），得到

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta^* T + \sum_{s=1}^{n}(Q_s + \Phi_s)\delta q_s\right\}\mathrm{d}t = 0 \tag{4.6.40}$$

这是变质量完整系统的 Hamilton 原理。

3. 变质量非完整系统的 Hamilton 原理

对于非完整系统，由于对交换关系有两种观点，Hamilton 原理便有如下两种形式：Hölder 形式的，以及 Cycлов 形式的。

按 Hölder 观点，不论系统完整与否，对所有坐标都有交换关系（4.6.39），因此由式（4.6.38）得到[23]

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\delta^* T)_H+\sum_{s=1}^{n}(Q_s+\Phi_s)\delta q_s\right\}\mathrm{d}t=0 \qquad (4.6.41)$$

这是变质量非完整系统 Hamilton 原理的 Hölder 形式。它与完整系统的 Hamilton 原理（4.6.40）有类似的形式，但是原理（4.6.41）中的 δq_s 不再是彼此独立的了，而是要受到非完整约束的限制。

按 Cycлов 观点，如系统受有非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t),\quad \begin{pmatrix}\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n;\\ \sigma=1,\cdots,\varepsilon;\ \varepsilon=n-g\end{pmatrix}$$

则有交换关系（2.4.5）和（2.4.12），即

$$\delta\dot{q}_\sigma=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_\sigma,\quad \delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_{\varepsilon+\beta}-\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_\sigma^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma$$

$$(\sigma=1,\cdots,\varepsilon;\ \beta=1,\cdots,g) \qquad (4.6.42)$$

将式（4.6.42）代入原理（4.6.38），得到[23]

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\delta^* T)_C+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}(\tilde{Q}_\sigma+\tilde{\Phi}_\sigma)\delta q_\sigma\right.$$

$$\left.+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_\sigma^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma\right\}\mathrm{d}t=0 \qquad (4.6.43)$$

其中

$$\tilde{Q}_\sigma=Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma},\quad \tilde{\Phi}_\sigma=\Phi_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\Phi_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma} \qquad (4.6.44)$$

这是变质量非完整系统 Hamilton 原理的 Cycлов 形式。

容易证明，形式（4.6.41）与（4.6.43）是等价的。

利用Hamilton原理（4.6.41）和（4.6.43）可以推导变质量非完整系统的运动微分方程。

4.6.3 变质量系统的运动微分方程

1. 变质量完整系统的运动方程

首先，研究质量变化不引起系统运动学性质改变的变质量问题。

如果系统所受约束是完整的，则δq_s彼此独立，由原理（4.6.5），（4.6.8），（4.6.11），（4.6.22），（4.6.24），（4.6.30）和（4.6.31）得到下列各种形式的运动微分方程

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s-\Psi_s,\qquad (s=1,\cdots,n)\qquad(4.6.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{DT}{Dt}-2\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\Psi_s,\qquad (s=1,\cdots,n)\qquad(4.6.46)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s+\Psi_s,\qquad (s=1,\cdots,n)\qquad(4.6.47)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\Phi_s,\qquad (s=1,\cdots,n)\qquad(4.6.48)$$

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\Phi_s,\qquad (s=1,\cdots,n)\qquad(4.6.49)$$

$$E_s(T)=Q_s+P_s,\qquad (s=1,\cdots,n)\qquad(4.6.50)$$

$$N_s(T)=Q_s+P_s,\qquad (s=1,\cdots,n)\qquad(4.6.51)$$

其次，对于质量变化引起系统运动学性质改变的变质量问题，由原理（4.6.16），（4.6.17），（4.6.19），（4.6.25），（4.6.26），（4.6.33）和（4.6.34）得到下列各种形式的运动微分方程

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial T_D}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_D}{\partial q_s}=Q'_s+\Psi'_s,\qquad (s=1,\cdots,n)\qquad(4.6.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{D}T_D}{\mathrm{D}t}-2\frac{\partial T_D}{\partial q_s}=Q'_s+\Psi'_s, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.6.53}$$

$$\frac{\partial S_D}{\partial \ddot{q}_s}=Q'_s+\Psi'_s, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.6.54}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_D}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_D}{\partial q_s}=Q'_s+\Phi'_s, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.6.55}$$

$$\frac{\partial \dot{T}_D}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial T_D}{\partial q_s}=Q'_s+\Phi'_s; \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.6.56}$$

$$E_s(T)=Q'_s+P'_s, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.6.57}$$

$$N_s(T)=Q'_s+P'_s, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.6.58}$$

2. 变质量非完整系统的运动方程

首先，研究质量变化不引起系统运动学性质改变的变质量问题。

设系统的运动受有 g 个理想非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0, \qquad (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n) \tag{4.6.59}$$

约束（4.6.59）加在虚位移 δq_s 上的条件为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0, \qquad (\beta=1,\cdots,g) \tag{4.6.60}$$

由原理（4.6.5），（4.6.8），（4.6.11），（4.6.22），（4.6.24），（4.6.30）和（4.6.31）及关系（4.6.60），利用通常的 Lagrange 乘子法，容易得到变质量非完整系统各种形式的带乘子的方程。例如，由原理（4.6.5），（4.6.8）和（4.6.11），得

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\Psi_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.6.61}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}-2\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\Psi_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4.6.62}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s+\Psi_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial\delta_\beta}{\partial\dot{q}_s},\quad (s=1,\cdots,n) \qquad (4.6.63)$$

设非完整约束可表为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t),\qquad \begin{pmatrix}\beta=1,\cdots,g;\ \sigma=1,\cdots,\varepsilon;\\ \varepsilon=n-g;\ s=1,\cdots,n\end{pmatrix} \qquad (4.6.64)$$

则虚位移满足

$$\delta q_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma \qquad (4.6.65)$$

令 $\tilde{T}$ 为 T 中借助约束（4.6.64）消去 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 所得表达式，$\frac{\mathrm{D}\tilde{T}}{\mathrm{D}t}$ 为 $\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}$ 中借助约束（4.6.64）消去 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 及 $\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 所得表达式，利用推导常质量非完整系统运动方程的办法，容易由原理（4.6.5）和关系（4.6.65）导出广义 Чаплыгин 方程[25]

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{Д\tilde{T}}{Д\dot{q}_\sigma}-\frac{Д\tilde{T}}{Дq_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{ДT}{Д\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)$$
$$-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{ДT}{Дq_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma+\tilde{\Psi}_\sigma,\qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \qquad (4.6.66)$$

由原理（4.6.8）和关系（4.6.65）导出广义 Nielsen 方程[26]

$$\frac{Д}{Д\dot{q}_\sigma}\frac{\mathrm{D}\tilde{T}}{\mathrm{D}t}-2\frac{Д\tilde{T}}{Дq_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{ДT}{Д\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)$$
$$-2\sum_{\beta=1}^{g}\frac{ДT}{Дq_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma+\tilde{\Psi}_\sigma,\qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \qquad (4.6.67)$$

其中

$$\tilde{Q}_\sigma=Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma},\quad \tilde{\Psi}_\sigma=\Psi_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\Psi_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma} \qquad (4.6.68)$$

容易由原理（4.6.11）和关系（4.6.65）导出 Appell 方程

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \ddot{q}_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma+\tilde{\Psi}_\sigma, \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{4.6.69}$$

类似地，可以导出凝固偏导数表示的方程和普通导数表示的方程[5]。

其次，研究约束依赖于质量变化过程的变质量非完整系统的运动方程。类似于前面的讨论，由原理（4.6.16），（4.6.17）和（4.6.19），容易导出下述方程

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{д\tilde{T}_D}{д\dot{q}_\sigma}-\frac{д\tilde{T}_D}{дq_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{дT_D}{д\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)$$
$$-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{дT_D}{дq_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}=\tilde{Q}'_\sigma+\tilde{\Psi}'_\sigma, \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{4.6.70}$$

$$\frac{д}{д\dot{q}_\sigma}\frac{\mathrm{D}\tilde{T}_D}{\mathrm{D}t}-2\frac{д\tilde{T}_D}{дq_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{дT_D}{д\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)$$
$$-2\sum_{\beta=1}^{g}\frac{дT_D}{дq_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}=\tilde{Q}'_\sigma+\tilde{\Psi}'_\sigma, \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{4.6.71}$$

$$\frac{\partial \tilde{S}_D}{\partial \ddot{q}_\sigma}=\tilde{Q}'_\sigma+\tilde{\Psi}'_\sigma, \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{4.6.72}$$

类似地，可以导出凝固偏导数表示的方程和普通导数表示的方程。

例 1 变质量 Чаплыгин 雪橇问题[5]

在 Чаплыгин 雪橇对称轴上附加一质点 B，其质量随时间变化 $m=m(t)$，并距接触点为 b。考虑到附加变质量质点以后，系统动能为

$$T=\frac{1}{2}M\{(\dot{x}-a\dot{\theta}\sin\theta)^2+(\dot{y}+a\dot{\theta}\cos\theta)^2\}+\frac{1}{2}J_C\dot{\theta}^2$$
$$+\frac{1}{2}m(t)\{(\dot{x}-b\dot{\theta}\sin\theta)^2+(\dot{y}+b\dot{\theta}\cos\theta)^2\} \tag{a}$$

约束方程为

$$\dot{y}=\dot{x}\operatorname{tg}\theta \tag{b}$$

于是

$$\widetilde{T}=\frac{1}{2}[M+m(t)]\dot{x}^2(1+\operatorname{tg}^2\theta)+\frac{1}{2}[J_C+Ma^2+m(t)b^2]\dot{\theta}^2 \tag{c}$$

方程（4.6.66）给出

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\text{д}\widetilde{T}}{\text{д}\dot{x}}-\frac{\text{д}\widetilde{T}}{\text{д}x}-\frac{\text{д}T}{\text{д}\dot{y}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial\dot{y}}{\partial x}\right)-\frac{\text{д}T}{\text{д}y}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{x}}=\widetilde{Q}_x+\widetilde{\Psi}_x \tag{d}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\text{д}\widetilde{T}}{\text{д}\dot{\theta}}-\frac{\text{д}\widetilde{T}}{\text{д}\theta}-\frac{\text{д}T}{\text{д}\dot{y}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial\dot{y}}{\partial\theta}\right)-\frac{\text{д}T}{\text{д}y}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{\theta}}=\widetilde{Q}_\theta+\widetilde{\Psi}_\theta$$

进行一系列计算，得

$$\frac{\text{д}\widetilde{T}}{\text{д}\dot{x}}=[M+m(t)]\dot{x}(1+\operatorname{tg}^2\theta),\quad \frac{\text{д}\widetilde{T}}{\text{д}x}=0$$

$$\frac{\text{д}\widetilde{T}}{\text{д}\dot{\theta}}=[J_C+Ma^2+m(t)b^2]\dot{\theta},\quad \frac{\text{д}\widetilde{T}}{\text{д}\theta}=[M+m(t)]\frac{\dot{x}^2\operatorname{tg}\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{x}}=\operatorname{tg}\theta,\ \frac{\partial\dot{y}}{\partial x}=0,\ \frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{\theta}}=0,\ \frac{\partial\dot{y}}{\partial\theta}=\frac{\dot{x}}{\cos^2\theta},\quad \widetilde{Q}_x=\widetilde{Q}_\theta=0$$

$$\widetilde{\Psi}_x=\Psi_x+\Psi_y\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{x}}=\dot{m}u\frac{\cos\alpha}{\cos\theta},\quad \widetilde{\Psi}_\theta=\dot{m}ub\sin\alpha$$

其中 α 为微粒相对速度 $\boldsymbol{u}$ 与 PC 的夹角。将这些表达式代入方程（d），整理得

$$\frac{1}{\cos^2\theta}[M+m(t)](\ddot{x}+\dot{x}\dot{\theta}\operatorname{tg}\theta)-\frac{\dot{\theta}^2}{\cos\theta}[Ma+m(t)b]=\dot{m}u\frac{\cos\alpha}{\cos\theta} \tag{e}$$

$$[J_C+Ma^2+m(t)b^2]\ddot{\theta}+\frac{\dot{x}\dot{\theta}}{\cos\theta}[Ma+m(t)b]=\dot{m}ub\sin\alpha$$

方程（e）在下列特殊情形下

$$a=0,\ J_C=Mb^2,\ \boldsymbol{u}=-\boldsymbol{v}_B \tag{f}$$

可归结为Riccati方程，因此可积分到底[5,16]。

例 2 燃烧着的匀质圆球沿粗糙水平面的惯性运动。

设球的初始半径为r_0，密度为γ，并设由于燃烧引起的质量减少与球的表面积成正比，即

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-4\alpha\pi z^2 \qquad (a)$$

其中α为常数，z为球的半径，m为球的质量

$$m=\frac{4}{3}\pi\gamma z^3 \qquad (b)$$

将式（b）对t求导数，得

$$\dot{m}=4\pi\gamma z^2\dot{z} \qquad (c)$$

比较式（a）与式（c），得

$$\dot{z}=-\frac{\alpha}{\gamma} \qquad (d)$$

积分之（令 $t=0$，$z=r_0$），得

$$z=r_0-\frac{\alpha}{\gamma}t \qquad (e)$$

球的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{1}{2}J(\dot{\psi}^2+\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}^2+2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta) \qquad (f)$$

其中x,y,z为球心坐标，ψ,θ,φ为Euler角，J为球对其直径的惯性矩

$$J=\frac{2}{5}mz^2 \qquad (h)$$

将式(d)代入式(f)，得

$$T_D=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)+\frac{1}{2}J(\dot{\psi}^2+\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}^2+2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta) \qquad (i)$$

球在平面上作纯滚动的条件为

$$\dot{x}+z(\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta-\dot{\theta}\sin\psi)=0,\quad \dot{y}+z(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\psi)=0$$

考虑到式(e)，则上式可写成

$$\dot{x}=\left(r_0-\frac{\alpha}{\gamma}t\right)(-\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta+\dot{\theta}\sin\psi),$$

$$\dot{y}=-\left(r_0-\frac{\alpha}{\gamma}t\right)(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\psi) \qquad (j)$$

将式（j）代入式（i），得

$$\widetilde{T}_D=\frac{1}{2}m\left(r_0-\frac{\alpha}{\gamma}t\right)^2(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+\frac{1}{2}m\frac{\alpha^2}{\gamma^2}$$

$$+\frac{1}{2}J(\dot{\psi}^2+\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}^2+2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta) \qquad (k)$$

方程（4.6.71）对 ψ 给出为

$$\frac{Д}{Д\dot{\psi}}\frac{D\widetilde{T}_D}{Dt}-2\frac{Д\widetilde{T}_D}{Д\psi}-\frac{ДT_D}{Д\dot{x}}\left(\frac{\partial\ddot{x}}{\partial\dot{\psi}}-2\frac{\partial\dot{x}}{\partial\psi}\right)$$

$$-\frac{ДT_D}{Д\dot{y}}\left(\frac{\partial\ddot{y}}{\partial\dot{\psi}}-2\frac{\partial\dot{y}}{\partial\psi}\right)-2\frac{ДT_D}{Дx}\frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{\psi}}$$

$$-2\frac{ДT_D}{Дy}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{\psi}}=\widetilde{Q}'_\psi+\widetilde{\Psi}'_\psi \qquad (l)$$

对 θ,φ 有类似的形式。

因圆球沿水平面作惯性运动，且微粒分离的相对速度为零，故

$$\widetilde{Q}'_\psi=\widetilde{Q}'_\theta=\widetilde{Q}'_\varphi=\widetilde{\Psi}'_\psi=\widetilde{\Psi}'_\varphi=\widetilde{\Psi}'_\theta=0 \qquad (m)$$

经过计算，容易得到问题的运动微分方程[21]

$$J(\ddot{\psi}+\ddot{\varphi}\cos\theta-\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta)=0$$

$$J(\ddot{\theta}+\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta)+m\left(r_0-\frac{\alpha}{\gamma}t\right)^2(\ddot{\theta}+\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta)$$

$$-\frac{m\alpha}{\gamma}\left(r_0-\frac{\alpha}{\gamma}t\right)\dot{\theta}=0 \qquad (n)$$

$$J(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)+m\left(r_0-\frac{\alpha}{\gamma}t\right)^2(\ddot{\varphi}\sin^2\theta+\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta$$

$$-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)-\frac{m\alpha}{\gamma}\left(r_0-\frac{\alpha}{\gamma}t\right)\dot{\varphi}\sin^2\theta=0$$

§4.7 机电系统的分析动力学

机电系统广泛应用于各种技术领域。电动机，发电机，刚体的非接触（电磁的，静电的）悬挂，电测仪器等都是机电系统。为合理构造这些系统并进行一系列的分析，现代工程实际要求建立正确的数学模型，这些模型应包括机械运动的微分方程以及电磁过程的方程。为组成机电系统的方程，分析力学的工具是非常方便的，其中表征系统的电磁量和力学量形式上看作同等的，而运动方程可借助 Lagrange 模式来得到。

4.7.1 机电系统分析力学的基本概念和 Lagrange-Maxwell 方程

1. 基本概念

定义 1 机械过程和电磁过程相互联系的系统称为机电系统。

这个定义是相当广泛的，因为它包括了机械系统和电路以各种构造结合相联系的机构和仪器。机电系统的主要特征是机械能到电磁能的转换。机电系统在测量技术，电声装置，在自动调节和遥控系统中有重要作用。

研究机电系统必须从提出基本假设和选取模型开始，考虑到主要现象，忽略非本质的，次要的现象。机电系统的机械部分的描述可利用力学系统的模型，作为某N个质点的总合。假设所加约束是完整的、理想的、双面的。约束方程的数目是d，那么机械子系统在空间中的位置可用$n=3N-d$个广义坐标$q_s(s=1,\cdots,n)$来确定。电部分“位置”的给定却是复杂的，因为要描述任何装置中的电磁现象就必须知道电磁场——磁感应强度$\boldsymbol{B}$、电场强

度 $\boldsymbol{E}$ 及其随时间的变化。因此，作为带分布参数系统的电系统状态的给定需无穷多个时间函数。在理论电工学中引入的电路和磁路运用有限个参数——电流，电压，磁通等。在用有限个参数描述电动现象时，类似于力学中运用广义坐标。

假设，导体截面尺寸与其长度相比甚小，因此，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 对电流沿截面分布的依赖性可忽略。此外，还要求所谓准平稳近似条件，在此条件下电路理论才是对的。

2. 电路方程

假设机电系统由 m 个回路组成。每个回路由线导体和电容组成，各个电路之间是电无关的，但回路中的电磁过程不是独立的，因为所有电路处在共同磁场中。用 $i_k(k=1,\cdots,m)$ 表记第 k 个回路中的电流，u_k 为加在第 k 个回路上的电动势。设 e_k 为电容器中的电荷，它与电流有关系 $\dot{e}_k=i_k$。第 k 个回路中的电阻和电容分别为 R_k 和 C_k。电容是电荷与电容器极板间电势差（电压）之比

$$C_k=\frac{e_k}{u_k^e} \tag{4.7.1}$$

当机电系统相互位置改变时，电容器极板间距离也改变，因此，电容是系统广义坐标的函数

$$C_k=C_k(q_s),\quad (k=1,\cdots,m;\ s=1,\cdots,n) \tag{4.7.2}$$

由物理学知，电场能量为

$$W_e=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{e_k^2}{C_k} \tag{4.7.3}$$

由式（4.7.1）和（4.7.3）得知，第 k 个电容器两极板间的电压可用电场能 W_e 对电荷 e_k 的偏导数来求得

$$u_k^e=\frac{\partial W_e}{\partial e_k}=\frac{e_k}{C_k} \tag{4.7.4}$$

由物理学知，m 个带电回路的磁场能量为

$$W_m=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}L_{kr}i_ki_r \tag{4.7.5}$$

其中 L_{kk} 为第 k 个回路的自感，$L_{kr}(k\neq r)$为第 k 个和第 r 个回路的互感。L_{kr} 依赖于第 k 、第 r 个回路的尺寸和形状，它们之间的距离，相互分布，以及周围介质的导磁率。因此，量 L_{kr} 是广义坐标的函数

$$L_{kr}=L_{kr}(q_s) \tag{4.7.6}$$

通过第 k 个回路的磁通与回路中电流成正比

$$\Phi_k=\sum_{r=1}^{m}L_{kr}i_r \tag{4.7.7}$$

比较式（4.7.5）与（4.7.7），得

$$\Phi_k=\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \tag{4.7.8}$$

现在建立电路的方程。用 u_k^i 表示第 k 个回路中当磁通 Φ_k 改变时引起的感应电动势。按电磁感应定律，有

$$u_k^i=-\frac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \tag{4.7.9}$$

对第 k 个回路，利用欧姆定律，有

$$u_k+u_k^i=R_ki_k+u_k^e \tag{4.7.10}$$

注意到式（4.7.4）和（4.7.9），由式（4.7.10）得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W_m}{\partial i_k}+\frac{\partial W_e}{\partial e_k}+R_ki_k=u_k,\quad (k=1,\cdots,m) \tag{4.7.11}$$

引进电耗散函数

$$\Psi_e=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}R_ki_k^2$$

于是有

$$\frac{\partial\Psi_e}{\partial i_k}=R_ki_k$$

将其代入方程（4.7.11），得到电路方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W_m}{\partial i_k}+\frac{\partial W_e}{\partial e_k}+\frac{\partial W_e}{\partial i_k}=u_k,\quad (k=1,\cdots,m) \tag{4.7.12}$$

3．磅达马达力

定义 2 电场和磁场对物体作用而产生的力，称为磅达马达力。

相应于广义坐标 q_s 的广义磅达马达力记作 Q_s^* 以区别于通常机械性质的广义力。为得到广义磅达马达力的表达式，可利用系统能量平衡方程。电动力所作的功提供焦耳热、磁场和电场能量的改变以及磅达马达力所作的功。系统能量平衡方程为

$$\sum_{k=1}^{m} u_k i_k=\sum_{k=1}^{m} R_k i_k^2+\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}t}+\sum_{s=1}^{n} Q_s^*\dot{q}_s \tag{4.7.13}$$

由式（4.7.5）和（4.7.6）知，$W_m=W_m(i_k,q_s)$，于是

$$\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial W_m}{\partial i_k}\frac{\mathrm{d}i_k}{\mathrm{d}t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial W_m}{\partial q_s}\dot{q}_s \tag{4.7.14}$$

考虑到 W_m 对 i_k 是二次齐次的，式（4.7.14）容易变换为

$$\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W_m}{\partial i_k}i_k-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial W_m}{\partial q_s}\dot{q}_s \tag{4.7.15}$$

系统的电能，按式（4.7.2）和（4.7.3），应为电荷 e_k 和广义坐标 q_s 的函数，$W_e=W_e(e_k,q_s)$，因此

$$\frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial W_e}{\partial e_k}i_k+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial W_e}{\partial q_s}\dot{q}_s \tag{4.7.16}$$

将式（4.7.15）和（4.7.16）代入方程（4.7.13），得

$$\sum_{k=1}^{m}\left(u_k-R_k i_k-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W_m}{\partial i_k}-\frac{\partial W_e}{\partial e_k}\right)i_k$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\partial W_m}{\partial q_s}+\frac{\partial W_e}{\partial q_s}+Q_s^*\right)\dot{q}_s \tag{4.7.17}$$

将电路方程（4.7.12）代入上式，得

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s^*-\frac{\partial W_m}{\partial q_s}+\frac{\partial W_e}{\partial q_s}\right)\dot{q}_s=0 \qquad (4.7.18)$$

由于广义速度是独立的量，可任意选取，由式（4.7.18）得到

$$Q_s^*=\frac{\partial}{\partial q_s}(W_m-W_e) \qquad (4.7.19)$$

将式（4.7.5）和（4.7.3）代入式（4.7.19），最终得到

$$Q_s^*=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial L_{kr}}{\partial q_s}i_k i_r+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial C_k}{\partial q_s}\frac{e_k^2}{C_k^2} \qquad (4.7.20)$$

4. Lagrange-Maxwell 方程

用T表示系统的动能，在完整定常约束下，它是广义速度的齐二次式

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{sl}\dot{q}_s\dot{q}_l \qquad (4.7.21)$$

其中系数a_{sl}仅依赖于广义坐标。系统机械部分的势能是广义坐标的函数

$$V=V(q_s),\quad (s=1,\cdots,n)$$

用$\Psi_m(q_s,\dot{q}_s)$表示机械耗散函数。考虑到在机械系统上除了有势力$-\dfrac{\partial V}{\partial q_s}$，耗散力$-\dfrac{\partial \Psi_m}{\partial \dot{q}_s}$，非势力$Q_s$以外还作用有磅达马达力$Q_s^*$，广义坐标中的方程写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=-\frac{\partial V}{\partial q_s}-\frac{\partial \Psi_m}{\partial \dot{q}_s}+Q_s+Q_s^*,\quad (s=1,\cdots,n)$$

$$(4.7.22)$$

将式（4.7.19）代入式（4.7.22）并联合电路方程（4.7.12），可得到机电系统的封闭方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W_m}{\partial i_k}+\frac{\partial W_e}{\partial e_k}+\frac{\partial \Psi_e}{\partial i_k}=u_k,\quad (k=1,\cdots,m)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}+\frac{\partial V}{\partial q_s}-\frac{\partial W_m}{\partial q_s}+\frac{\partial W_e}{\partial q_s}+\frac{\partial \Psi_m}{\partial \dot{q}_s}=Q_s \quad (s=1,\cdots,n) \tag{4.7.23}$$

取机电系统的 Lagrange 函数为

$$L=T(q_s,\dot{q}_s)-V(q_s)+W_m(q_s,i_k)-W_e(q_s,e_k) \tag{4.7.24}$$

并引入电的和机械的耗散函数之和

$$\Psi=\Psi_e(i_k)+\Psi_m(q_s,\dot{q}_s) \tag{4.7.25}$$

则方程（4.7.23）可写成形式[27]

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{e}_k}-\frac{\partial L}{\partial e_k}+\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{e}_k}=u_k \quad (k=1,\cdots,m) \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}+\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}_s}=Q_s, \quad (s=1,\cdots,n) \end{aligned} \tag{4.7.26}$$

方程（4.7.26）就是Lagrange-Maxwell 方程。它们组成对广义坐标和电荷的 $n+m$ 个二阶常微分方程的方程组。

为积分方程（4.7.26），还需给出电荷、电流、广义坐标和广义速度的初始条件

$$e_k|_{t=0}=e_{k0},\quad i_k|_{t=0}=i_{k0},\quad q_s|_{t=0}=q_{s0},\quad \dot{q}_s|_{t=0}=\dot{q}_{s0} \tag{4.7.27}$$

4.7.2 Lagrange-Maxwell 方程的应用

1. 刚体的电磁悬挂

在火车车厢上安一电磁铁，它与 T 型铁轨相吸引。在电磁铁绕组中的电流名义力以及磁铁和铁轨间名义间隙下，引力与车厢重力平衡。设车厢沿铅垂轴作直线平动。将在电磁铁和铁轨间间隙名义值下的质心位置取为坐标原点 O。车厢质心的坐标 y 取为广义坐标。电磁铁绕组中的电流记作 i 。此机电系统的广义坐标是 y 和 i 。系统不包含电容，因此对电流的微分方程是一阶的。此时，常说系统有半个自由度。

车厢动能为

$$T=\frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{y}^2 \tag{4.7.28}$$

重力势能为

$$V=Py \tag{4.7.29}$$

因系统中没有电容，故电能等于零。磁能表为

$$W_m=\frac{1}{2}\int_V \frac{1}{\mu}B^2\mathrm{d}V \tag{4.7.30}$$

其中 **B** 为磁感应强度矢量，μ 为导磁率，V 为磁场包含的体积。设磁铁与铁轨之间的间隙 $h-y$ 与磁铁尺寸比较 其小。此时，可认为磁铁与铁轨间气隙中的磁场是均匀的，并忽略边界效应。不计铁轨、磁铁、气隙内的磁漏泄。假设磁铁和铁轨的导磁率 μ 很大，可忽略式（4.7.30）中对磁铁和铁轨体积的积分。此时式（4.7.30）中只有常矢量 **B** 沿两个气隙体积的积分

$$W_m=\frac{1}{\mu_0}S(h-y)B^2 \tag{4.7.31}$$

其中 S 是磁铁面积，μ_0 为空气导磁率。通过电磁铁绕组的磁通为

$$\Phi=BSN \tag{4.7.32}$$

其中 N 为绕组圈数。另一方面，磁通与电流成比例

$$\Phi=L_{11}i \tag{4.7.33}$$

其中 L_{11} 是自感系数。由式（4.7.32）和（4.7.33），得

$$B=\frac{L_{11}i}{SN}$$

将其代入式（4.7.31），得

$$W_m=\frac{(h-y)L_{11}^2}{\mu_0SN^2}i^2$$

但

$$W_m=\frac{1}{2}L_{11}i^2$$

于是

$$L_{11}=\frac{\mu_0SN^2}{2(h-y)}$$

而系统的磁能为

$$W_m=\frac{\mu_0 SN^2}{4(h-y)}i^2 \tag{4.7.34}$$

因此，机电系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}\ \frac{P}{g}\dot{y}^2-Py+\frac{1}{4}\ \frac{\mu_0 SN^2}{h-y}i^2 \tag{4.7.35}$$

耗散函数为

$$\Psi=\frac{1}{2}b\dot{y}^2+\frac{1}{2}Ri^2 \tag{4.7.36}$$

其中 b 为车厢运动中的粘摩擦系数，R 为电路中的电阻。

假设广义非势力不存在，并用 u 表示电磁铁绕组上的电压。为确保车厢悬挂的稳定性，这个电压应依赖于气隙$(h-y)$。

Lagrange–Maxwell 方程（4.7.26）给出为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \frac{\partial L}{\partial i}+\frac{\partial \Psi}{\partial i}=u,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{y}}=0 \tag{4.7.37}$$

将式（4.7.35）和（4.7.36）代入方程（4.7.37），得到

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\ \frac{\mu_0 SN^2}{h-y}\ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\ \frac{\mu_0 SN^2}{(h-y)^2}\dot{y}i+Ri=u \\ \frac{P}{g}\ddot{y}+P-\frac{1}{4}\ \frac{\mu_0 SN^2}{(h-y)^2}i^2+b\dot{y}=0\end{gathered} \tag{4.7.38}$$

其中$-\frac{1}{2}\ \frac{\mu_0 SN^2}{(h-y)^2}\dot{y}i$ 是车厢运动时引起的感应电动势，

$\frac{\mu_0 SN^2}{4(h-y)^2}i^2$ 是磅达马达力——车厢对铁轨的引力。

下面研究方程（4.7.38）的平衡位置的稳定性。假设

$$u=u_0+k(h-y),\ u_0=\text{const.} \tag{4.7.39}$$

其中 k 是传感器信号放大系数。在车厢的平衡位置上，有

$$y=0,\ \dot{y}=0,\ i=i_0 \tag{4.7.40}$$

将式（4.7.40）代入式（4.7.38），得到所需电动势和电流名义力

的值

$$u_0 = Ri_0 - kh, \quad i_0^2 = \frac{2Ph}{l_0} \tag{4.7.41}$$

其中 $l_0 = \frac{\mu_0 SN^2}{2h}$ 为 $y=0$ 时的自感系数。

设车厢由平衡位置发生小位移 $y \ll h$，并设电磁铁绕组中的电流靠近其名义值 i_0，即 $i = i_0 + x$，$x \ll i_0$。于是有

$$\begin{aligned} & i^2 \approx i_0^2 + 2i_0 x, \quad \frac{1}{(h-y)^2} \approx \frac{1}{h^2} + \frac{2y}{h^3} \\ & \frac{i^2}{(h-y)^2} \approx \frac{i_0^2}{h^2} + \frac{2i_0 x}{h^2} + \frac{2i_0^2 y}{h^3} \end{aligned} \tag{4.7.42}$$

将式（4.7.42）代入方程（4.7.38），并考虑到式（4.7.39）和（4.7.41），略去运动方程中的非线性项，得到线性化方程

$$\begin{aligned} & l_0 \dot{x} + Rx - l_0 r \dot{y} + ky = 0, \quad \left(r = \frac{i_0}{h} \right) \\ & -l_0 rx + m\ddot{y} + b\dot{y} - l_0 r^2 y = 0, \quad \left(m = \frac{P}{g} \right) \end{aligned} \tag{4.7.43}$$

将形如

$$x = C_1 e^{\lambda t}, \quad y = C_2 e^{\lambda t} \tag{4.7.44}$$

的解代入方程（4.7.43），得到特征方程

$$\begin{vmatrix} l_0\lambda + R & l_0 r\lambda + k \\ -l_0 r & m\lambda^2 + b\lambda - l_0 r^2 \end{vmatrix} = 0$$

即

$$ml_0\lambda^3 + (bl_0 + mR)\lambda^2 + bR\lambda + l_0 r(k - rR) = 0 \tag{4.7.45}$$

因此，车厢平衡位置的稳定性条件归结为

$$k > rR, \quad bR(bl_0 + mR) > ml_0^2 r(k - rR)$$

由此得到火车电磁悬挂的工作能力条件为[27]

$$\frac{i_0 R}{h} < k < \frac{i_0 R}{h} + b\frac{hR(mR + l_0 b)}{ml_0^2 i_0} \tag{4.7.46}$$

在没有阻尼（$b=0$）的情况下，它是不能工作的。

2. 静电系统

电容微音器的主要部分是平板电容，其中一个板是弹性薄膜。声波引起薄膜振动。由于它的移动，电容器的电容就变化。因此，在由电容 $C(x)$，电阻 R 和电动势 u 组成的电路中将引起可变电流。进入放大器的信号由电阻 R 取出。

为描述薄膜的弹性，利用绝对刚性薄板的模型，它以刚度为 k 的弹簧与电容器的固定板相联结。设电容器薄板间距离为 h，运动薄板的质量为 m，当空气振动时作用在此板上的力为 $F(t)$。

取轴 Ox 垂直于电容器板平面，原点 O 取在弹簧未变形时动板所在位置。设 x 为动板离 O 的坐标。电容微音器的机电系统的广义坐标取为电容器的电荷 e 和动板的位移 x。动板的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{4.7.47}$$

弹簧的势能为

$$V=\frac{1}{2}kx^2 \tag{4.7.48}$$

忽略电路的感应并设磁能等于零。电场能为

$$W_e=\frac{e^2}{2C(x)} \tag{4.7.49}$$

由平板电容公式，有

$$C(x)=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$$

其中 ε_0 为真空的电容率，ε 为电容器平板间电介质的相对电容率，S 为平板面积，d 为平板间距离。在所研究情形 $d=h+x$，而当 $x=0$ 时，$C_0=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{h}$，由此得 $\varepsilon_0\varepsilon S=C_0h$，因此

$$C(x)=\frac{C_0h}{h+x}$$

将其代入式（4.7.49），得

$$W_e=\frac{e^2(h+x)}{2C_0h} \tag{4.7.50}$$

系统的耗散函数为

$$\Psi=\frac{1}{2}b\dot{x}^2+\frac{1}{2}R\dot{e}^2 \tag{4.7.51}$$

其中 b 为动板运动时的粘摩擦系数。

广义力容易计算，得

$$Q_e=u,\quad Q_x=F(t) \tag{4.7.52}$$

由式（4.7.47）、（4.7.48）和（4.7.50）组成机电系统的 Lagrange 函数

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2-\frac{e^2}{2hC_0}(h+x) \tag{4.7.53}$$

Lagrange-Maxwell 方程（4.7.26）给出为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial\dot{x}}=Q_x,\quad -\frac{\partial L}{\partial e}+\frac{\partial\Psi}{\partial\dot{e}}=Q_e \tag{4.7.54}$$

将式（4.7.53）、（4.7.51）和（4.7.52）代入方程（4.7.54），得到[27]

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx+\frac{e^2}{2hC_0}=F(t),\quad R\dot{e}+\frac{e}{hC_0}(h+x)=u \tag{4.7.55}$$

在没有外作用 $F(t)\equiv0$ 时，此机电系统的平衡位置 x_0，e_0 满足

$$kx_0+\frac{e_0^2}{2hC_0}=0,\quad e_0(h+x_0)=uhC_0$$

由此得到平衡值 x_0 的方程

$$(x_0+h)^2x_0+u_0=0,\quad u_0=\frac{u^2hC_0}{2k} \tag{4.7.56}$$

电容器固定平板的坐标为$(-h)$，因此物理上能实现的平衡位置为 $x_0>-h$。这个条件是加在系统物理参数上的限制。实际上，将式（4.7.56）第一式写成

$$f(x_0)=-u_0,\quad f(x_0)=(x_0+h)^2x_0$$

在 $x_0>0$ 时，函数 $f(x_0)$是正的；而当 $x_0<0$ 时，$f(x_0)$为负的。此函数在点 $x_0=0$ 处与轴 x_0 相交，而在 $x_0=-h$ 时与轴 x_0 相切。

因此，函数 $f(x_0)$在$-h\leqslant x_0\leqslant 0$间有极小。将$f$对$x_0$求导数，有

$$\frac{df}{dx_0}=(x_0+h)(3x_0+h)$$

在$x_0=-h$处，f有极大；在$x_0=-\frac{h}{3}$处，f有极小。这个极小值等于

$$f\left(-\frac{h}{3}\right)=-\frac{4h^3}{27}$$

为使三次抛物线$y=f(x_0)$在$-h\leqslant x_0\leqslant 0$间与直线$y=-u_0$相交，所求得的极小值应小于$-u_0$，即

$$-\frac{4h^3}{27}<-u_0$$

由此得

$$u^2<\frac{8h^2k}{27C_0} \qquad (4.7.57)$$

4.7.3 非完整动力学与电机的一般理论

在专著[4]中，用大量篇幅详细地讨论了非完整系统动力学与电机的一般理论。

§4.8 事件空间中的分析动力学

J L Synge在他的著作中研究了各种空间(包括事件空间)中的完整保守系统的分析动力学[28]。这种研究不仅有几何意义，而且也有重要的力学意义。首先，由此不仅可以得到通常位形空间中的动力学方程，而且可以直接得到能量积分。其次，由于在事件空间中坐标和时间处于同等地位，这可使我们灵活地选取参数，以便建立较为简单的方程[31]。

本节讨论事件空间中的Hamilton原理，完整和非完整系统分析动力学的一些问题。

4.8.1 事件空间中的 Hamilton 原理

1. 事件空间中的约束方程和虚位移

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定。构造 $n+1$ 维扩充的位形空间 R_{n+1}（事件空间），此空间中点的坐标是广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$和时间 t。引入记号

$$x_1=t,\quad x_{s+1}=q_s,\qquad (s=1,\cdots,n)$$

所有这些变量可作为某参数 τ 的连续可微函数。令 $x_\alpha=x_\alpha(\tau)$ $(\alpha=1,\cdots,n+1)$是 $C^2\in R_{n+1}$ 类曲线，使得 $x'_\alpha=\dfrac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}$不同时为零。这些带某确定方向的曲线对应于无约束的完整系统的可能运动。我们有

$$\dot{x}_\alpha=\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{x'_\alpha}{x'_1}\tag{4.8.1}$$

设位形空间中的非完整约束方程为

$$f_\beta(t,q_s,\dot{q}_s)=0,\qquad (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n)\tag{4.8.2}$$

在事件空间中有

$$F_\beta(x_\alpha,x'_\alpha)=0,\qquad (\beta=1,\cdots,g;\ \alpha=1,\cdots,n+1)\tag{4.8.3}$$

其中

$$F_\beta(x_\alpha,x'_\alpha)=f_\beta\left(x_1,\cdots,\ x_{n+1},\ \frac{x'_2}{x'_1},\ \cdots,\ \frac{x'_{n+1}}{x'_1}\right)\tag{4.8.4}$$

命题 1 事件空间中约束方程左端函数 $F_\beta(x_\alpha,x'_\alpha)$对 x'_α 是零阶齐次函数。

〔证明〕 因

$$\frac{\partial F_\beta}{\partial x'_1}=-\frac{1}{x'_1}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_s,\quad \frac{\partial F_\beta}{\partial x'_{s+1}}=\frac{1}{x'_1}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\tag{4.8.5}$$

故

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial F_\beta}{\partial x'_\alpha}x'_\alpha=0\tag{4.8.6}$$ ‖

约束（4.8.2）加在虚位移 δq_s 上的条件为

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s = 0, \quad (\beta=1,\cdots,g) \tag{4.8.7}$$

约束（4.8.3）加在虚位移 Δx_α 上的条件为

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} \frac{\partial F_\beta}{\partial x'_\alpha}\Delta x_\alpha = 0, \quad (\beta=1,\cdots,g) \tag{4.8.8}$$

考虑到式（4.8.5），条件（4.8.8）写成形式

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\Delta q_s - \dot{q}_s\Delta t) = 0 \tag{4.8.9}$$

比较式（4.8.7）和（4.8.9），得到关系

$$\Delta q_s = \delta q_s + \dot{q}_s\Delta t \tag{4.8.10}$$

这表明，R_{n+1} 中的虚位移 Δq_s 乃是 R_n 中的全变分。

如果约束（4.8.2）对 $\dot{q}_s$ 是齐次的，据式（4.8.2），有

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s = k_\beta f_\beta = 0, \quad (\beta=1,\cdots,g) \tag{4.8.11}$$

此时关系（4.8.9）有形式

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\Delta q_s = 0$$

它与式（4.8.7）一致。因此，对 $\dot{q}_s$ 为齐次的约束，等时变分（虚位移）类 δq_s 等价于非等时变分类。

假设由约束（4.8.2）可解出后面 g 个广义速度

$$\dot{q}_{\epsilon+\beta} = \varphi_\beta(q_s, \dot{q}_\sigma, t), \quad (\beta=1,\cdots,g;\ \sigma=1,\cdots,\epsilon;\ \epsilon=n-g;\ s=1,\cdots,n) \tag{4.8.12}$$

在 R_{n+1} 中表为

$$x'_{\epsilon+\beta+1} = \Phi_\beta(x_1,\cdots,x_{n+1},x'_1,\cdots,x'_{\epsilon+1}) \tag{4.8.13}$$

其中

$$\Phi_\beta = x'_1\varphi_\beta\left(x_1,\ \cdots,\ x_{n+1},\ \frac{x'_2}{x'_1},\ \cdots,\ \frac{x'_{\epsilon+1}}{x'_1}\right) \tag{4.8.14}$$

由式（4.8.14），得

$$\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial x_\alpha}=x_1'\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\alpha},\qquad(\alpha=1,\cdots,n+1)\tag{4.8.15}$$

$$\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial x_1'}=\varphi_\beta-\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot q_\sigma}\dot q_\sigma\tag{4.8.16}$$

$$\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial x_{\gamma+1}'}=\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot q_\gamma},\qquad(\gamma=1,\cdots,\varepsilon)\tag{4.8.17}$$

约束（4.8.13）对 Δx_α 的限制条件为

$$\Delta x_{\varepsilon+\beta+1}=\sum_{\nu=1}^{\varepsilon+1}\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial x_\nu'}\Delta x_\nu,\qquad(\beta=1,\cdots,g)\tag{4.8.18}$$

2．事件空间中的 Hamilton 原理

根据给定的Lagrange 函数 $L(t,q_s,\dot q_s)$，对空间 R_{n+1} 定义参数形式的Lagrange 函数

$$\Lambda(x_\alpha,x_\alpha')=x_1'L\left(x_1,\cdots,x_{n+1},\frac{x_2'}{x_1'},\cdots,\frac{x_{n+1}'}{x_1'}\right)\tag{4.8.19}$$

于是有

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}=x_1'\frac{\partial L}{\partial x_\alpha},\qquad(\alpha=1,\cdots,n+1)\tag{4.8.20}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_1'}=L-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_s}\dot q_s=-H\tag{4.8.21}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_{s+1}'}=\frac{\partial L}{\partial\dot q_s},\qquad(s=1,\cdots,n)\tag{4.8.22}$$

因此

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha'}x_\alpha'=\Lambda(x_\alpha,x_\alpha')\tag{4.8.23}$$

于是有下述命题。

命题 2　函数 Λ 对 x_α' 是正定、一阶齐次的。

反之，根据给定的Lagrange 函数 $\Lambda(x_\alpha,x_\alpha')$ 可确定 $L(t,q_s,\dot q_s)$。因此，函数 $\Lambda(x_\alpha,x_\alpha')$ 和 $L(t,q_s,\dot q_s)$ 是彼此等价的，就是说

一个可确定另一个。由此得到Lagrange作用元的不变性

$$L(t,q_s,\dot{q}_s)\mathrm{d}t=\Lambda(x_\alpha,x'_\alpha)\mathrm{d}\tau \tag{4.8.24}$$

这样，位形空间中Hamilton原理的Hölder形式

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L\mathrm{d}t=0,\quad \delta q_s|_{t=t_0}=\delta q_s|_{t=t_1}=0 \tag{4.8.25}$$

在参数化下取形式

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}\Delta\Lambda(x_\alpha,x'_\alpha)\mathrm{d}\tau=0,\quad \Delta x_\alpha|_{\tau=\tau_0}=\Delta x_\alpha|_{\tau=\tau_1}=0 \tag{4.8.26}$$

对于完整系统来说，原理（4.8.26）中的Δx_α不受限制；对于非完整系统来说，原理（4.8.26）中的Δx_α有限制（4.8.8）或（4.8.18）。

3. 事件空间中的D'Alembert-Lagrange原理

现将原理（4.8.26）进行变换。考虑到R_{n+1}中的交换关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Delta x_\alpha=\Delta x'_\alpha \tag{4.8.27}$$

我们有

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}\Delta x_\alpha\right)\Bigg|_{\tau=\tau_0}^{\tau=\tau_1}-\int_{\tau_0}^{\tau_1}\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}\right)\Delta x_\alpha\mathrm{d}\tau=0 \tag{4.8.28}$$

考虑到$\Delta x_\alpha|_{\tau=\tau_0}=\Delta x_\alpha|_{\tau=\tau_1}=0$，则

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}\right)\Delta x_\alpha\mathrm{d}\tau=0 \tag{4.8.29}$$

因积分区间$[\tau_0,\tau_1]$是任意的，由式（4.8.29）得到

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}\right)\Delta x_\alpha=0 \tag{4.8.30}$$

这就是事件空间中的D'Alembert-Lagrange原理。

4.8.2 事件空间中完整保守系统的运动方程

1. Lagrange 方程

因原理（4.8.30）中的 Δx_α 彼此独立，故得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}-\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}=0,\quad (\alpha=1,\cdots,n+1)\quad (4.8.31)$$

这就是事件空间中完整系统的 Lagrange 方程[28]，或称参数方程。这$(n+1)$个方程不全是独立的，因为，考虑到式（4.8.23），有

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{n+1}x'_\alpha\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}-\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\right)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\sum_{\alpha=1}^{n+1}x'_\alpha\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\right)-\sum_{\alpha=1}^{n+1}x''_\alpha\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}-\sum_{\alpha=1}^{n+1}x'_\alpha\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\\&=\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}\tau}-\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}\tau}=0\end{aligned}\quad (4.8.32)$$

现研究方程（4.8.31）中的第一个。利用式（4.8.20）和（4.8.21），第一个方程写成

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\tau}+t'\frac{\partial L}{\partial t}=0\quad (4.8.33)$$

由此得知，当

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0\quad (4.8.34)$$

时，便得到积分

$$H=\mathrm{const.}\quad (4.8.35)$$

方程（4.8.31）的后面 n 个方程，当取 $t=\tau$ 时，成为通常的 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0,\quad (s=1,\cdots,n)\quad (4.8.36)$$

2. Nielsen 方程

命题 3[5] 对事件空间中的任何动力学函数 $f(x_\alpha,x'_\alpha)$，我们有

$$N_\alpha = E_\alpha, \quad (\alpha=1,\cdots,n+1) \tag{4.8.37}$$

其中

$$N_\alpha = \frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} - 2\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tag{4.8.38}$$

$$E_\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tag{4.8.39}$$

分别为事件空间中的 Nielsen 算子和 Euler 算子。

利用命题 3，方程（4.8.31）可表为 Nielsen 形式

$$\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}\tau} - 2\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (\alpha=1,\cdots,n+1) \tag{4.8.40}$$

3. Ценов 方程

在事件空间 R_{n+1} 中构造函数

$$R = \frac{1}{2}(\Lambda'' - 3\Lambda''_0) \tag{4.8.41}$$

其中 $\Lambda'' = \dfrac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}\tau^2}$，而 Λ''_0 为 Λ 中取 x'_α 为常数时对参数 τ 的两次导数，即有

$$\frac{\partial \Lambda''_0}{\partial x''_\alpha} = \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}, \quad (\alpha=1,\cdots,n+1) \tag{4.8.42}$$

命题 4[29] 我们有

$$\frac{\partial R}{\partial x''_\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}, \quad (\alpha=1,\cdots,n+1) \tag{4.8.43}$$

根据命题 4，可将方程（4.8.31）表为 Ценов 形式[29]

$$\frac{\partial R}{\partial x''_\alpha} = 0, \quad (\alpha=1,\cdots,n+1) \tag{4.8.44}$$

4.8.3 事件空间中非完整系统的运动方程

1. Euler-Lagrange 体系的方程

如系统受有 g 个非完整约束（4.8.3），广义力是有势的，那么由原理（4.8.30）和关系（4.8.8），利用通常的 Lagrange 乘

子法，容易得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}-\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial F_\beta}{\partial x'_\alpha},\qquad (\alpha=1,\cdots,n+1)\quad (4.8.45)$$

这是事件空间中非完整有势系统的 Routh 方程[30]。

如系统所受非完整约束表为式（4.8.13），利用约束加在虚位移上的条件（4.8.18），并用导出位形空间中广义 Чаплыгин 方程（3.1.80）的类似讨论，可导出事件空间中的广义 Чаплыгин 方程[3]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial x'_\nu}-\frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial x_\nu}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_{\varepsilon+\beta+1}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x'_\nu}-\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_\nu}\right)$$

$$-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_{\varepsilon+\beta+1}}\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x'_\nu}=0,\qquad (\nu=1,\cdots,\varepsilon+1)$$

$$(4.8.46)$$

其中 $\tilde{\Lambda}$ 为 Λ 中借助约束（4.8.13）消去 $x'_{\varepsilon+\beta+1}$ 所得表达式。

首先，广义 Чаплыгин 参数方程（4.8.46）中的第一个代表能量。实际上，当 $\nu=1$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\tau}+t'\frac{\partial L}{\partial t}-\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}-t'\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\right)\Big(\varphi_\beta$$

$$-\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma\Big)=0\qquad (4.8.47)$$

显然，如果

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0,\quad \varphi_\beta-\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma=0\qquad (4.8.48)$$

则方程（4.8.47）给出积分

$$H=\mathrm{const.}\qquad (4.8.49)$$

其次，不难证明，$(\varepsilon+1)$个方程（4.8.46）通过下式相联系

$$\sum_{\nu=1}^{\varepsilon+1}x'_\nu\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial x'_\nu}-\frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial x_\nu}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_{\varepsilon+\beta+1}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x'_\nu}\right.\right.$$

$$-\frac{\partial \Phi_{\beta}}{\partial x_{\nu}}\Big) - \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_{\varepsilon+\beta+1}} \frac{\partial \Phi_{\beta}}{\partial x'_{\nu}}\Big\} = 0 \quad (4.8.50)$$

最后，研究一个特殊情形 $t=\tau$。此时方程（4.8.47）成为

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial L}{\partial t} - \sum_{\beta=1}^{g}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\Big)\Big(\varphi_{\beta} - \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial \dot{q}_{\sigma}}\dot{q}_{\sigma}\Big) = 0 \quad (4.8.51)$$

而方程（4.8.46）的后面 ε 个方程成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_{\sigma}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_{\sigma}} - \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial \dot{q}_{\sigma}} - \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial q_{\sigma}}\Big) - \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial \dot{q}_{\sigma}} = 0, \quad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \quad (4.8.52)$$

2. Nielsen 体系的方程

命题 5[5] 对任意函数 $\tilde{f}(x_{\alpha}, x'_{\nu})$，我们有

$$N_{\nu} = E_{\nu} + \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \Phi_{\beta}}{\partial x'_{\nu}}\frac{\partial}{\partial x_{\varepsilon+\beta+1}}, \quad (\nu=1,\cdots,\varepsilon+1) \quad (4.8.53)$$

其中 $\tilde{f}$ 为 f 中借助约束（4.8.13）消去 $x'_{\varepsilon+\beta+1}$ 所得表达式。

如果系统受有非完整约束（4.8.3），利用命题3，可将 Routh 方程（4.8.45）变换为 Nielsen 形式

$$\frac{\partial}{\partial x'_{\alpha}}\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}\tau} - 2\frac{\partial \Lambda}{\partial x_{\alpha}} = \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_{\beta}\frac{\partial F_{\beta}}{\partial x'_{\alpha}}, \quad (\alpha=1,\cdots,n+1) \quad (4.8.54)$$

如果系统受有非完整约束（4.8.13），利用命题5，可将广义 Чаплыгин 参数方程（4.8.46）变换为广义 Nielsen 形式

$$\frac{\partial}{\partial x'_{\nu}}\frac{\mathrm{d}\tilde{\Lambda}}{\mathrm{d}\tau} - 2\frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial x_{\nu}} - \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_{\varepsilon+\beta+1}}\Big(\frac{\partial}{\partial x'_{\nu}}\frac{\mathrm{d}\Phi_{\beta}}{\mathrm{d}\tau} - 2\frac{\partial \Phi_{\beta}}{\partial x_{\nu}}\Big) - 2\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_{\varepsilon+\beta+1}}\frac{\partial \Phi_{\beta}}{\partial x'_{\nu}} = 0, \quad (\nu=1,\cdots,\varepsilon+1) \quad (4.8.55)$$

3. Ценов 型方程

根据命题 4，原理（4.8.30）可表为 Ценов 形式

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial R}{\partial x''_\alpha}\Delta x_\alpha=0 \tag{4.8.56}$$

如系统受有非完整约束（4.8.3），由原理（4.8.56）和关系（4.8.8），利用通常的 Lagrange 乘子法，容易得到

$$\frac{\partial R}{\partial x''_\alpha}=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial F_\beta}{\partial x'_\alpha},\quad (\alpha=1,\cdots,n+1) \tag{4.8.57}$$

如系统所受约束为（4.8.13），将关系（4.8.18）代入原理（4.8.56），由 Δx_ν 的独立性可得

$$\frac{\partial R}{\partial x''_\nu}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial R}{\partial x''_{\epsilon+\beta+1}}\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x'_\nu}=0,\quad (\nu=1,\cdots,\epsilon+1) \tag{4.8.58}$$

若令 $\tilde{R}$ 为 R 中借助式（4.8.13）消去不独立的 $x''_{\epsilon+\beta+1}$ 所得表达式，则上式可写成简洁形式

$$\frac{\partial \tilde{R}}{\partial x''_\nu}=0,\quad (\nu=1,\cdots,\epsilon+1) \tag{4.8.59}$$

以上得到的方程（4.8.45）、（4.8.46）、（4.8.54）、（4.8.55）、（4.8.57）和（4.8.59）都是事件空间中非完整有势系统的方程。实际上，这种研究还可推广到具有非势力的非完整系统[31]。

例 质量为 1 的质点在追踪目标时所走轨迹为平面 Oxy 上的曲线，且曲线斜率与时间的某函数 $f(t)$ 成比例。点的运动受到有势力作用，势能为 $V=V(x,y)$。试建立事件空间中的运动方程。

系统在位形空间中的 Lagrange 函数和约束方程分别为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-V(x,y) \tag{a}$$

$$\dot{y}=\dot{x}f(t) \tag{b}$$

令 $x_1=t$，$x_2=x$，$x_3=y$，在事件空间中 Lagrange 函数和约束

方程分别为

$$\Lambda(x_1,x_2,x_3,x_1',x_2',x_3')=\frac{1}{2x_1'}(x_2'^2+x_3'^2)-x_1'V(x_2,x_3) \tag{c}$$

$$x_3'=x_2'f(x_1) \tag{d}$$

Ценов 函数为

$$R=\frac{1}{2}(\Lambda''-3\Lambda_t'')=\frac{1}{2x_1'}(x_2''^2+x_3''^2)-\frac{x_1''}{2x_1'^3}[2x_1'(x_2'x_2''+x_3'x_3'')$$

$$-x_1''(x_2'^2+x_3'^2)]-x_1''\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}x_2'+\frac{\partial V}{\partial x_3}x_3'\right)$$

$$-\frac{x_1'}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}x_2''+\frac{\partial V}{\partial x_3}x_3''\right)+\frac{3}{2}x_1'\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}x_2''+\frac{\partial V}{\partial x_3}x_3''\right)+\cdots \tag{e}$$

其中未写出之项不含 x_1''，x_2''，x_3''。

方程（4.8.57）给出

$$\frac{\partial R}{\partial x_1''}=0,\quad \frac{\partial R}{\partial x_2''}=-\lambda f(x_1)\text{，}\frac{\partial R}{\partial x_3''}=\lambda \tag{f}$$

即

$$\frac{1}{x_1'^3}[x_1'(x_2'x_2''+x_3'x_3'')-x_1''(x_2'^2+x_3'^2)]$$

$$+\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}x_2'+\frac{\partial V}{\partial x_3}x_3'\right)=0 \tag{g}$$

$$\frac{1}{x_1'^2}(x_1'x_2''-x_2'x_1'')+x_1'\frac{\partial V}{\partial x_2}=-\lambda f(x_1) \tag{h}$$

$$\frac{1}{x_1'^2}(x_1'x_3''-x_3'x_1'')+x_1'\frac{\partial V}{\partial x_3}=\lambda \tag{i}$$

方程（g）给出积分

$$\frac{1}{2x_1'^2}(x_2'^2+x_3'^2)+V=h=\text{const.} \tag{j}$$

这就是能量积分。由方程（h）和（i）消去 λ，并利用约束（d）消去 x_3'，x_3''，得到

$$\frac{1}{x_1'^2}\{(x_1'x_2''-x_2'x_1'')[1+f^2(x_1)]+x_1'x_2'f(x_1)f'(x_1)\}$$

$$+x_1'\left\{\frac{\partial V}{\partial x_2}+f(x_1)\frac{\partial V}{\partial x_3}\right\}=0 \qquad (k)$$

特别地，如取 $t=\tau$，则 $x_1'=1$，$x_1''=0$，而方程(k)成为

$$\ddot{x}[1+f^2(t)]+f(t)\dot{f}(t)\dot{x}+\frac{\partial V}{\partial x}+f(t)\frac{\partial V}{\partial y}=0 \qquad (l)$$

这就是位形空间中的运动方程。 ‖

§4.9 分析动力学逆问题

动力学逆问题是经典力学的主要问题之一。最古老、最著名的动力学逆问题是Newton问题：行星按Kepler定律运动，求作用在行星上的力。Newton由此发现了万有引力定律并奠定了Newton矢量力学的基础。动力学逆问题也在分析力学的形成和发展中起过重要作用。特别是近年发展起来的新兴学科，如飞行器动力学，宇航力学，运动和过程的控制理论，机器人动力学等，都与动力学逆问题密切相关。随着科学技术的发展，动力学逆问题的提法也在不断扩充，到60—70年代才给出了动力学逆问题的一般提法。

本节简要讨论分析动力学逆问题的基本提法和解法，并举例说明它们的应用。

4.9.1 动力学逆问题的提法

这里研究动力学逆问题的定义以及逆问题的一些基本提法。

定义 所谓动力学逆问题是指确定加在力学系统上的主动力和力矩、系统的参数以及加在其上的约束问题，使得系统在这些力、力矩、参数以及约束下按给定性质的运动是系统的一个可能运动[32]。

上面所指“运动性质”可用各种方法给定，如对坐标和速度的定量的和定性的限制，系统的积分不变量等。

设完整力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定，则系统的状态可用广义坐标 q_s 和广义速度 $\dot{q}_s$ 来确定。运动性质可用流形

$$\Omega:\ \omega_\mu(q_s,\dot{q}_s,t)=c_\mu,\qquad (\mu=1,\cdots,m\leqslant n)\qquad(4.9.1)$$

给定，其中某些常数 c_μ 可以为零。假定函数 $\omega_\mu(q_s,\dot{q}_s,t)\in C^1$，而等式（4.9.1）在 $t\geqslant t_0$ 时在相空间某域 $G\{q,\dot{q}\}$ 上是相容的且独立的。运动性质的给定流形 Ω，实际上是相应所论力学系统的积分流形。

下面给出动力学逆问题的三种近代基本提法[32]。

1．建立运动方程的基本问题

为解动力学逆问题，自然需要按给定积分流形 Ω 来建立力学系统的运动微分方程，使得表达式（4.9.1）是方程的第一积分 $(c_\mu\neq0)$ 或特殊积分 $(c_\mu=0)$，并且由所建立的运动方程来确定待求的广义力、参数和约束，允许系统按给定性质（4.9.1）而运动。因此，问题归结为下列提法：

按给定的积分流形（4.9.1）$(m\leqslant n)$ 来构造方程组

$$\ddot{q}_s=P_s(q_k,\dot{q}_k,t),\qquad (s,k=1,\cdots,n)\qquad(4.9.2)$$

2．运动方程的修改

在某些情形，已知运动方程的结构，但不知道为确保系统按给定性质而运动所必须的补充力和参数，这就需要按给定的积分流形预先确定运动方程并由修改了的方程求得待求量。此时，问题归结为下列提法：

给定方程组

$$\ddot{q}_s=P_{0s}(q_k,\dot{q}_k,v_l,t),\qquad (s,k=1,\cdots,n;\ l=1,\cdots,r)\quad(4.9.3)$$

按给定的积分流形（4.9.1）$(m\leqslant n)$ 来确定函数 $v_l(q_k,\dot{q}_k,t)(l=1,\cdots,r)$。

3．运动方程的封闭

当事先仅仅知道系统的一部分运动方程时，为解动力学逆问题就需按给定的积分流形来建立短少的方程，并由封闭方程组确定待求的广义力、参数和约束。因此，问题归结为下列提法：

给定方程组

$$\ddot{q}_s = P_{0s}(q_k, \dot{q}_k, u_\sigma, \dot{u}_\sigma, t), (s, k = 1, \cdots, n;\ \sigma = 1, \cdots, p) \tag{4.9.4}$$

按给定的积分流形（4.9.1）（$m \leqslant p$）来建立封闭方程组

$$\ddot{u}_\rho = U_\rho(q_s, \dot{q}_s, u_\sigma, \dot{u}_\sigma, t), \quad (\rho = 1, \cdots, p) \tag{4.9.5}$$

因此，动力学逆问题的解在足够一般的数学解释下归结为按给定积分流形来建立力学系统的运动方程。当然，上面指出的建立运动方程的各种提法不是唯一可能的。例如，给定的运动性质可以仅依赖于一部分 q_s，$\dot{q}_s$，而这些性质或者只是几何的，或者只是运动学的；运动性质可以由不等式给出；所建立的某些方程可以是一阶微分方程，等等。但是，建立微分方程的所有这些可能的变化，无论从其实际意义上，还是从方法上来说，它们的解完全包括在上面指出的问题提法的基本变形中，因为这些变形或者是其推广情形，或者是其特殊情形。

4.9.2 运动方程的建立

1. 用建立运动方程的方法来解动力学逆问题

动力学逆问题的解归结为常微分方程理论中逆问题的解，即按照给定的第一积分或者特殊积分来建立或补建微分方程本身。微分方程理论中的逆问题，作为按给定特殊积分建立方程组集合的问题，首先由 Еругин 研究，并给出问题的解法[33]。Еругин 提出的按给定特殊积分来建立微分方程的方法，不仅可按运动给定性质来建立力学系统的运动方程，而且可考虑到一些补充需要，例如稳定性或运动优化的需要，来建立这些方程。为解所提动力学逆问题，根据 Еругин 方法，首先建立使给定的积分流形组成要建立的微分方程组的积分流形的充要条件。这些条件，可由把按待求方程组成的、给定积分的导数看成为任意函数而得

到，这些函数称为 Еругин 函数，当 $c_\mu=0$ 时它们在给定积分流形上变为零，而当 $c_\mu\neq0$ 时简单地取为零。所得到的等式是所论力学系统给定运动存在的必要条件，即对系统按给定性质运动存在来说是必要的，还需要满足系统的初始状态。

对建立运动方程的基本问题中，存在按给定性质（4.9.1）的运动的必要条件是

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_\mu}{\partial q_s}\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_\mu}{\partial\dot{q}_s}P_s+\frac{\partial\omega_\mu}{\partial t}$$
$$=\Phi_\mu(\omega,q,\dot{q},t),\qquad(\mu=1,\cdots,m)\tag{4.9.6}$$

其中 $\Phi_\mu(\omega,q,\dot{q},t)$ 是 Еругин 函数。当 $c_\mu\neq0$ 时，$\Phi_\mu=0$；当 $c_\mu=0$ 时，Φ_μ 是在积分流形（4.9.1）上趋于零的任意函数。

将式（4.9.6）改写为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_\mu}{\partial\dot{q}_s}P_s=\Phi_\mu(\omega,q,\dot{q},t)-\varphi_\mu,\qquad(\mu=1,\cdots,m)\tag{4.9.7}$$

其中

$$\varphi_\mu=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_\mu}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial\omega_\mu}{\partial t}\tag{4.9.8}$$

方程（4.9.7）可用于确定待求方程组（4.9.2）的右端 P_s。当 $m=n$ 时，直接解式（4.9.7），得待求方程组

$$\ddot{q}_s=P_s=\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\Delta_{\mu s}}{\Delta}(\Phi_\mu-\varphi_\mu),\qquad(s=1,\cdots,n)\tag{4.9.9}$$

其中

$$\Delta=\det\left(\frac{\partial\omega_\mu}{\partial\dot{q}_s}\right)_{n\times n}\neq0$$

而 $\Delta_{\mu s}$ 为行列式 Δ 的元素(μ,s)的代数余子式。

当 $m<n$ 时，可由方程（4.9.7）解出一部分广义加速度 $\ddot{q}_r$，并记作

$$\ddot{q}_r = P_r = \sum_{l=1}^{m} \frac{\Delta_{lr}}{\Delta}(\Phi_l - \varphi_l) - \sum_{\rho=m+1}^{n} \frac{\Delta^{r\rho}}{\Delta} \ddot{q}_\rho, \qquad (r=1,\cdots,m)$$

(4.9.10)

其中 $\Delta = \det\left(\frac{\partial \omega_l}{\partial \dot{q}_s}\right)_{m\times m} \neq 0$，$\Delta_{lr}$ 为行列式 Δ 的元素(l,r)的代数余子式，$\Delta^{r\rho}$ 为 Δ 中第 r 列用方程（4.9.6）中矩阵第 ρ 列替代所得行列式。

构成运动方程的逆问题，一般说来没有单一解。这是因为，第一，方程（4.9.10）在 $m<n$ 时，不能唯一地确定所有函数 $P_s(s=1,\cdots,n)$；第二，当 $c_u=0$ 时，既使 $m=n$，也还包含任意函数 $\Phi_u(\omega,q,\dot{q},t)$。但是，无论从提法的广度，还是从方法应用的通用性来说，所得到的解可用于建立许多动力学逆问题的运动方程。

2. 行星的 Kepler 运动

现在利用上面指出的方法来解 Newton 问题。行星的运动性质写成形式

$$\Omega:\begin{cases}\omega_1 \equiv r - ex = p\left(r=\sqrt{x^2+y^2}\right) & (4.9.11)\\ \omega_2 \equiv x\dot{y} - \dot{x}y = c & (4.9.12)\end{cases}$$

这些性质是行星运动方程

$$\ddot{x} = X(x,\ y),\ \ddot{y} = Y(x,\ y) \qquad (4.9.13)$$

的第一积分。

首先，利用面积积分(4.9.12)式来建立运动方程。因 $c\neq 0$，故式（4.9.6）给出

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{x}} X + \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{y}} Y + \frac{\partial \omega_2}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y}\dot{y} = 0$$

即

$$xY - yX = 0 \qquad (4.9.14)$$

由此，直接得到方程（4.9.13）的右端部分为

$$X = xV(x,\ y),\ Y = yV(x,\ y) \qquad (4.9.15)$$

它们还包含一个任意函数 $V(x,y)$。为确定这个函数，可利用行星轨道方程（4.9.11）。将式（4.9.11）对时间 t 求两次导数，并利用方程(4.9.13)，得

$$-\frac{c^2}{r^3}+\frac{x}{r}X+\frac{y}{r}Y-eX=0 \qquad (4.9.16)$$

将式（4.9.15）代入式（4.9.16），并利用式（4.9.11），得到

$$V(x,y)=-\frac{c^2}{pr^3} \qquad (4.9.17)$$

于是，质点 m 的行星运动方程的最终形式为

$$m\ddot{x}=-\frac{mc^2}{p}\frac{x}{r^3},\quad m\ddot{y}=-\frac{mc^2}{p}\frac{y}{r^3} \qquad (4.9.18)$$

4.9.3 运动方程的修改

这里研究运动方程的修改方法，并以自激陀螺为例说明方法的应用。

1. 运动方程的修改

在力学系统运动方程的修改问题中，方程（4.9.3）的结构是已知的，需要确定系统的参数 v_1，…，v_r 以及加在系统上的补充力使得力学系统按给定性质(4.9.1）的运动是一个可能的运动。

运动方程的修改问题可按以下步骤进行：（1）建立微分方程组，对此方程组来说给定的流形（4.9.1）是积分。（2）建立一组等式，使这个方程组的右端等于给定方程组（4.9.3)的右端。（3）由等式组确定待求函数 v_l（$l=1,\cdots,r$）。

类似于 4.9.2 的情形，运动方程的修改问题也没有单一解。必须施加一些补充条件，才有单一解。

2. 自激陀螺

陀螺的运动方程有形式

$$A\dot{x}_1=(B-C)x_2x_3+M_1,\quad B\dot{x}_2=(C-A)x_3x_1+M_2, \qquad (4.9.19)$$

$$C\dot{x}_3=(A-B)x_1x_2+M_3$$

其中 A，B，C 为陀螺的惯性主矩；x_1，x_2，x_3 为陀螺瞬时角速度在主轴上的投影；M_1，M_2，M_3 为对固定点的力矩在主轴上的投影，它们依赖于 x_1，x_2，x_3。提出下述问题：确定阻力矩 M_1，M_2，M_3 使得陀螺按下述给定性质

$$\Omega:\left\{\begin{array}{l}\omega_1\equiv e^{2\lambda t}\ T=\text{const.}\\ \omega_2\equiv e^{2\lambda t}\ G^2=\text{const.}\end{array}\right. \tag{4.9.20}$$

发生运动，其中 $T=\frac{1}{2}(Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2)$ 为陀螺动能，$G^2=A^2x_1^2+B^2x_2^2+C^2x_3^2$ 为对固定点计算的动量矩的平方，λ 为正的常数。

为解上述问题，将式（4.9.20）对 t 求导数，并利用方程（4.9.19），得到按性质（4.9.20）运动的存在条件

$$\begin{gathered}x_1M_1+x_2M_2+x_3M_3=-2\lambda T,\\ Ax_1M_1+Bx_2M_2+Cx_3M_3=-\lambda G^2\end{gathered} \tag{4.9.21}$$

由此解得 M_1，M_2，有

$$M_1=\frac{-\lambda(2BT-G^2)+M_3(C-B)x_3}{x_1(B-A)}$$

$$M_2=\frac{-\lambda(G^2-2AT)+M_3(A-C)x_3}{x_2(B-A)} \tag{4.9.22}$$

其中 M_3 是 x_1，x_2，x_3 的任意函数。可见，问题的解包含一个任意函数，它可由某些补充要求来确定。例如，要求阻力借助粘摩擦力来实现，使 $M_3=-\lambda Cx_3$，此时待求阻力矩的其它两个投影由式（4.9.22）得出为

$$M_1=-\lambda Ax_1,\quad M_2=-\lambda Bx_2 \tag{4.9.23}$$

因此，陀螺运动方程为

$$A\dot{x}_1=(B-C)x_2x_3-\lambda Ax_1,\quad B\dot{x}_2=(C-A)x_3x_1-\lambda Bx_2 \tag{4.9.24}$$

$$C\dot{x}_3=(A-B)x_1x_2-\lambda Cx_3$$

这就按给定性质完全地修改了运动。

4.9.4 运动方程的封闭

现在研究运动方程的封闭问题，并举例说明方法的应用。

1. 运动方程的封闭

在运动方程封闭的动力学问题中，一部分运动方程（例如，系统基本对象的运动方程）是事先已知的，有形式（4.9.4），需要建立必要数目的方程(4.9.5)（例如，描述辅助装置运动的方程），使得方程组（4.9.4）为封闭方程组且给定流形（4.9.1）（$m\leqslant p$）是该方程组的积分流形。

为解运动方程的封闭的问题，首先要组成上面提到的运动存在的相应条件。将式(4.9.1)左端对 t 求导数，并利用式(4.9.4)消去 $\ddot{q}_s$，得到

$$\dot{\omega}_\mu=\dot{\omega}_\mu(q,\dot{q},u,\dot{u},t)\equiv\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_\mu}{\partial q_s}\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_\mu}{\partial\dot{q}_s}P_{0s}+\frac{\partial\omega_\mu}{\partial t}\qquad(4.9.25)$$

再将式（4.9.25）对 t 求导数，并利用式（4.9.5）消去 $\ddot{u}_\rho$，引入 Еругин 函数，得到

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\dot{\omega}_\mu}{\partial q_s}\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\dot{\omega}_\mu}{\partial\dot{q}_s}P_{0s}+\sum_{\sigma=1}^{p}\frac{\partial\dot{\omega}_\mu}{\partial u_\sigma}\dot{u}_\sigma+\sum_{\sigma=1}^{p}\frac{\partial\dot{\omega}_\mu}{\partial\dot{u}_\sigma}U_\sigma+\frac{\partial\dot{\omega}_\mu}{\partial t}=\Phi_\mu(\omega,q,\dot{q},t)\qquad(4.9.26)$$

它们可改写为

$$\sum_{\sigma=1}^{p}\frac{\partial\dot{\omega}_\mu}{\partial\dot{u}_\sigma}U_\sigma=\Phi_\mu-\varphi_\mu^*,\qquad(\mu=1,\cdots,m)\qquad(4.9.27)$$

其中

$$\varphi_\mu^*=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\dot{\omega}_\mu}{\partial q_s}\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\dot{\omega}_\mu}{\partial\dot{q}_s}P_{0s}$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{p}\frac{\partial\omega_{\varkappa}}{\partial u_{\sigma}}\dot{u}_{\sigma}+\frac{\partial\omega_{\varkappa}}{\partial t} \qquad (4.9.28)$$

关系（4.9.27）就是运动存在的相应条件。其次，由式(4.9.27)求出待求方程(4.9.5)的右端部分。最后，封闭方程组由式（4.9.4）、（4.9.5）组成。

2．重刚体绕固定点转动的动力学逆问题

现在提出重刚体绕固定点运动的如下动力学逆问题。

试建立 Euler 动力学方程

$$\dot{x}_s=f_s(x_1,\cdots,x_6),\qquad (s=1,2,3) \qquad (4.9.29)$$

根据下述第一积分

$$\Omega:\begin{cases}\omega_1\equiv\frac{1}{2}(Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2)+Mg(x_cx_4+y_cx_5+z_cx_6)=c_1\\ \omega_2\equiv Ax_1x_4+Bx_2x_5+Cx_3x_6=c_2\\ \omega_3\equiv\omega_3(x_1,\cdots,x_6)=c_3\end{cases} \qquad (4.9.30)$$

其中 x_1、x_2，x_3 为刚体瞬时角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在固定点处惯性椭球主轴上的投影；x_4，x_5，x_6 为动主轴相对铅垂线方向的方向余弦，它们满足运动学方程

$$\dot{x}_4=x_3x_5-x_2x_6\equiv f_4,\quad \dot{x}_5=x_1x_6-x_3x_4\equiv f_5$$

$$\dot{x}_6=x_2x_4-x_1x_5\equiv f_6 \qquad (4.9.31)$$

这里 A,B,C 为刚体对主轴的惯性矩；Mg 为刚体重量；$\boldsymbol{r}_c(x_c,y_c,z_c)$ 为刚体质心的矢径；$\omega_3(x_1,\cdots,x_6)$ 是某域 $X\{x_1,\cdots,x_6\}$ 上对所有变量的可微函数，使得方程组（4.9.29）和（4.9.31）的第一积分

$$\omega_0\equiv x_4^2+x_5^2+x_6^2=1 \qquad (4.9.32)$$

$$\omega_i(x_1,\cdots,x_6)=c_i,\qquad (i=1,2,3)$$

是独立的且相容的。

所提问题是不完全微分方程组（4.9.31）按给定积分流形（4.9.30）来封闭的问题。

为解此问题，将式(4.9.30)对 t 求导数，利用式 (4.9.31) 消去 $\dot{x}_4$，$\dot{x}_5$，$\dot{x}_6$，并引入 Еругин 函数 Φ，得到

$$\begin{aligned}&Ax_1\dot{x}_1+Bx_2\dot{x}_2+Cx_3\dot{x}_3=-Mg(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})\\&Ax_4\dot{x}_1+Bx_5\dot{x}_2+Cx_6\dot{x}_3=-(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})\\&\delta_1\dot{x}_1+\delta_2\dot{x}_2+\delta_3\dot{x}_3=\Phi-(\overline{\boldsymbol{\delta}}\cdot\boldsymbol{f})\end{aligned}\tag{4.9.33}$$

其中 $\boldsymbol{G}(Ax_1,Bx_2,Cx_3)$ 是刚体对固定点的动量矩；当 $c_3\neq0$ 时，Еругин 函数 $\Phi=0$；而当 $c_3=0$ 时，$\Phi=\Phi(x_1,\cdots,x_6)$ 为满足条件$\Phi|_{\omega_3=0}=0$ 的任意函数；$\boldsymbol{f}(f_4,f_5,f_6)=\boldsymbol{\zeta}_0\times\boldsymbol{\omega}$，$\boldsymbol{\zeta}_0(x_4,x_5,x_6)$ 为铅垂线单位矢量；$\overline{\boldsymbol{\delta}}(\delta_4,\delta_5,\delta_6)$，$\delta_s=\dfrac{\partial\omega_3}{\partial x_s}$ $(s=1,\cdots,6)$。由(4.9.33) 解得[32]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1=&\frac{1}{\Delta}\{(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})(Cx_3\delta_2-Bx_2\delta_3)-BC(\overline{\boldsymbol{\delta}}\cdot\boldsymbol{f})f_4\\&+Mg(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})(Bx_5\delta_3-Cx_6\delta_2)\}+\Phi_1\\\dot{x}_2=&\frac{1}{\Delta}\{(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})(Ax_1\delta_3-Cx_3\delta_1)-CA(\overline{\boldsymbol{\delta}}\cdot\boldsymbol{f})f_5\\&+Mg(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})(Cx_6\delta_1-Ax_4\delta_3)\}+\Phi_2\\\dot{x}_3=&\frac{1}{\Delta}\{\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})(Bx_2\delta_1-Ax_1\delta_2)-AB(\overline{\boldsymbol{\delta}}\cdot\boldsymbol{f})f_6\\&+Mg(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})(Ax_4\delta_2-Bx_5\delta_1)\}+\Phi_3\end{aligned}\tag{4.9.34}$$

其中 $\Delta=BC\delta_1f_4+CA\delta_2f_5+AB\delta_3f_6\neq0$，$\Phi_1=BC\Phi f_4$，$\Phi_2=CA\Phi f_5$，$\Phi_3=AB\Phi f_6$。

将 $x_1,\cdots,x_6$ 研究作为表现点在积分流形 (4.9.30) 上的坐标，要求所建立的方程 (4.9.34) 与重刚体绕定点运动的已知 Euler 方程相等，此时考虑到在积分流形上 $\Phi_1=\Phi_2=\Phi_3=0$，我们得到

$$\begin{aligned}&(B-C)x_2x_3+Mg(z_cx_5-y_cx_6)\equiv A\varphi_1\\&(C-A)x_3x_1+Mg(x_cx_6-z_cx_4)\equiv B\varphi_2\\&(A-B)x_1x_2+Mg(y_cx_4-x_cx_5)\equiv C\varphi_3\end{aligned}\tag{4.9.35}$$

其中 φ_1，φ_2，φ_3 为方程 (4.9.34) 的右端部分，但不含Φ_i，

Φ_2，Φ_3。等式（4.9.35）就是重刚体绕定点运动的动力学方程（4.9.29）和运动学方程（4.9.31）存在形如式（4.9.30）的第一积分的充要条件，并可作为解许多逆问题的原始方程。

利用等式（4.9.35）可得到重刚体绕定点转动方程存在第四个经典积分的条件。假设给定方程（4.9.29）和（4.9.31）的下述积分

$$\omega_3 \equiv \frac{1}{2}(A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + C^2x_3^2) = c_3 \qquad (4.9.36)$$

此时

$$\delta_1 = A^2x_1,\ \delta_2 = B^2x_2,\ \delta_3 = C^2x_3,\ \delta_4 = \delta_5 = \delta_6 = 0,$$
$$\Delta = ABC(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})$$

Euler 动力学方程（4.9.29）在此情形下写成形式

$$A\dot{x}_1 = (B-C)x_2x_3 + Mg(Cx_3x_5 - Bx_2x_6)\frac{(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})}{(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})}$$

$$B\dot{x}_2 = (C-A)x_3x_1 + Mg(Ax_1x_6 - Cx_3x_4)\frac{(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})}{(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})}$$

$$C\dot{x}_3 = (A-B)x_1x_2 + Mg(Bx_2x_4 - Ax_1x_5)\frac{(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})}{(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})}$$

（4.9.37）

方程（4.9.31）和（4.9.37）存在积分（4.9.36）的充要条件是等式(4.9.35)，有形式

$$(z_cx_5 - y_cx_6)(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f}) \equiv (Cx_3x_5 - Bx_2x_6)(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})$$
$$(x_cx_6 - z_cx_4)(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f}) \equiv (Ax_1x_6 - Cx_3x_4)(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f}) \qquad (4.9.38)$$
$$(y_cx_4 - x_cx_5)(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f}) \equiv (Bx_2x_4 - Ax_1x_5)(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})$$

由此得知，对应于 Euler 情形，其中刚体质心在固定点上，有 $x_c = y_c = z_c = 0$，刚体质量的这种分布是存在给定积分（4.9.36）的充分条件。

用类似的讨论可以证明，刚体质量分布为

$A = B$，$x_c = y_c = 0$，$z_c \neq 0$（Lagrange 情形）　　（4.9.39）

是存在积分

$$\omega_3 \equiv x_3 = c_3 \tag{4.9.40}$$

的充分条件；刚体质量分布为

$$A = B = 2C,\ y_c = z_c = 0,\ x_c \neq 0 \quad \text{（Ковалевская 情形）} \tag{4.9.41}$$

是存在积分

$$\omega_3 \equiv (x_1^2 - x_2^2 - nx_4)^2 + (2x_1x_2 - nx_5)^2 = c_3$$

$$\left(n = \frac{Mg}{C} x_c \right) \tag{4.9.42}$$

的充分条件。

4.9.5 非完整系统动力学逆问题

这里研究非完整系统动力学的逆问题的一种提法和解法，并举例说明方法的应用。

1. 问题的提法和解法

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定，它的运动受有 g 个理想 Четаев 型 非完整约束

$$\omega_\beta(q_s, \dot{q}_s, t) = 0, \qquad (\beta = 1, \cdots, g;\ s = 1, \cdots, n) \tag{4.9.43}$$

已知系统有（$m-g$）个第一积分

$$\omega_\nu(q_s, \dot{q}_s, t) = c_\mu, \qquad (\nu = g+1, \cdots, m;\ m \leqslant n) \tag{4.9.44}$$

假设式（4.9.43）、(4.9.44）中的 ω_β，ω_ν 是彼此函数独立的且相容的，对其中的变量有连续一阶偏导数。我们提出下述动力学逆问题：已知式（4.9.43）和（4.9.44），试构成系统的运动方程。

为解上述逆问题，将式（4.9.43）、(4.9.44）统一表为

$$\omega_\mu(q_s, \dot{q}_s, t) = c_\mu, \qquad (\mu = 1, \cdots, m) \tag{4.9.45}$$

将式（4.9.45）对 t 求导数，并引入 Еругин 函数，得到

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_\mu}{\partial q_s}\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_\mu}{\partial\dot{q}_s}\ddot{q}_s+\frac{\partial\omega_\mu}{\partial t}=\Phi_\mu(\omega,q,\dot{q},t)$$

$$(\mu=1,\cdots,m) \tag{4.9.46}$$

由m个方程（4.9.46）解出m个$\ddot{q}$，并记作

$$\ddot{q}_r=\sum_{l=1}^{m}\frac{\Delta_{lr}}{\Delta}\left(\Phi_l-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_l}{\partial q_s}\dot{q}_s-\frac{\partial\omega_l}{\partial t}\right)-\sum_{\rho=m+1}^{n}\frac{\Delta'^{\rho}}{\Delta}\ddot{q}_\rho$$

$$(r=1,\cdots,m) \tag{4.9.47}$$

其中 $\Delta=\det\left(\frac{\partial\omega_l}{\partial\dot{q}_r}\right)_{m\times m}\neq 0$，$\Delta_{lr}$为$\Delta$元素$(l,r)$的代数余子式，$\Delta^{r\rho}$为$\Delta$中第$r$列用式（4.9.46）中矩阵第$\rho$列替代所得行列式。

由式（4.9.47）得知，这类逆问题没有单一解。

2. 应用

现举例说明上述方法的应用。

例 一质量为m的质点在空间中运动，令$q_1=x,q_2=y$，$q_3=z$，它的运动受有一个非完整约束

$$\omega_1\equiv\dot{q}_3-\frac{b}{a}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{1/2}=0 \tag{a}$$

已知系统有两个第一积分

$$\omega_2\equiv\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+mgq_3=h\neq 0 \tag{b}$$

$$\omega_3\equiv\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1}=c\neq 0$$

试构成问题的运动方程。

为解此问题，利用式(4.9.47)。我们有

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{\partial\omega_1}{\partial\dot{q}_1} & \frac{\partial\omega_1}{\partial\dot{q}_2} & \frac{\partial\omega_1}{\partial\dot{q}_3}\\ \frac{\partial\omega_2}{\partial\dot{q}_1} & \frac{\partial\omega_2}{\partial\dot{q}_2} & \frac{\partial\omega_2}{\partial\dot{q}_3}\\ \frac{\partial\omega_3}{\partial\dot{q}_1} & \frac{\partial\omega_3}{\partial\dot{q}_2} & \frac{\partial\omega_3}{\partial\dot{q}_3}\end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix}
-\dfrac{b}{a}\dot{q}_1(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-1/2} & -\dfrac{b}{a}\dot{q}_2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-1/2} & 1 \\
m\dot{q}_1 & m\dot{q}_2 & m\dot{q}_3 \\
-\dfrac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1^2} & \dfrac{1}{\dot{q}_1} & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
=m\left(1+\frac{\dot{q}_2^2}{\dot{q}_1^2}\right)\left\{1+\frac{b}{a}\dot{q}_3(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-1/2}\right\} \tag{c}
$$

其代数余子式为

$$
\Delta_{11}=-m\frac{\dot{q}_3}{\dot{q}_1},\quad \Delta_{12}=-m\frac{\dot{q}_3\dot{q}_2}{\dot{q}_1^2},\quad \Delta_{13}=m\left(1+\frac{\dot{q}_2^2}{\dot{q}_1^2}\right)
$$

$$
\Delta_{21}=\frac{1}{\dot{q}_1},\quad \Delta_{22}=\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1^2},\quad \Delta_{23}=-\frac{b}{a\dot{q}_1^2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{1/2} \tag{d}
$$

$$
\Delta_{31}=-m\dot{q}_2\dot{q}_3(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-1/2}-m\dot{q}_2,
$$

$$
\Delta_{32}=m\frac{b}{a}\dot{q}_1\dot{q}_3(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-1/2}+m\dot{q}_1,\quad \Delta_{33}=0
$$

因 $m=n=3$，故

$$
\Delta'^{p}=0 \tag{e}
$$

因 $h\neq 0$，$c\neq 0$，故 Ергина 函数

$$
\Phi_2=\Phi_3=0 \tag{f}
$$

将式（c）—（f）代入式(4.9.47)，得到

$$
\ddot{q}_1=\frac{\Delta_{11}}{\Delta}\Phi_1-\frac{\Delta_{21}}{\Delta}mg\dot{q}_3=\frac{m}{\Delta}\left\{-\frac{\dot{q}_3}{\dot{q}_1}(\Phi_1+g)\right\}
$$

$$
\ddot{q}_2=\frac{\Delta_{12}}{\Delta}\Phi_1-\frac{\Delta_{22}}{\Delta}mg\dot{q}_3=\frac{m}{\Delta}\left\{-\frac{\dot{q}_3\dot{q}_2}{\dot{q}_1^2}(\Phi_1+g)\right\}
$$

$$(g)$$

$$
\ddot{q}_3=\frac{\Delta_{13}}{\Delta}\Phi_1-\frac{\Delta_{23}}{\Delta}mg\dot{q}_3=\frac{m}{\Delta}\left\{\left(1+\frac{\dot{q}_2^2}{\dot{q}_1^2}\right)\Phi_1\right.
$$

$$
\left.-g\frac{b\dot{q}_3}{a\dot{q}_1^2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-1/2}\right\}
$$

其中$\Phi_1\big|_{\omega_i=0}=0$。方程（$g$）就是待求运动方程。

如果限于研究质点必须在超曲面（a）上运动，则可将

$$\dot{q}_3=\frac{b}{a}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{1/2}$$

代入方程（g），此时有$\Phi_1=0$，于是得到

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1&=-\frac{abg\dot{q}_1}{(a^2+b^2)(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{1/2}}\\ \ddot{q}_2&=-\frac{abg\dot{q}_2}{(a^2+b^2)(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{1/2}}\\ \ddot{q}_3&=-\frac{b^2}{a^2+b^2}g\end{aligned}\qquad (h)$$

这就是著名的 Appell-Hamel 例的运动方程。 ‖

§4.10 历史资料

4.10.1 名家介绍

L.Euler（1707—1783） 瑞士数学家、力学家。他在数学分析、微分几何、数论、理论力学、数学物理、天文学、船舶理论等方面做了一系列的奠基性工作。他是刚体动力学的奠基人，提出 Euler 角，Euler 动力学方程以及刚体定点转动的一个可积情形。

С. В. Ковалевская（1850—1891） 俄国数学家。她在《关于刚体绕固定点转动问题》（1888）的著名论文中得到刚体绕定点转动的第三个可积情形，即 Ковалевская 情形。

А. М. Ляпунов（1857—1918） 俄国力学家、数学家。运动稳定性理论的奠基人之一。在他的博士论文《论运动稳定性的一般问题》（1892）中对稳定性给出严格的数学定义，采用纯数学

分析的方法提出分析稳定性问题的两种方法。

И. В. Мещерский（1859—1935） 俄国和苏联力学家。在他的博士论文《变质量质点动力学》(1897) 中提出了变质量质点的动力学方程，即Мещерский方程。他编著的《理论力学习题集》（1914）也很著名。

4.10.2 关于分析动力学的专门问题

本章§4.1—§4.9中讨论了九个专门问题，即运动稳定性和小振动理论、刚体定点转动问题，相对运动动力学，可控力学系统问题，打击运动，变质量问题，机电系统问题，事件空间中的分析动力学，以及分析动力学的逆问题等。当然，属于专门问题的还有许多，如连续系统的分析力学[34,35]，单面约束动力学，扰动理论，动力学控制[16]，刚体系统分析力学[36]，非Четаев型约束系统动力学[24]，相对论性分析力学[37]，滚轮系统的线路稳定性[4,38]等等。

习　题

1．设定常完整系统的运动微分方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{\partial \overline{W}}{\partial \dot{q}_s}+\Gamma_s, \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{a}$$

其中Γ_s为广义陀螺力，即

$$\sum_{s=1}^{n}\Gamma_s\dot{q}_s=0 \tag{b}$$

而$\overline{W}$为t，q，$\dot{q}$的某函数，且

$$\overline{W}=\sum_{m=1}^{\infty}W^{(m)} \tag{c}$$

其中$W^{(m)}$为广义速度的m次齐次式。试证，如果满足（1）方程（a）有

平衡位置 $q_s=q^0_s$，$\dot{q}_s=0$；(2) $\frac{\partial W^{(1)}}{\partial \dot{q}_s}=-\frac{\partial P}{\partial q_s}$ $(s=1,\cdots,n)$；(3) $P=P(q_s)$ 在平衡位置有极小值；(4) $\sum_{m=2}^{\infty} mW^{(m)}$ 收敛并取非正值，那么平衡位置对坐标是稳定的。

2．研究Стеклов 情形。令式（4.2.46）和（4.2.47）是第一积分，试导出

$$\gamma=-p^2\frac{C(A-B)(A-C)}{(2C-A)(2B-A)Mgx_G}+q^2\frac{(A-B)(A-C)(B-C)}{A(2C-A)Mgx_G}$$

和

$$\gamma=-p^2\frac{B(A-B)(A-C)}{(2C-A)(2B-A)Mgx_G}-r^2\frac{(A-B)(A-C)(B-C)}{A(2B-A)Mgx_G}$$

由此导出式（4.2.48）。并由 $\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1$ 以及式（4.2.48）导出式（4.2.49）。证明，此时面积积分常数 $c_2=0$。

3．设载体以匀角速度 ω 绕固定轴 $\bar{o}z$ 转动。被载系统为一质量为 m 的质点，在以 $\bar{o}$ 为中心的 *Newton* 引力场中运动，它的运动受有相对速度大小为常数的非完整约束。试导出问题的相对运动动力学方程。

4．在§4.4 例 4 中加上非完整约束 $\dot{x}_2=tx_1$，试导出问题的运动方程。

5．试用方程（4.5.34）研究§4.5中的例 2 。

6．试导出变质量非完整系统普通导数表示的 Hamilton 原理的Hölder 形式

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta T+\sum_{s=1}^{n}(Q_s+P_s)\delta q_s\right\}dt=0$$

其中 P_s 由式（4.6.32）确定。假设质量 $m_i=m_i(q_s,\dot{q}_s,t)$。

7．在电磁继电器中有

$$V - W_m = \frac{1}{2}K(l_0\varphi)^2 + Py_0\cos\varphi - \frac{w_0h^2}{h^2 - l^2\varphi^2}$$

其中V为机械部分势能，W_m为磁能，K, l_0, P, h, w_0为常数。试用Lagrange—Dirichlet定理证明$\varphi = 0$为稳定的条件是

$$Kl^2_0 - Py_0 - \frac{2w_0l^2}{h^2} > 0$$

8．令事件空间中加速度能量为

$$S^e(x_a, x'_a, x''_a) = x_1'^2 S\left(x_1, \cdots, x_{n+1}, \frac{x'_2}{x'_1}, \cdots, \frac{x'_{n+1}}{x'_1}, \right.$$

$$\left. \frac{x''_2x_1' - x_2'x_1''}{x_1'^3}, \cdots, \frac{x''_{n+1}x_1' - x'_{n+1}x_1''}{x_1'^3}\right)$$

试证，Lagrange方程（4.8.31）可表为Appell形式

$$\frac{\partial S^e}{\partial x''_1} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_{s+1}} \frac{x'_{s+1}}{x'_1}, \quad \frac{\partial S^e}{\partial x''_{s+1}} = -\frac{\partial V}{\partial x_{s+1}}$$

$$(s = 1, \cdots, n)$$

其中$V = V(x_2, \cdots, x_{n+1})$为系统的势能。

9．试解下述动力学逆问题：一质点在平面(x, y)上运动，给定运动性质为

$$\Omega:\ \omega_1 \equiv f(x, y) = c_1,\ \omega_2 = x\dot{y} - \dot{x}y = c_2$$

试证所受力为

$$X = -\frac{c_2^2 x(f_y^2 f_{xx} + f_x^2 f_{yy} - 2f_xf_yf_{xy})}{(xf_x + yf_y)^3}$$

$$Y = -\frac{c_2^2 y(f_y^2 f_{xx} + f_x^2 f_{yy} - 2f_xf_yf_{xy})}{(xf_x + yf_y)^3}$$

参 考 文 献

〔1〕 Гантмахер Ф Р. Лекции по аналитической механике. М:ГИФМЛ, 1960.

〔2〕 陈滨. 分析动力学。北京：北京大学出版社，1987.

〔3〕 马尔金 И Г. 运动稳定性理论（解伯民译）. 北京：科学出版社，1958.

〔4〕 Неймарк Ю И, Фуфаев Н А. Динамика неголономных систем. М:Наука, 1967.

〔5〕 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京：北京工业学院出版社，1985.

〔6〕 Харламов П В. Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск:Изд-Во Новосибр. ун-та. , 1965.

〔7〕 Архангельский Ю А. Аналитическая динамика твердого тела. М, 1977.

〔8〕 Горр Г В, Кудряшова Л В, Степанова ЛА. Классические задачи динамики твердого тела. Киев:Наукова думка, 1978.

〔9〕 Лурье А И. Аналитическая механика. М: ГИФМЛ, 1961.

〔10〕 梅凤翔. 分析力学专题. 北京：北京工业学院出版社，1988.

〔11〕 梅凤翔，刘桂林. 分析力学基础. 西安：西安交通大学出版社，1987.

〔12〕 梅凤翔，刘桂林. 非线性非完整系统的相对运动动力学. 北京工业学院学报，1,1986.

〔13〕 Киргетов ВИ. Об уравнениях движения управляемых механических систем. П. М. М, Т. 28, Вып. 2, 1964.

〔14〕 梅凤翔. 可控力学系统的 Jourdain 原理和 Nielsen 方程. 北京工业学院学报，2,1983.

〔15〕 Appell P. Traité de mécanique rationnelle, T. 2, Paris: Gauthier-Villars, 1953.

〔16〕 Mei Fengxiang. Nouvelles équations du mouvement des systèmes mécaniques non holonomes. Thèse d'Etat, Nantes: ENSM, Mai 1982.

〔17〕 Румянцев В В. Труды IV Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механики. Киев: Наукова Думка, 1978.

〔18〕 梅凤翔. 关于有约束的受迫运动的控制问题. 北京工业学院学报, 5,1988.

〔19〕 吴镇. 分析力学, 上海: 上海交通大学, 1984.

〔20〕 史荣昌, 梅凤翔. 非完整力学系统的打击问题. 北京工业学院学报, 1,1986.

〔21〕 Карагодин В М. Теоретические основы механики тела переменного состава. М: Оборонгиз, 1963.

〔22〕 Новоселов В С. Движение механических систем со связями зависящими от процесса изменения массы. Вести. ЛГУ, 1, 1960.

〔23〕 梅凤翔. 关于变质量非完整系统的 Hamilton 原理. 北京工业学院学报, 4,1984.

〔24〕 梅凤翔. 非完整动力学研究. 北京:北京工业学院出版社,1987.

〔25〕 Новоселов В С. Уравнения движения нелинейных неголономных систем с переменными массами. Вести. ЛГУ, 7, 1959.

〔26〕 梅凤翔. 变质量非完整力学系统的广义 Nielsen 方程. 兵工学报, 3,1983.

〔27〕 Мартыненко Ю Г. Аналитическая динамика электромеханических систем. М: МЭИ, 1984.

〔28〕 Synge J L. Classical dynamics. Berlin: S-V, 1960.

〔29〕 梅凤翔. 事件空间中非完整保守系统的广义 Ценов 方程. 兵工学报, 4,1988.

〔30〕 Румянцев В В. К динамике Лагранжевых реономных систем со связями. П. М. М., Т. 48, Вып. 4, 1984.

〔31〕 Mei Fengxiang. Parametric equations of nonholonomic nonco-

nservative systems in the event space and their integration method. Acta Mechanica Sinica, Vol. 6, No3, 1990.

〔32〕 Галиуллин А С. Методы решения обратных задач динамики, М:Наука, 1986.

〔33〕 Еругин Н П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую. П. М. М. , Т. 16, Вып. 2, 1952.

〔34〕 Кильчевский Н А, Кильчинская ГА, Ткаченко НЕ. Аналитическая механика континуальных систем. Киев: Наукова думка, 1979.

〔35〕 陈至达。有理力学。北京：中国矿业大学出版社，1988。

〔36〕 Зубов В И. Аналитическая динамика системы тел. Л: ЛГУ, 1983.

〔37〕 罗绍凯。相对论性分析力学理论。教材通讯，5,1987。

〔38〕 Лобас Л Г. Неголономные модели колесных экипажей, Киев:Наукова думка, 1986.

第五章　分析力学方程的积分方法

在前几章中，我们建立了完整系统和非完整系统各种形式的动力学方程。然而，动力学方程的积分问题却是一个一直需要研究的课题。如何千方百计地去寻找较多的动力学方程的积分，以及如何更好地利用这些积分，成为数学、力学家们努力的重要目标。对于完整保守力学系统，已经取得了一些十分美妙的结果，但一般的非保守系统，尤其是非完整系统的积分理论还不十分完善，还有待于进一步充实和发展。

本章着重介绍利用已知积分降阶动力学方程的方法；Hamilton 正则方程的积分理论，即 Poisson 定理及应用，正则变换，Hamilton-Jacobi 方法；积分动力学方程的场方法；Noether 定理以及积分不变量等问题。

§5.1　动力学方程的降阶方法

寻找动力学方程组的第一积分对解决动力学问题来说是很重要的，而循环积分和广义能量积分则在动力学方程组的第一积分中占特别重要的地位。本节着重介绍循环积分和广义能量积分，以及应用循环积分和广义能量积分降阶动力学方程的方法。

5.1.1 循环积分和广义能量积分

1. 运动方程的第一积分

我们研究一个动力学系统，它的运动可用 n 个微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}=X_k(x_1,\cdots,x_n,t),\qquad (k=1,\cdots,n)\qquad (5.1.1)$$

来描述。

定义1 若函数 $f(x_1,\cdots,x_n,t)$ 满足条件

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}X_k\frac{\partial f}{\partial x_k}=0 \tag{5.1.2}$$

则关系

$$f(x_1,\cdots,x_n,t)=C=\text{const}. \tag{5.1.3}$$

称为运动的第一积分，或称首次积分。

2. 完整系统的循环积分

设有 n 个自由度的完整系统，其运动由方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0, \qquad (k=1,\cdots,n) \tag{5.1.4}$$

来描述，其中 $q_1,\cdots,q_n$ 是广义坐标，其 Lagrange 函数为

$$L=L(q_1,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_n,t)$$

如果函数 L 不显含某个广义坐标 q_r $(1\leqslant r\leqslant n)$，即有

$$\frac{\partial L}{\partial q_r}=0, \qquad (1\leqslant r\leqslant n) \tag{5.1.5}$$

则称 q_r 为系统的一个循环坐标。

当 q_r 是系统的循环坐标时，考虑到方程（5.1.4），我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}=0$$

积分上式有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}=\beta_r \tag{5.1.6}$$

显然，式（5.1.6）是运动的第一积分，这个积分称为循环积分。

必须注意，存在或不存在循环积分依赖于广义坐标的选取[1]。注意到广义动量定义为

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \tag{5.1.7}$$

因此，循环积分就是与循环坐标相应的广义动量守恒积分。

下面我们来阐明循环积分的物理意义。

首先，假定循环坐标 q_1 有这样的性质：当其余坐标 $q_2,\cdots,q_n$ 保持不变时，q_1 改变一个量 l 相应于系统平移一线段 l。取这个移动方向为轴 ox 的方向，则有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}=\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_1}+\dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_1}+\dot{z}_i\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_1}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{x}_i=C_1$$

因此，如果循环坐标的改变相应于系统在某方向的平移，那么，相应的循环积分表示系统动量在此方向上的投影守恒。

其次，我们假定循环坐标改变一量 α 相应于整个系统绕空间中某固定直线转一角度 α。取此空间固定直线作为轴 oz，并设

$$x_i=r_i\cos\varphi_i,\quad y_i=r_i\sin\varphi_i,\quad (i=1,\cdots,N)$$

我们得到

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_1}=\frac{\partial x_i}{\partial \varphi_i}=-r_i\sin\varphi_i,\ \frac{\partial y_i}{\partial q_1}=\frac{\partial y_i}{\partial \varphi_i}=r_i\cos\varphi_i,\frac{\partial z_i}{\partial q_1}=0$$

因此

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\sum_{i=1}^{N} m_i\,(x_i\dot{y}_i-\dot{x}_i y_i)=C_1$$

这一表达式的左边乃是系统相对于 oz 轴的动量矩。那么，相应的循环积分就表示系统相对于该直线的动量矩守恒。

3. 完整系统的广义能量积分

广义能量积分在动力学及许多物理问题的研究中起重要的作用。

假设系统是完整的，其运动由方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=Q_k,\qquad (k=1,2,\cdots,n)\qquad (5.1.8)$$

来描述。

命题1 若完整力学系统（5.1.8）满足下列条件：

（1）Lagrange 函数不显含时间 t，即

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0 \tag{5.1.9}$$

（2）非势力是陀螺力或不存在，即

$$\sum_{k=1}^{n}Q_k\dot{q}_k=0 \tag{5.1.10}$$

则系统存在广义能量积分

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k-L=h \tag{5.1.11}$$

其中 h 为任意常数。

〔证明〕 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k-L\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}\right]\dot{q}_k-\frac{\partial L}{\partial t}$$

将方程（5.1.8)代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k-L\right)=\sum_{k=1}^{n}Q_k\dot{q}_k-\frac{\partial L}{\partial t}$$

显然，只要满足式（5.1.9)、(5.1.10)，必有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k-L\right)=0$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k-L=h$$

推论 1 对于完整、保守、稳定的力学系统来说，系统的机械能守恒。

〔证明〕 对于保守系统来说，$Q_k=0$。又系统是稳定的[26]，即$\frac{\partial L}{\partial t}=0$，并且动能 T 是广义速度的齐二次形式，而势能仅依

赖于广义坐标。这时，由命题1知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k-L=2T-(T-V)=T+V=h \qquad \|$$

推论2 如果系统是完整、保守、半不稳定的力学系统，则系统存在Jacobi—Painlevé积分。

〔证明〕 此时 $Q_k=0$，$\frac{\partial L}{\partial t}=0$，但 $T=T_2+T_1+T_0$[26]。由命题1知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k-L=2T_2+T_1-(T_2+T_1+T_0-V)=T_2-T_0-V=h \quad \|$$

4. 非完整系统的循环积分

因为对非完整系统来说，运动方程一般不具有式（5.1.4）的形式，因此即便 q_1 是循环坐标，也不能导出形如式（5.1.6）的循环积分。对非完整系统，循环积分仅在如下情况中才能得到：即除了 q_k 是循环坐标以外，在相应的方程中还不存在补充的非完整项，也就是说第 k 个广义坐标的运动方程可写成第二类Lagrange方程（5.1.4）的形式。而这只有在满足特定的条件下才能实现。下面我们来求这个条件。

假设非完整系统的广义力是有势的，系统受 g 个一阶线性齐次定常的约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\dot{q}_{\sigma}, \qquad (\beta=1,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g) \tag{5.1.12}$$

其中 $B_{\varepsilon+\beta,\sigma}$ 不依赖于 $q_{\varepsilon+\gamma}$，并且 L 亦不依赖于 $q_{\varepsilon+\gamma}$。系统的运动可用形如式（3.1.89）的Чаплыгин方程来描述，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}\right)\dot{q}_\nu$$

$$=0, \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{5.1.13}$$

其中 L 为 Lagrange 函数，它不计及非完整约束（5.1.12）。$\tilde{L}$ 为 L 借助关系（5.1.12）消去不独立的广义速度 $\dot{q}_{\varepsilon+1},\cdots,\dot{q}_n$ 之后所得到的函数。不失一般性，为使式（5.1.13）在 $\sigma=1$ 时取第二类 Lagrange 方程的形式，其充分条件是满足

$$\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_1}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,1}}{\partial q_\nu}=0,\qquad (\beta=1,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g;\ \nu=1,\cdots,\varepsilon)\qquad(5.1.14)$$

借助表达式

$$u_{\varepsilon+\beta}=\int_{q_{10}}^{q_1}B_{\varepsilon+\beta,1}\mathrm{d}q_1$$

其中 q_{10} 为任意常数，可引出函数 $u_{\varepsilon+\beta}=u_{\varepsilon+\beta}(q_1,\cdots,q_\varepsilon)$。利用式（5.1.14），我们有

$$\frac{\partial u_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\nu}=\int_{q_{10}}^{q_1}\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,1}}{\partial q_\nu}\mathrm{d}q_1=\int_{q_{10}}^{q_1}\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1$$

$$=B_{\varepsilon+\beta,\nu}(q_1,q_2,\cdots,q_\varepsilon)-B_{\varepsilon+\beta,\nu}(q_{10},q_2,\cdots,q_\varepsilon)$$

或

$$B_{\varepsilon+\beta,\nu}=\frac{\partial u_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\nu}+B_{\varepsilon+\beta,\nu}(q_{10},q_2,\cdots,q_\varepsilon)$$

将此表达式代入式(5.1.12)，得到

$$\mathrm{d}q_{\varepsilon+\beta}=\mathrm{d}u_{\varepsilon+\beta}+\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\nu}(q_{10},q_2,\cdots,q_\varepsilon)\mathrm{d}q_\nu\qquad(5.1.15)$$

这便是所求的特定条件。于是有下述命题。

命题 2 如果在非完整约束方程（5.1.12）中可分出某个函数的全微分以使剩下的微分关系中不包含坐标 q_1，那么非完整系统的运动方程（5.1.13）对坐标 q_1 可写成第二类 Lagrange 方程的形式。

由此可知，对于坐标 q_1，只有当命题 2 成立，并且 $\dfrac{\partial\tilde{L}}{\partial q_1}=0$ 时，才存在循环积分 $\dfrac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_1}=C_1$。

5. 非完整系统的广义能量积分

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_1,\cdots,q_n$ 确定，并受到 g 个理想一阶非线性非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0, \qquad (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n) \qquad (5.1.16)$$

系统的运动由 Routh 方程来描述

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q''_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}, \qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (5.1.17)$$

其中 Q''_s 为非势广义力。对此系统，我们有如下命题。

命题3 如果一阶非线性非完整系统满足下列条件：

（1）Lagrange 函数不显含时间；

（2）非势力是陀螺力或不存在；

（3）非完整约束对广义速度是 k_β 阶齐次的，即

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=k_\beta f_\beta \qquad (k_\beta\text{为齐次性阶}) \qquad (5.1.18)$$

那么，此系统存在广义能量积分

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L=h \qquad (5.1.19)$$

〔证明〕 类似命题1的证明，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L\right)=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}\right)\dot{q}_s-\frac{\partial L}{\partial t}$$

将式（5.1.17）代入上式有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L\right)=\sum_{s=1}^{n}Q''_s\dot{q}_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-\frac{\partial L}{\partial t}$$

显然，当（1）、（2）、（3）这三个条件满足时，考虑到式（5.1.16），上式右边成为零，命题得证。

当系统是完整系统时，命题3蜕化为命题1。

设非完整约束方程表为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t),\qquad \begin{pmatrix}\beta=1,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g;\\ \sigma=1,\cdots,\varepsilon;\ s=1,\cdots,n\end{pmatrix}$$

(5.1.20)

则系统的运动可由广义 Чаплыгин 方程[1]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial\dot{q}_\sigma}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma''$$

$$(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\qquad(5.1.21)$$

来描述。类似命题3的证明，我们可以得到下述命题。

命题4[1] 假如非完整系统（5.1.20）满足下列条件

（1）Lagrange 函数不显含时间；

（2）非势力是陀螺力或不存在；

（3）$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 相对 $\dot{q}_\sigma(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)$ 是一阶齐次函数，即

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma\qquad(5.1.22)$$

则系统存在能量积分

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma-\tilde{L}=h\qquad(5.1.23)$$

例1 Appell-Hamel 例

约束方程为 $\dot{z}=\frac{b}{a}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2}$ Lagrange 函数

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz,Q_\sigma''=0,(\sigma=1,2)$$

因此，满足命题4的条件，故存在能量积分

$$\frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\frac{b^2}{a^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)\right]+mgz=h\qquad\|$$

假设非完整系统的运动受有 g 个理想 m 阶非完整约束

$$\overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta\left(q_s,\dot{q}_s,\cdots\overset{(m-1)}{q}_s,\ \overset{(m)}{q}_\sigma,\ t\right)$$
$$\begin{pmatrix}\beta=1,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g;\\ \sigma=1,\cdots,\varepsilon;\ s=1,\cdots,n\end{pmatrix}\tag{5.1.24}$$

系统的运动方程可表为 Maggi 形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}-\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\right)$$
$$\times\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\overset{(m)}{q}_\sigma}=\tilde{Q}''_\sigma,\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\tag{5.1.25}$$

可以证明，我们有如下命题。

命题 5[2] 若高阶非完整系统满足下列条件：

（1）Lagrange 函数不显含时间；

（2）非势广义力是陀螺力或不存在；

（3）非完整约束（5.1.24）满足

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\overset{(m)}{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma=\dot{q}_{\varepsilon+\beta}\tag{5.1.26}$$

则此系统存在广义能量积分

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_s-L=h\tag{5.1.27}$$

5.1.2 完整系统的 Routh 方程和 Whittaker 方程

1. 利用循环积分的 Routh 方程

Routh 于1877年提出应用循环积分，将 Lagrange 方程降阶的方法[3]，既达到降阶的目的，又能使动力学方程仍保持 Lagrange 方程的形式。为此他获得了剑桥大学授予的 Adam 奖。

假设 $q_1,\cdots,q_r$（$1\leqslant r<n$）是循环坐标，即系统的 Lagrange 函数表示为

$$L=L(q_{r+1},\ \cdots,\ q_n,\ \dot{q}_1,\ \cdots,\ \dot{q}_r,\ \dot{q}_{r+1},\ \cdots,\ \dot{q}_n,\ t)$$

于是由 $L=T-V$ 知，循环积分是广义速度的线性式，即

$$\beta_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=a_{i1}\dot{q}_1+\cdots+a_{ir}\dot{q}_r+a_{ir+1}\dot{q}_{r+1}+\cdots+a_{in}\dot{q}_n \tag{5.1.28}$$

其中各 a_{ij} 仅是 $q_{r+1},\ \cdots,\ q_n,\ t$ 的函数。假定行列式

$$\left|\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right|=|a_{ij}|\neq 0,\qquad (i,\ j=1,\ \cdots,\ r)$$

那么，我们由式（5.1.28）解出 $\dot{q}_1,\ \cdots,\ \dot{q}_r$ 作为 $\beta_1,\cdots,\beta_r,\dot{q}_{r+1},\cdots,\dot{q}_n,\ t$ 的函数

$$\dot{q}_i=f_i(\beta_1,\ \cdots\beta_r,\ \dot{q}_{r+1},\ \cdots,\ \dot{q}_n,\ t),\qquad (i=1,\ \cdots,\ r) \tag{5.1.29}$$

现在定义

$$R=L-\sum_{i=1}^{r}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} \tag{5.1.30}$$

为Routh函数。应用式（5.1.29）可将 R 中所有 $\dot{q}_1,\ \cdots,\ \dot{q}_r$ 全部消去。取Routh函数的等时变分，有

$$\delta R=\sum_{i=r+1}^{n}\frac{\partial R}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{i=r+1}^{n}\frac{\partial R}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial R}{\partial\beta_i}\delta\beta_i \tag{5.1.31}$$

其次取式（5.1.30）的等时变分，并利用式（5.1.28），有

$$\begin{aligned}\delta R=&\sum_{i=r+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i+\sum_{i=r+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\\&-\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i-\sum_{i=1}^{r}\dot{q}_i\delta\beta_i=\sum_{i=r+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\\&+\sum_{i=r+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i-\sum_{i=1}^{r}\dot{q}_i\delta\beta_i\end{aligned} \tag{5.1.32}$$

比较式（5.1.31）、（5.1.32）后，有

$$\frac{\partial R}{\partial q_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i},\quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},\qquad (i=r+1,\cdots,n) \tag{5.1.33}$$

和

$$\dot{q}_i=-\frac{\partial R}{\partial \beta_i},\qquad (i=1,\cdots,r) \tag{5.1.34}$$

将式（5.1.33）代入 Lagrange 方程（5.1.4），有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial R}{\partial q_i}=0,\qquad (i=r+1,\cdots,n) \tag{5.1.35}$$

这就是完整系统的 Routh 方程。它的形式与 Lagrange 方程形式一致，但只剩下 $n-r$ 个二阶微分方程。与原 n 个自由度的 Lagrange 方程比较，减少了 r 个二阶微分方程，达到了降阶的目的。式（5.1.34）可用来求出 $q_1,\cdots,q_r$ 为时间 t 的函数。只要把式（5.1.34）两端积分，就有

$$q_i=-\int\frac{\partial R}{\partial \beta_i}\mathrm{d}t,\qquad (i=1,\cdots,r) \tag{5.1.36}$$

2．利用能量积分的 Whittaker 方程

1904 年 Whittaker 利用能量积分将完整保守系统的动力学问题缩减为带有较少自由度的问题，并得到著名的 Whittaker 方程。

由命题 1 的推论 2 知，当完整系统的 Lagrange 函数不显含时间 t，即为半不稳定系统时，系统存在广义能量积分

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=h \tag{5.1.37}$$

我们可取任一个广义坐标，例如 q_1，来代替 t 的作用。令

$$q_r'=\frac{\mathrm{d}q_r}{\mathrm{d}q_1},\qquad (r=2,\cdots,n) \tag{5.1.38}$$

则

$$\dot{q}_r=\frac{\mathrm{d}q_r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}q_r}{\mathrm{d}q_1}\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}=q_r'\dot{q}_1 \tag{5.1.39}$$

设

$$\Omega(\dot{q}_1, q'_r, q_s) = L(\dot{q}_1, q'_r\dot{q}_1, q_s)$$
$$(r=2, \cdots, n; \quad s=1, \cdots, n) \tag{5.1.40}$$

将上式两端分别对 $\dot{q}_1$, q'_r 和 q_s 求导数，得

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + \sum_{r=2}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + \sum_{r=2}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1}$$
$$= \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \frac{\dot{q}_s}{\dot{q}_1} \tag{5.1.41}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q'_r} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_1, \qquad (r=2, \cdots, n) \tag{5.1.42}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_s} = \frac{\partial L}{\partial q_s}, \qquad (s=1, \cdots, n) \tag{5.1.43}$$

现在利用能量积分式（5.1.37）和（5.1.39），解出 $\dot{q}_1$，可得到

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_1(q'_r, q_s) \tag{5.1.44}$$

考虑到式（5.1.40）和（5.1.41），能量积分可写成如下形式

$$\dot{q}_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} - \Omega = h \tag{5.1.45}$$

其中 $\dot{q}_1$ 由式（5.1.44）确定。微分式（5.1.45），我们有

$$\dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r} + \dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \partial q'_r} - \frac{\partial \Omega}{\partial q'_r} = 0 \tag{5.1.46}$$

$$\dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_s} + \dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \partial q_s} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_s} = 0 \tag{5.1.47}$$

令

$$W(q'_r, q_s) = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} \tag{5.1.48}$$

为 Whittaker 函数。对上式微分有

$$\frac{\partial W}{\partial q'_r} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \partial q'_r} \tag{5.1.49}$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_s}=\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_s}+\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \partial q_s} \tag{5.1.50}$$

比较式（5.1.46）与（5.1.49），得

$$\frac{\partial W}{\partial q'_r}=\frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial \Omega}{\partial q'_r} \tag{5.1.51}$$

比较式（5.1.47）式（5.1.50），得

$$\frac{\partial W}{\partial q_s}=\frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial \Omega}{\partial q_s} \tag{5.1.52}$$

考虑到式（5.1.42）和（5.1.43），我们得到

$$\frac{\partial W}{\partial q'_r}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r},\quad \frac{\partial W}{\partial q_s}=\frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial L}{\partial q_s}$$

$$(r=2,\cdots,n;\ s=1,\cdots,n) \tag{5.1.53}$$

将式（5.1.53）代入 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial L}{\partial q_r}=0,\qquad (r=2,\cdots,n) \tag{5.1.54}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W}{\partial q'_r}-\dot{q}_1\frac{\partial W}{\partial q_r}=0,\qquad (r=2,\cdots,n) \tag{5.1.55}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_1}\frac{\partial W}{\partial q'_r}-\frac{\partial W}{\partial q_r}=0,\qquad (r=2,\cdots,n) \tag{5.1.56}$$

这就是 Whittaker 方程。W 中只包含 $q'_2,\cdots,q'_n,q_2,\cdots,q_n,q_1$，其中 q_1 为相当于时间 t 的独立变数。方程（5.1.56）只有 $n-1$ 个二阶微分方程，从而达到了降阶的目的。

5.1.3 非完整系统方程的降阶方法

1. 利用循环积分降阶 Чаплыгин 方程

这里将 Routh 方程推广到非完整系统，研究在一定条件下利用非完整系统的循环积分降阶非完整系统 Чаплыгин 方程的问题[5]。

考虑广义力是有势的非完整系统，受有 g 个一阶线性齐次定

常的非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}(q_\nu)\dot{q}_\sigma$$

$$(\beta=1,\cdots,g;\quad \varepsilon=n-g;\quad \nu=1,\cdots,\varepsilon)\qquad(5.1.57)$$

当 Lagrange 函数也不依赖于 $q_{\varepsilon+\beta}$ 时，我们称此系统为Чаплыгин 系统。系统的运动方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_\nu=0$$

$$(5.1.58)$$

其中

$$\tilde{L}(q_\sigma,\dot{q}_\sigma,t)=L(q_\sigma,\dot{q}_\sigma,\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\dot{q}_\sigma,t),\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)$$

假设 $q_1,\cdots,q_k(k\leqslant\varepsilon)$ 是循环坐标，即

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_r}=0,\qquad(r=1,\cdots,k)$$

定义 Routh 函数为

$$\tilde{R}=\tilde{L}-\sum_{i=1}^{k}\beta_i\dot{q}_i\qquad(5.1.59)$$

先由下面 k 个方程

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_i}=\beta_i,\qquad(i=1,\cdots,k)\qquad(5.1.60)$$

将 $\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_k$ 解出，把它们表示为 $q_{k+1},\cdots,q_\varepsilon;\ \dot{q}_{k+1},\cdots,\dot{q}_\varepsilon;\ \beta_1,\cdots,\beta_k;\ t$ 的函数，从而消去对应循环坐标的各 $\dot{q}_i(i=1,\cdots,k)$。通过类似完整系统 Routh 方法的步骤，可以证明

$$\frac{\partial\tilde{R}}{\partial q_i}=\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_i},\quad \frac{\partial\tilde{R}}{\partial\dot{q}_i}=\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_i},\qquad(i=k+1,\cdots,\varepsilon)\ (5.1.61)$$

以及

$$\dot{q}_i=-\frac{\partial\tilde{R}}{\partial\beta_i},\qquad(i=1,\cdots,k)\qquad(5.1.62)$$

将式（5.1.61）代入Чаплыгин 方程（5.1.58）中，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \tilde{R}}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left[\sum_{\nu=1}^{k}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_\nu\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=k+1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_\nu\right]=0,$$

$$(\varepsilon=n-g;\ \sigma=k+1,\ \cdots,\ \varepsilon)\quad (5.1.63)$$

欲对循环坐标 q_1, …, q_k 存在循环积分，由式（5.1.14）知，必须满足

$$\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\alpha}}{\partial q_i}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,i}}{\partial q_\alpha}=0,\qquad (i=1,\ \cdots,\ k;\ \alpha=1,\ \cdots,\ \varepsilon)$$

$$(5.1.64)$$

当然更有

$$\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}=-\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}\right)=0$$

$$(\nu=1,\ \cdots,\ k;\ \sigma=k+1,\ \cdots,\ \varepsilon)\quad (5.1.65)$$

注意到式（5.1.65），则方程（5.1.63）成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \tilde{R}}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\nu=k+1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_\nu$$

$$=0,\qquad (\sigma=k+1,\ \cdots,\ \varepsilon)\quad (5.1.66)$$

下面进一步研究 $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}$ 这一项。我们有

$$L=T_2+T_1+T_0-V$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{ks}\dot{q}_k\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}B_s\dot{q}_s+T_0-V$$

其中

$$A_{ks}=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s};\quad B_s=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

$$T_0=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

因此

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}=\sum_{s=1}^{n} A_{s,\varepsilon+\beta}\dot{q}_s+B_{\varepsilon+\beta}$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} A_{\sigma,\varepsilon+\beta}\dot{q}_\sigma+\sum_{\gamma=1}^{g} A_{\varepsilon+\gamma,\varepsilon+\beta}\dot{q}_{\varepsilon+\gamma}+B_{\varepsilon+\beta}$$

考虑到非完整约束（5.1.57），则

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big(A_{\sigma,\varepsilon+\beta}\dot{q}_\sigma+\sum_{\gamma=1}^{g} A_{\varepsilon+\gamma,\varepsilon+\beta}B_{\varepsilon+\gamma,\sigma}\Big)\dot{q}_\sigma+B_{\varepsilon+\beta} \quad (5.1.67)$$

在前面，我们已经由式（5.1.60）解出

$$\dot{q}_i=\dot{q}_i(q_{k+1},\cdots,q_\varepsilon,\dot{q}_{k+1},\cdots,\dot{q}_\varepsilon,\beta_1,\cdots,\beta_k,t)$$

$$(i=1,\cdots,k) \quad (5.1.68)$$

因为我们研究的是Чаплыгин系统，所以Lagrange函数 L 和 $B_{\varepsilon+\beta,\sigma}$ 均与 $q_{\varepsilon+\beta}$ 无关。假设 $B_{\varepsilon+\beta,\sigma}$ 中亦不含 $q_1,\cdots,q_k$，那么由

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_r}=\frac{\partial L}{\partial q_r}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_r}\dot{q}_\sigma, \quad (r=1,\cdots,k)$$

并考虑到假设，我们有

$$\frac{\partial L}{\partial q_r}=0, \quad (r=1,\cdots,k) \quad (5.1.69)$$

将式（5.1.68）代入式（5.1.67）中，并考虑到假设和式（5.1.69），有

$$\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\Big)^*=\sum_{\sigma=1}^{k}[A_{\sigma,\varepsilon+\beta}(q_{k+1},\cdots,q_\varepsilon,t)+\sum_{\gamma=1}^{g}A_{\varepsilon+\gamma,\varepsilon+\beta}(q_{k+1},$$

$$\cdots,q_\varepsilon,t)\cdot B_{\varepsilon+\gamma,\sigma}(q_{k+1},\cdots,q_\varepsilon)]$$

$$\times\dot{q}_\sigma(q_{k+1},\cdots,q_\varepsilon,\dot{q}_{k+1},\cdots,\dot{q}_\varepsilon,\beta_1,\cdots,\beta_k,t)$$

$$+\sum_{\sigma=k+1}^{\varepsilon}[A_{\sigma,\varepsilon+\beta}(q_{k+1},\cdots,q_\varepsilon,t)+\sum_{\gamma=1}^{g}A_{\varepsilon+\gamma,\varepsilon+\beta}(q_{k+1},$$

$$\cdots,q_\varepsilon,t)B_{\varepsilon+\gamma,\sigma}(q_{k+1},\cdots,q_\varepsilon)]\dot{q}_\sigma$$

$$+B_{\varepsilon+\beta}(q_{k+1},\cdots,q_\varepsilon,t) \quad (5.1.70)$$

可见式（5.1.70）与循环坐标 $q_1,\cdots,q_k$ 无关，将式（5.1.68）

代到式（5.1.66）中，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\widetilde{R}}{\partial\dot{q}_{\sigma}}-\frac{\partial\widetilde{R}}{\partial q_{\sigma}}+\sum_{\beta=1}^{g}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\epsilon+\beta}}\right]^{*}\sum_{\nu=k+1}^{\epsilon}\left(\frac{\partial B_{\epsilon+\beta,\nu}}{\partial q_{\sigma}}-\frac{\partial B_{\epsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_{\nu}}\right)\dot{q}_{\nu}=0,\qquad(\sigma=k+1,\cdots,\epsilon)$$

（5.1.71）

这样，在我们要求的严格条件下，利用 k 个循环积分，将 ϵ 个 Чаплыгин 方程降为 $\epsilon-k$ 个。降阶后的方程形式完全同于降阶前的方程。这 $\epsilon-k$ 个微分方程完全独立于循环坐标和非完整约束。对于事件空间的 Чаплыгин 方程也有类似的降阶方法[6]。

例 2 一力学系统受有一阶线性齐次定常的非完整约束

$$\dot{q}_4=\dot{q}_1+\dot{q}_2\sin q_3+\dot{q}_3\sin q_2 \qquad (a)$$

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2+\dot{q}_4^2)$$

势能为

$$V=g(q_2+q_3)$$

此系统的 Lagrange 函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2+\dot{q}_4^2)-g(q_2+q_3) \qquad (b)$$

因为约束方程（a）和 Lagrange 函数（b）均不含 q_4，故此系统是 Чаплыгин 系统。将式（a）代入式（b）中，得

$$\widetilde{L}=\frac{1}{2}[2\dot{q}_1^2+(1+\sin^2q_3)\dot{q}_2^2+(1+\sin^2q_2)\dot{q}_3^2+2\dot{q}_1\dot{q}_2\sin q_3+2\dot{q}_1\dot{q}_3\sin q_2+2\dot{q}_2\dot{q}_3\sin q_2\sin q_3]-g(q_2+q_3) \qquad (c)$$

显然

$$\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial q_1}=0$$

即 q_1 是循环坐标。约束方程与 L 中均不含 q_1，容易验证满足条件（5.1.64），故存在循环积分

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_1}=\beta_1$$

即

$$2\dot{q}_1+\dot{q}_2\sin q_3+\dot{q}_3\sin q_2=\beta_1 \tag{d}$$

由式（d）解出 $\dot{q}_1$，有

$$\dot{q}_1=\frac{1}{2}(\beta_1-\dot{q}_2\sin q_3-\dot{q}_3\sin q_2) \tag{e}$$

Routh 函数为

$$\begin{aligned}\tilde{R}&=\tilde{L}-\beta_1\dot{q}_1\\&=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{2}\sin^2 q_3\right)\dot{q}_2^2+\left(1+\frac{1}{2}\sin^2 q_2\right)\dot{q}_3^2+\dot{q}_2\dot{q}_3\sin q_2\sin q_3\right.\\&\quad\left.+\beta_1\dot{q}_2\sin q_3+\beta_1\dot{q}_3\sin q_2-\frac{1}{2}\beta_1^2\right]-g(q_2+q_3)\end{aligned}$$

又

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_4}\right)^*=\frac{1}{2}(\beta_1+\dot{q}_2\sin q_3+\dot{q}_3\sin q_2)$$

方程（5.1.71）给出系统降阶后的方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial \tilde{R}}{\partial q_j}+\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_4}\right)^*\sum_{l=2}^{3}\left(\frac{\partial B_{4l}}{\partial q_j}-\frac{\partial B_{4j}}{\partial q_l}\right)\dot{q}_l=0 \tag{f}$$

将已知各项代入方程（f），并计算得

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{2}\sin^2 q_3\right)\ddot{q}_2+\frac{1}{2}\ddot{q}_3\sin q_2\sin q_3+\frac{1}{2}\dot{q}_2\dot{q}_3(\cos q_2\\&\qquad+\cos q_3)\sin q_3+g=0\\&\left(1+\frac{1}{2}\sin^2 q_2\right)\ddot{q}_3+\frac{1}{2}\ddot{q}_2\sin q_2\sin q_3+\frac{1}{2}\dot{q}_2\dot{q}_3(\cos q_2\\&\qquad+\cos q_3)\sin q_2+g=0\end{aligned} \tag{g}$$

这就是降阶后的运动微分方程。而 q_1 可由对式（5.1.62）的积分求得。

2. 一阶非完整系统的广义 Whittaker 方程

设一阶非线性非完整系统是 Чаплыгин 系统，即 Lagrange

函数和非完整约束均不含 $q_{\varepsilon+\beta}$。再设 Lagrange 函数和非完整约束均不显含 t，则此系统的约束方程和运动方程分别为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_{\beta}(\dot{q}_{\sigma},q_{\sigma}),\qquad(\beta=1,\cdots,g;\ \ \varepsilon=n-g;\ \ \sigma=1,\cdots,\varepsilon)\tag{5.1.72}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_{\sigma}}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_{\sigma}}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial\dot{q}_{\sigma}}-\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial q_{\sigma}}\right)=0\tag{5.1.73}$$

其中

$$\tilde{L}(q_{\sigma},\dot{q}_{\sigma})=L(q_{\sigma},\dot{q}_{\sigma},\varphi_{\beta}(\dot{q}_{\sigma},q_{\sigma})),\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)$$

令

$$\dot{q}_{\nu}=\dot{q}_{\varepsilon}q'_{\nu},\quad q'_{\nu}=\frac{\mathrm{d}q_{\nu}}{\mathrm{d}q_{\varepsilon}},\qquad(\nu=1,\cdots,\varepsilon-1)\tag{5.1.74}$$

并设

$$\Omega(q'_{\nu},\dot{q}_{\varepsilon},q_{\sigma})=\tilde{L}(q'_{\nu}\dot{q}_{\varepsilon},\dot{q}_{\varepsilon},q_{\sigma})\tag{5.1.75}$$

如果 φ_{β} 是相对于 $\dot{q}_{\sigma}$ 的一阶齐次函数，即

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial\dot{q}_{\sigma}}\dot{q}_{\sigma}-\varphi_{\beta}=0\tag{5.1.76}$$

那么由5.1.1节命题 4 知，存在能量积分

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\dot{q}_{\sigma}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_{\sigma}}-\tilde{L}=h\tag{5.1.77}$$

由式（5.1.74）和（5.1.77）可解出 $\dot{q}_{\varepsilon}$

$$\dot{q}_{\varepsilon}=\dot{q}_{\varepsilon}(q'_{\nu},q_{\sigma})\tag{5.1.78}$$

令

$$L^{*}(q'_{\nu},q_{\sigma})=\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{q}_{\varepsilon}}\tag{5.1.79}$$

类似于完整系统 Whittaker 方程的推导，可得到

$$\frac{\partial L^{*}}{\partial q'_{\nu}}=\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_{\nu}},\quad\frac{\partial L^{*}}{\partial q_{\sigma}}=\frac{1}{\dot{q}_{\varepsilon}}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_{\sigma}},$$
$$(\nu=1,\cdots,\varepsilon-1;\qquad\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\tag{5.1.80}$$

现在令

$$\omega_\beta(q'_\nu,\ \dot{q}_\varepsilon,\ q_\sigma)=\varphi_\beta(q'_\nu\dot{q}_\varepsilon,\ \dot{q}_\varepsilon,\ q_\sigma) \tag{5.1.81}$$

$$\varphi^*_\beta(q'_\nu,\ q_\sigma)=\frac{\partial\omega_\beta}{\partial\dot{q}_\varepsilon} \tag{5.1.82}$$

则关系式（5.1.76）可写成

$$\dot{q}_\varepsilon\frac{\partial\omega_\beta}{\partial\dot{q}_\varepsilon}-\omega_\beta=0 \tag{5.1.83}$$

将式（5.1.82）和（5.1.83）微分并比较所得关系，得到

$$\frac{\partial\varphi^*_\beta}{\partial q'_\nu}=\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\nu},\quad \frac{\partial\varphi^*_\beta}{\partial q_\sigma}=\frac{1}{\dot{q}_\varepsilon}\ \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma},$$

$$(\nu=1,\ \cdots,\ \varepsilon-1;\qquad \sigma=1,\ \cdots,\ \varepsilon) \tag{5.1.84}$$

将式（5.1.80）和（5.1.84）代入方程（5.1.73）中，最终得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_\varepsilon}\ \frac{\partial L^*}{\partial q'_\nu}-\frac{\partial L^*}{\partial q_\nu}-\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)^*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_\varepsilon}\ \frac{\partial\varphi^*_\beta}{\partial q'_\nu}-\frac{\partial\varphi^*_\beta}{\partial q_\nu}\right)=0$$

$$(\nu=1,\ \cdots,\ \varepsilon-1) \tag{5.1.85}$$

其中$\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)^*$为用$q'_\nu$、$q_\sigma$表达的$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}$。方程（5.1.85）是根据能量积分降阶后的方程，称为一阶非完整系统的广义 Whittaker 方程。若系统是完整的，方程（5.1.85）便成为Whittaker 方程（5.1.56）。

例 3 一雪橇在水平面上滑动。雪橇质心C在平面上的投影与雪橇和平面的接触点相重合。令m和J分别表示雪橇质量和它相对质心的惯性矩。系统的位置由三个参数确定：质心的坐标x, y以及雪橇对称轴与固定轴ox间的夹角θ。力函数为$U=-\frac{1}{2}k^2\theta^2$, $k=\mathrm{const.}$。

系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}k^2\theta^2 \tag{a}$$

约束方程为

$$\dot{y}=\dot{x}\mathrm{tg}\theta \tag{b}$$

于是

$$\tilde{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2(1+\mathrm{tg}^2\theta)+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}k^2\theta^2$$

能量积分为

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(1+\mathrm{tg}^2\theta)+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}k^2\theta^2=h$$

由此得出

$$\dot{x}^2=\frac{2h-k^2\theta^2}{m(1+\mathrm{tg}^2\theta)+J\theta'^2},\quad \theta'=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} \qquad (c)$$

于是

$$\Omega=\frac{1}{2}\dot{x}^2[m(1+\mathrm{tg}^2\theta)+J\theta'^2]-\frac{1}{2}k^2\theta^2$$

$$L^*=\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{x}}=\pm\sqrt{2h-k^2\theta^2}\sqrt{m(1+\mathrm{tg}^2\theta)+J\theta'^2} \qquad (d)$$

$$\dot{y}^*=\frac{\partial(\dot{x}\mathrm{tg}\theta)}{\partial\dot{x}}=\mathrm{tg}\theta \qquad (e)$$

方程（5.1.85）给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L^*}{\partial\theta'}-\frac{\partial L^*}{\partial\theta}-\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right)^*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial\dot{y}^*}{\partial\theta'}-\frac{\partial\dot{y}^*}{\partial\theta}\right)=0 \qquad (f)$$

将式（d）、（e）代入方程（f）中，并化简得

$$J(2h-k^2\theta^2)\theta''+J[-(2h-k^2\theta^2)\mathrm{tg}\theta+k^2\theta^2]\theta'^2 +mk^2\theta(1+\mathrm{tg}^2\theta)=0$$

积分上式得

$$\theta'=\frac{1}{C\cos\theta}\sqrt{\frac{-k^2\theta^2+2h-mC^2}{J}} \qquad (g)$$

其中C是一常数。将式（g）代入式（c）中，得

$$\dot{x}=C\cos\theta \qquad (h)$$

由式（b）和（h），得

$$\dot{y}=C\sin\theta \qquad (i)$$

由式（g）和（h），得

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{-k^2\theta^2+2h-mC^2}{J}}$$

因此

$$\ddot{\theta}=-\frac{k^2}{J}\theta \qquad (j)$$

积分方程（j），得

$$\theta=a\cos\left(\frac{k}{\sqrt{J}}t+\varphi\right) \qquad (k)$$

其中 a 和 φ 为积分常数。

3. 高阶非完整系统的广义 Whittaker 方程

设力学系统位形由 n 个广义坐标 $q_1, \cdots, q_n$ 来确定，它的运动受有 g 个理想 m 阶非完整约束

$$\overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(m-1)}{q_s}, \overset{(m)}{q_\sigma}, t), \qquad \begin{pmatrix}\beta=1,\cdots,g; \varepsilon=n-g;\\ \sigma=1,\cdots,\varepsilon; s=1,\cdots,n\end{pmatrix} \qquad (5.1.86)$$

系统的运动方程可表为 Maggi 形式（5.1.25)。若该系统广义力是有势的，即 $Q''_\sigma=0$，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}-\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\right)\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}=0$$

$$(\sigma=1, \cdots, \varepsilon) \qquad (5.1.87)$$

假设 L 和 φ_β 中都不显含时间 t，且满足式（5.1.26)，则由 5.1.1 节命题 5 知，系统有能量积分（5.1.27)。令

$$\dot{q}_u=\dot{q}_1 q'_u, \quad q'_u=\frac{\mathrm{d}q_u}{\mathrm{d}q_1}, \qquad (u=2, \cdots, n) \quad (5.1.88)$$

并设

$$\Omega(q'_u, \dot{q}_1, q_s)=L(q'_u\dot{q}_1, \dot{q}_1, q_s); \quad L^*(q'_u, q_s)=\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} \qquad (5.1.89)$$

类似完整系统 Whittaker 方程，我们可以由式（5.1.88）和能

量积分（5.1.27）中解出

$$\dot{q}_1=\dot{q}_1(q'_u, q_s) \tag{5.1.90}$$

并且可以证明[2]，方程（5.1.87）可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_1}\frac{\partial L^*}{\partial q'_\sigma}-\frac{\partial L^*}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_1}\frac{\partial L^*}{\partial q'_{\varepsilon+\beta}}-\frac{\partial L^*}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\right)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}=0$$

$$(\sigma=2, \cdots, \varepsilon) \tag{5.1.91}$$

现在变换$\dfrac{\partial\varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}$这一项。将式（5.1.88）第一式两端对时间 t 求 $m-1$ 次导数，有

$$\overset{(m)}{q}_u=\frac{\mathrm{d}^{(m-1)}(\dot{q}_1 q'_u)}{\mathrm{d}t^{(m-1)}}=\overset{(m)}{q}_1 q'_u+\cdots+\dot{q}_1\overset{(m-1)\prime}{q}_u \tag{5.1.92}$$

令 Θ_β 为 φ_β 中借助式（5.1.92）替换所得表达式，即

$$\begin{aligned}&\Theta_\beta(\overset{(m-1)\prime}{q}_\sigma, \overset{(m-2)\prime}{q}_u, \cdots, q'_u, \overset{(m)}{q}_1, \cdots, \dot{q}_1, q_s)\\&=\varphi_\beta(\overset{(m)}{q}_1, \overset{(m)}{q}_1 q'_\sigma+\cdots+\dot{q}_1\overset{(m-1)\prime}{q}_\sigma, \overset{(m-1)}{q}_1, \overset{(m-1)}{q}_1 q'_u+\cdots+\dot{q}_1\overset{(m-2)\prime}{q}_u,\\&\quad\cdots, \dot{q}_1, \dot{q}_1 q'_u, q_s), \qquad (\sigma=2, \cdots, \varepsilon;\ u=2, \cdots, n;\\&\qquad\qquad s=1, \cdots, n)\end{aligned} \tag{5.1.93}$$

因此有

$$\frac{\partial\Theta_\beta}{\partial\overset{(m-1)\prime}{q}_\sigma}=\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\overset{(m)}{q}_\sigma}\dot{q}_1, \qquad (\sigma=2, \cdots, \varepsilon) \tag{5.1.94}$$

将式（5.1.94）代入式（5.1.91）中，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_1}\frac{\partial L^*}{\partial q'_\sigma}-\frac{\partial L^*}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_1}\frac{\partial L^*}{\partial q'_{\varepsilon+\beta}}-\frac{\partial L^*}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\right)\left(\frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial\Theta_\beta}{\partial\overset{(m-1)\prime}{q}_\sigma}\right)$$

$$=0, \qquad (\sigma=2, \cdots, \varepsilon) \tag{5.1.95}$$

为了完全消去 t 的影响，需将 $\dot{q}', \ddot{q}', \cdots, \overset{(m-1)\prime}{q}$ 化为对 q_1 的各阶导数。令

$$\frac{\mathrm{d}^m(q'_u)}{\mathrm{d}q_1^{(m)}}=q_u^{\prime(m)}, \qquad (u=2, \cdots, n) \tag{5.1.96}$$

我们有

$$q'_u = \frac{\mathrm{d}q_u}{\mathrm{d}q_1} \tag{5.1.97}$$

$$\dot{q}'_u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q'_u) = \frac{\mathrm{d}q'_u}{\mathrm{d}q_1} \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} = q''_u \dot{q}_1 \tag{5.1.98}$$

$$\ddot{q}'_u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{q}'_u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q''_u \dot{q}_1) = q'''_u \dot{q}_1^2 + q''_u \ddot{q}_1 \tag{5.1.99}$$

…

$$\overset{(m-1)}{q'_u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overset{(m-2)}{q'_u}\right) = q'^{(m)}_u (\dot{q}_1)^{m-1} + \cdots + q''_u \overset{(m-1)}{q_1} \tag{5.1.100}$$

其中 $\dot{q}_1, \ddot{q}_1, \cdots, \overset{(m-1)}{q_1}$ 可由式(5.1.90)以及反复应用式（5.1.97）—（5.1.100）诸式给出为

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \dot{q}_1(q'_u, q_s) \\ \ddot{q}_1 &= \ddot{q}_1(q''_u, q'_u, q_s) \\ &\cdots \\ \overset{(m-1)}{q_1} &= \overset{(m-1)}{q_1}(q'^{(m-2)}_u, \cdots, q'_u, q_s) \end{aligned} \tag{5.1.101}$$

令 $\left(\frac{1}{\dot{q}} \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial \overset{(m-1)}{q_\sigma}}\right)^*$ 为 $\left(\frac{1}{\dot{q}_1} \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial \overset{(m-1)}{q_\sigma}}\right)$ 中借助式（5.1.97）—（5.1.101）用 $q'_u, q''_u, \cdots, q'^{(m-1)}_u, q_s$ 表达的式子，则方程（5.1.95）最终成为形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_1} \frac{\partial L^*}{\partial q'_\sigma} - \frac{\partial L^*}{\partial q_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_1} \frac{\partial L^*}{\partial q'_{\epsilon+\beta}} - \frac{\partial L^*}{\partial q_{\epsilon+\beta}}\right)\left(\frac{1}{\dot{q}_1} \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial \overset{(m-1)}{q_\sigma}}\right)^* = 0$$

$$(\sigma = 2, \cdots, \epsilon) \tag{5.1.102}$$

这就是高阶非完整系统的广义 Whittaker 方程[2]。

如果

$$\frac{\partial L}{\partial q_{\epsilon+\beta}} = 0, \qquad (\beta = 1, \cdots, g)$$

则式（5.1.102）变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_1}\frac{\partial L^*}{\partial q'_\sigma}-\frac{\partial L^*}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_1}\frac{\partial L^*}{\partial q'_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial\theta_\beta}{\partial \overset{(m-1)}{q_\sigma}}\right)^*=0 \tag{5.1.103}$$

当 $m=1$ 时，式（5.1.103）成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_1}\frac{\partial L^*}{\partial q'_\sigma}-\frac{\partial L^*}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_1}\frac{\partial L^*}{\partial q'_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial\Theta_\beta}{\partial q'_\sigma}\right) \tag{5.1.104}$$

容易证明，对于 Чаплыгин 系统，方程（5.1.104）与（5.1.86）等价[2]。

§5.2 Poisson 定理及其应用

本节讨论 Hamilton 正则方程积分的某些性质。研究如何利用力学系统的某些独立的第一积分去寻找其他的第一积分。对完整力学系统来说，这是 Poisson 的贡献。

5.2.1 Poisson 括号及其性质

1. Poisson 括号的定义及其性质

为了建立运动方程的积分方法，Poisson 引进了 Poisson 括号的概念。

定义 1 对于由任意的两个函数 $\varphi(t, q_i, p_i)$ 和 $\psi(t, q_i, p_i)$（$\varphi, \psi\in C^1$）的偏导数所构成的如下表达式

$$(\varphi, \psi)=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_s}\frac{\partial\psi}{\partial p_s}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_s}\frac{\partial\psi}{\partial q_s}\right) \tag{5.2.1}$$

称为 Poisson 括号。

Poisson 括号有下列性质：

（1）$(\varphi, \psi)=-(\psi, \varphi)$

（2）$(\varphi, \varphi)=(\varphi, c)=(c, \varphi)=0$，$c=\text{const.}$

（3）$(c\varphi, \psi)=c(\varphi, \psi)$

（4）$(\varphi_1+\varphi_2,\ \psi)=(\varphi_1,\ \psi)+(\varphi_2,\ \psi)$

（5）$(\varphi_1\varphi_2,\ \psi)=\varphi_1(\varphi_2,\ \psi)+\varphi_2(\varphi_1,\ \psi)$

（6）$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi,\ \psi)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \psi\right)+\left(\varphi,\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$

以上这些性质容易由 Poisson 括号的定义式(5.2.1)直接推证。

2．复合 Poisson 括号及 Jacobi 恒等式

定义 2 假设 $f(t,q_i,p_i)$，$\varphi(t,q_i,p_i)$ 和 $\psi(t,q_i,p_i)$ 对 q，p 具有二阶连续偏导数（即$\in C^2$），那么我们称下式为复合 Poisson 括号

$$(f,(\varphi,\ \psi))=\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial q_s}\ \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial p_s}-\frac{\partial f}{\partial p_s}\ \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial q_s}\right] \tag{5.2.2}$$

定义3 如果函数 $f_1(t,q_i,p_i)$ 与 $f_2(t,q_i,p_i)$ 所构成的 Poisson括号恒等于零，即

$$(f_1,\ f_2)\equiv 0 \tag{5.2.3}$$

则称函数 f_1 和 f_2 为相互内旋的。

命题 1 对于三个复合 Poisson 括号，其中每一个复合 Poisson 括号由三个函数 f，φ，ψ 用循环交换函数的方法所得到，则它们的和恒等于零，即

$$(f,(\varphi,\ \psi))+(\varphi,(\psi,\ f))+(\psi,(f,\ \varphi))\equiv 0 \tag{5.2.4}$$

〔证明〕 因为

$$(\varphi,\ \psi)=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_s}\ \frac{\partial\psi}{\partial p_s}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_s}\ \frac{\partial\psi}{\partial q_s}\right)$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_s}\ \frac{\partial}{\partial p_s}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_s}\ \frac{\partial}{\partial q_s}\right)\psi,$$

定义

$$D_\varphi\equiv\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_s}\ \frac{\partial}{\partial p_s}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_s}\ \frac{\partial}{\partial q_s}\right)\equiv\sum_{i=1}^{2n}\alpha_i\frac{\partial}{\partial\xi_i} \tag{5.2.5}$$

为线性微分算子，其中系数 $\alpha_i\in C^1$，则

$$(\varphi,\ \psi)=\sum_{i=1}^{2n}\alpha_i\frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}=\mathrm{D}_\varphi\psi \tag{5.2.6}$$

同样，定义线性微分算子

$$\mathrm{D}_f\equiv\sum_{j=1}^{2n}\beta_j\frac{\partial}{\partial\eta_j} \tag{5.2.7}$$

则

$$(f,\ (\varphi,\ \psi))+(\varphi,\ (\psi,\ f))=(f,\ (\varphi,\ \psi))-(\varphi,\ (f,\ \psi))$$

$$=\mathrm{D}_f\mathrm{D}_\varphi\psi-\mathrm{D}_\varphi\mathrm{D}_f\psi$$

$$=\sum_{j=1}^{2n}\beta_j\frac{\partial}{\partial\eta_j}\left(\sum_{i=1}^{2n}\alpha_i\frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}\right)-\sum_{i=1}^{2n}\alpha_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\sum_{j=1}^{2n}\beta_j\frac{\partial\psi}{\partial\eta_j}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{2n}\beta_j\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial\alpha_i}{\partial\eta_j}\ \frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}+\sum_{j=1}^{2n}\beta_j\sum_{i=1}^{2n}\alpha_i\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_i\partial\eta_j}$$

$$-\sum_{i=1}^{2n}\alpha_i\sum_{j=1}^{2n}\frac{\partial\beta_j}{\partial\xi_i}\ \frac{\partial\psi}{\partial\eta_j}-\sum_{i=1}^{2n}\alpha_i\sum_{j=1}^{2n}\beta_j\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_i\partial\eta_j}$$

因为 $\psi\in C^2$，上式第二项和第四项对消，所以只剩下 ψ 的一次导数项，即

$$(f,\ (\varphi,\ \psi))+(\varphi,\ (\psi,\ f))$$

$$=\sum_{j=1}^{2n}\beta_j\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial\alpha_i}{\partial\eta_j}\ \frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}-\sum_{i=1}^{2n}\alpha_i\sum_{j=1}^{2n}\frac{\partial\beta_j}{\partial\xi_i}\ \frac{\partial\psi}{\partial\eta_j}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(A_k\ \frac{\partial\psi}{\partial p_k}+B_k\ \frac{\partial\psi}{\partial q_k}\right) \tag{5.2.8}$$

式中 A_k，B_k 是 f，φ 的函数，但不含 ψ。

令 $\psi=p_i$，则式（5.2.8）式成为

$$(f,\ (\varphi,\ p_i))-(\varphi,\ (f,\ p_i))=A_i \tag{5.2.9}$$

但

$$(\varphi,\ p_i)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\ \frac{\partial p_i}{\partial p_k}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\ \frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}$$

同样

$$(f, p_i)=\frac{\partial f}{\partial q_i}$$

所以式（5.2.9）式成为

$$A_i=\left(f, \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\right)-\left(\varphi, \frac{\partial f}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial}{\partial q_i}(f, \varphi) \qquad (5.2.10)$$

同理在式（5.2.8）中，令 $\psi=q_i$，则可以证明

$$B_i=-\frac{\partial}{\partial p_i}(f, \varphi) \qquad (5.2.11)$$

将式（5.2.10）和（5.2.11）代入式（5.2.8），得

$$(f, (\varphi, \psi))+(\varphi, (\psi, f))$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial q_k}\frac{\partial \psi}{\partial p_k}-\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial p_k}\frac{\partial \psi}{\partial q_k}\right]$$

$$=((f, \varphi), \psi)=-(\psi, (f, \varphi))$$

式（5.2.4）被称作 Jacobi 恒等式。

5.2.2 关于第一积分的 Poisson 定理

1. Poisson 条件

利用 Poisson 括号的性质，可以建立 Poisson 方法的基本定理。假设 Hamilton 正则方程为

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}, \qquad (s=1, \cdots, n) \quad (5.2.12)$$

那么利用 Poisson 括号，可以把式（5.2.12）表示为 Poisson 形式

$$\dot{q}_s=(q_s, H), \quad \dot{p}_s=(p_s, H), \qquad (s=1, \cdots, n) \quad (5.2.13)$$

假设

$$f(q_s, p_s, t)=C \qquad (5.2.14)$$

是 Hamilton 正则方程的第一积分，则我们有下述结论。

命题 2 函数 $f(q_s, p_s, t)$ 是 Hamilton 正则方程的第一积

分的充要条件是满足

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(f, H)\equiv 0 \tag{5.2.15}$$

〔证明〕

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial f}{\partial p_s}\dot{p}_s\right)\\&=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{\partial f}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)\\&=\frac{\partial f}{\partial t}+(f, H)\end{aligned}$$

‖

关系式（5.2.15）称为对第一积分的 Poisson 条件。

2. Poisson 定理及其应用

Poisson定理 如果已知 Hamilton 正则方程的不处于相互内旋的两个第一积分

$$f_1(t, q_s, p_s)=c_1, \quad f_2(t, q_s, p_s)=c_2$$

那么这些积分的 Poisson 括号也是 Hamilton 方程的第一积分。

〔证明〕 因为 f_1 和 f_2 是系统的第一积分，由命题 2 知，有

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+(f_1, H)=0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t}+(f_2, H)=0 \tag{5.2.16}$$

又由命题 1 知，对于函数 H, f_1, f_2 存在 Jacobi 恒等式

$$(H, (f_1, f_2))+(f_1, (f_2, H))+(f_2, (H, f_1))\equiv 0 \tag{5.2.17}$$

但由式（5.2.16）已知

$$(f_2, H)=-\frac{\partial f_2}{\partial t} \tag{5.2.18}$$

$$(H, f_1)=\frac{\partial f_1}{\partial t} \tag{5.2.19}$$

将式（5.2.18）和（5.2.19）代入（5.2.17），得

$$(H, (f_1, f_2))+\left(f_1, -\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)+\left(f_2, \frac{\partial f_1}{\partial t}\right)\equiv 0$$

即 $$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2\right)+\left(f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t}\right)+((f_1, f_2), H)\equiv 0 \quad (5.2.20)$$

由 Poisson 括号的性质（6）知，上式可表示为

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_1, f_2)+((f_1, f_2), H)\equiv 0 \quad (5.2.21)$$

因为 f_1, f_2 不是相互内旋的，即 $(f_1, f_2)\neq 0$，那么 (f_1, f_2) 是某第三个函数

$$(f_1, f_2)=f_3(t, q_i, p_i)$$

因此，它满足第一积分的 Poisson 条件，即命题 2，故 $f_3=C_3$ 是正则方程的第一积分。 ‖

看来，Poisson 定理是积分 Hamilton 正则方程的重要手段。它提供了一种从已知的两个第一积分求新的第一积分的一种方法。

例 1 Kepler-Newton 空间问题

一质量为 m 的质点在原点的中心力场作用下运动，其对 x 轴和 y 轴的动量矩守恒。求证：对 z 轴的动量矩亦守恒。

令

$$q_1=x, \quad q_2=y, \quad q_3=z$$

因动能

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

故

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}, \quad p_2=\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=m\dot{y}, \quad p_3=\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}=m\dot{z}$$

因此，对 x 轴和 y 轴的动量矩守恒可表示为

$$f_1=q_2p_3-p_2q_3=C_1, \quad f_2=q_3p_1-p_3q_1=C_2$$

我们对以上两个第一积分应用 Poisson 定理，有

$$(f_1, f_2)=\sum_{s=1}^{3}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_s}\frac{\partial f_2}{\partial p_s}-\frac{\partial f_1}{\partial p_s}\frac{\partial f_2}{\partial q_s}\right)=q_1p_2-q_2p_1$$

因此 $(f_1, f_2)=f_3$，即 $f_3=C_3$ 也是第一积分。 ‖

事实上，并不是在任何情况下都可以应用Poisson定理来求新的第一积分。很显然，首要条件就是要求已知的两个第一积分不处于相互内旋。正因为如此，Poisson定理不能应用于解力学的著名经典问题——带有一个固定点的刚体的运动问题，天体力学中的三体问题等。在这些问题中，正如在力学中的大多数另外的经典问题中一样，所有已知积分都是相互内旋的，而不能利用来获得新的积分。

定义 4 设 $f_1, \cdots, f_r$ 是动力学变量 q, p 的函数，它们是某一力学系统正则方程的一组第一积分。若不能再从这组第一积分中应用Poisson方法做出新的第一积分，则称这样一组积分为内旋积分组。

显然，内旋积分组有以下两种情况：

（1） $(f_i, f_j)=0, \qquad (i, j=1, \cdots, r)$

即 $f_1, \cdots, f_r$ 中任意两个函数都是相互内旋的。

（2） $(f_i, f_j)=\Phi(f_1, \cdots, f_r)$

即从 $f_1, \cdots, f_r$ 中任取两个第一积分来做Poisson括号，新产生的第一积分都是 $f_1, \cdots, f_r$ 的函数。

例 2 Kepler-Newton 问题中的三个第一积分

$$q_2p_3-p_2q_3=C_1, \quad q_3p_1-p_3q_1=C_2, \quad q_1p_2-q_2p_1=C_3$$

就构成一个内旋积分组。从它们出发，利用Poisson方法就不再能得到其它的第一积分了。 ‖

最后，我们研究具有广义能量积分的力学系统，即研究Hamilton函数 H 不明显依赖于时间的情形：

$$\frac{\partial H}{\partial t}=0 \tag{5.2.22}$$

命题 3 设某力学系统具有广义能量积分。又 $f(t, p_i, q_i)=C_1$ 是已知的第一积分，则 f 的各阶偏导数 $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \cdots$ 都是此系统的第一积分。

〔证明〕 根据命题2，知

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(f, H)=0$$

将此恒等式对时间求导，并考虑到式（5.2.22），有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\left(f, \frac{\partial H}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial t}, H\right)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\left(\frac{\partial f}{\partial t}, H\right)=0$$

可见，如果$\frac{\partial f}{\partial t}$是正则变量的函数，显然$\frac{\partial f}{\partial t}=C_1$满足对第一积分的 Poisson 条件，即它是运动方程的第一积分。进而可以证明$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$，$\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}$，…等亦是系统的第一积分。 ‖

5.2.3 求非完整力学系统第一积分的 Poisson 方法

1. 非完整系统对第一积分的广义 Poisson 条件

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_1, \cdots, q_n$ 来确定，它的运动受有 g 个理想非完整约束

$$f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t)=0, \qquad (\beta=1, \cdots, g;\ s=1, \cdots, n) \tag{5.2.23}$$

此系统的 Hamilton 正则方程为

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\ \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}+\sum_{\beta=1}^{g}(\lambda_\beta)\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right), \qquad (s=1, \cdots, n) \tag{5.2.24}$$

其中 λ_β 可在积分运动微分方程之前表为 $q_s, \dot{q}_s, t$ 的函数。(λ_β) 为 λ_β 中 $\dot{q}_s$ 用 p_k, q_k, t 替代所得的结果；$\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_s}\right)$为$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}$中 $\dot{q}_s$ 用 p_k, q_k, t 替代所得结果。容易证明下述命题。

命题4 函数 $f(t, p_s, q_s)$ 为非完整系统(5.2.23)，(5.2.24)的第一积分的充要条件是

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(f,H)+\sum_{\beta=1}^{g}(\lambda_\beta)\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\frac{\partial f}{\partial p_s}=0 \quad (5.2.25)$$

式（5.2.25）是非完整系统对第一积分的广义Poisson条件。

推论 当系统的Hamilton函数不显含时间 t，且 f_β 对 $\dot{q}_s$ 是齐次的情形，$H=C$ 是系统的第一积分。

〔证明〕 令 $f=H$，代入式（5.2.25）左端有

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{\beta=1}^{g}(\lambda_\beta)\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\frac{\partial H}{\partial p_s}=0$$

‖

例3 试证，对Appell–Hamel例，Hamilton函数是问题的第一积分。

〔证明〕 系统的Lagrange函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz$$

广义动量为

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x},\quad p_y=\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=m\dot{y},\quad p_z=\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=m\dot{z}$$

Hamilton函数为

$$H=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}-L=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+mgz$$

问题的约束方程为

$$f=a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\dot{z}^2=0$$

因 H 不显含 t，而 f 对 $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ 是二阶齐次的，故满足命题4推论的条件。于是 $H=C$ 是问题的第一积分。这是系统的能量积分。 ‖

下面研究Чаплыгин系统。此时 L 中不含 $q_{\varepsilon+\beta}$。约束是线性、齐次、定常的，即

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}(q_\nu)\dot{q}_\sigma, \qquad (\sigma,\nu=1,\cdots,\varepsilon) \quad (5.2.26)$$

考虑到约束（5.2.26）而变换的Lagrange函数为 $\tilde{L}$。取广义

动量

$$p_\sigma = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma} \tag{5.2.27}$$

及 Hamilton 函数

$$\tilde{H} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} p_\sigma \dot{q}_\sigma - \tilde{L}$$

则其正则方程为

$$\begin{aligned} \dot{q}_\sigma &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_\sigma} \\ \dot{p}_\sigma &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_\sigma} - \sum_{\beta=1}^{g} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} \right) \sum_{\nu=1}^{\varepsilon} \left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu} \right) \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_\sigma}, \qquad (\sigma = 1, \cdots, \varepsilon) \end{aligned} \tag{5.2.28}$$

其中$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)$为 p_σ, q_σ, t 的函数，我们有如下结论。

命题 5 函数 $f(t, p_\sigma, q_\sigma)$ 是 Чаплыгин 系统的第一积分的充要条件是

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t} + (f, \tilde{H}) - \sum_{\beta=1}^{g} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} \right) \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial q_\sigma} \\ &\times \sum_{\nu=1}^{\varepsilon} \left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu} \right) \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_\nu} = 0 \end{aligned} \tag{5.2.29}$$

式（5.2.29）为 Чаплыгин 非完整系统对第一积分的广义 Poisson 条件。

2. 由已知的第一积分求另外的第一积分

对一般的非完整系统，假设已知第一积分 $f(t, p_s, q_s)$ 明显地依赖于时间 t，它应满足对第一积分的广义 Poisson 条件（5.2.25）。将式（5.2.25）对时间 t 求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}, H \right) + \left(f, \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial (\lambda_\beta)}{\partial t} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \right) \frac{\partial f}{\partial p_s}$$

$$+\sum_{\beta=1}^{g}(\lambda_\beta)\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\frac{\partial f}{\partial p_s}$$
$$+\sum_{\beta=1}^{g}(\lambda_\beta)\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial p_s}\right)=0 \tag{5.2.30}$$

假设L和f_β都不显含t，则H和λ_β亦不显含t，于是有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)=\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial(\lambda_\beta)}{\partial t}=0 \tag{5.2.31}$$

将式（5.2.31）代入式（5.2.30）中，有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\left(\frac{\partial f}{\partial t},H\right)+\sum_{\beta=1}^{g}(\lambda_\beta)\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\frac{\partial}{\partial p_s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)=0 \tag{5.2.32}$$

因此，由命题 4 知，$\frac{\partial f}{\partial t}=C_1$也是系统的第一积分。依此类推，可得下述第一积分

$$\frac{\partial f}{\partial t}=C_1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=C_2,\quad \cdots,\quad \frac{\partial^k f}{\partial t^k}=C_k,\cdots \tag{5.2.33}$$

于是，我们得到下述结论

命题 6 对一般的非完整系统，其广义力有势。如果Lagrange函数L和约束方程$f_\beta=0$都不显含时间t，而f为系统显含t的第一积分，则$\frac{\partial f}{\partial t}$，$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$，$\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}$，…均为系统的第一积分。

将第一积分的广义 Poisson 条件（5.2.25）两端对q_1求偏导数有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_1\partial t}+\left(\frac{\partial f}{\partial q_1},H\right)+\left(f,\frac{\partial H}{\partial q_1}\right)$$
$$+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial(\lambda_\beta)}{\partial q_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\frac{\partial f}{\partial p_s}+\sum_{\beta=1}^{g}(\lambda_\beta)\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\frac{\partial f}{\partial p_s}$$
$$+\sum_{\beta=1}^{g}(\lambda_\beta)\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial q_1\partial p_s}=0 \tag{5.2.34}$$

假设系统的 Lagrange 函数L和约束方程$f_\beta=0$中不显含q_1，则

$$\frac{\partial H}{\partial q_1}=\frac{\partial(\lambda_\beta)}{\partial q_1}=\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)=0 \qquad (5.2.35)$$

将式（5.2.35）代入式（5.2.34）中，我们得到

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial q_1},H\right)+\sum_{\beta=1}^{g}(\lambda_\beta)\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\frac{\partial}{\partial p_s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)=0$$
$$(5.2.36)$$

显然，由式（5.2.36）和命题4知，$\frac{\partial f}{\partial q_1}=C$ 也是系统的第一积分。依此类推，可得到下述第一积分

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}=C_1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2}=C_2,\ \cdots,\ \frac{\partial^k f}{\partial q_1^k}=C_k,\ \cdots \qquad (5.2.37)$$

于是，我们有下述命题

命题7 对一般广义力有势的非完整系统，如果Lagrange函数 L 和约束方程 $f_\beta=0$ 都不显含坐标 q_1，而 f 为系统显含 q_1 的第一积分，则 $\frac{\partial f}{\partial q_1}$，$\frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2}$，…均为系统的第一积分。

下面研究Чаплыгин系统。将Чаплыгин非完整系统对第一积分的广义Poisson条件（5.2.29）对 t 求偏导数，有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t}+\left(\frac{\partial f}{\partial t},\tilde{H}\right)+\left(f,\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)$$
$$\times\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial p_\sigma}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}\right)\frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_\nu}$$
$$-\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial p_\sigma}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}\right)\frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_\nu}$$
$$-\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial p_\sigma}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}\right)\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial t\partial p_\nu}=0$$
$$(5.2.38)$$

对Чаплыгин系统，若 L 中不显含时间 t，则有

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_{\nu}}\right)=0 \quad (5.2.39)$$

将式（5.2.39）代入式（5.2.38）中，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \tilde{H}\right)-\sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial}{\partial p_{\sigma}}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_{\sigma}}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_{\nu}}\right)\frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_{\nu}}=0 \quad (5.2.40)$$

由此，根据命题5知，$\frac{\partial f}{\partial t}$为系统的第一积分。同理可证$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$，$\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}$，…均为系统的第一积分。于是，我们有下述命题。

命题 8 对于Чаплыгин系统，如果Lagrange函数L不显含时间t，而f为系统显含t的第一积分，则$\frac{\partial f}{\partial t}$，$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$，…均为系统的第一积分。

同样，通过对广义Poisson条件（5.2.29）对坐标q_1求偏导数，可以证明下述结论。

命题 9 对于Чаплыгин系统，如果$\tilde{L}$不显含坐标q_1，且满足条件

$$\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial p_{\sigma}}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_{\sigma}}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_{\nu}}\right)\frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_{\nu}}$$
$$+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial p_{\sigma}}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_1\partial q_{\sigma}}-\frac{\partial^2 B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_1\partial q_{\nu}}\right)\frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_{\nu}}=0 \quad (5.2.41)$$

而f为系统显含q_1的第一积分，则$\frac{\partial f}{\partial q_1}$，$\frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2}$，…均为系统的第一积分。

例 4 研究匀质圆球沿粗糙水平面的自由运动。

取球心坐标x，y以及三个Euler角ψ，θ，φ为广义坐标，约

束方程为

$$\dot{x}=-a(\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta-\dot{\theta}\sin\psi)$$
$$\dot{y}=-a(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta-\dot{\theta}\cos\psi) \tag{a}$$

系统的 Lagrange 函数为

$$L=T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}\ \frac{2}{5}ma^2(\dot{\psi}^2+\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}^2+2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta) \tag{b}$$

考虑到约束（a），得

$$\widetilde{L}=\frac{1}{2}ma^2\left\{\frac{7}{5}\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\frac{2}{5}(\dot{\psi}^2+\dot{\varphi}^2+2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta)\right\} \tag{c}$$

因为非完整约束（a）是线性、齐次、定常的，而约束系数不含 x，y（且不含 φ）；L 中不含 x，y（且不含 φ，ψ），故此系统是 Чаплыгин 系统。

已知系统有第一积分

$$f=\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi=C \tag{d}$$

令 $q_1=\psi$，$q_2=\theta$，$q_3=\varphi$，$q_4=x$，$q_5=y$，则由

$$p_1=\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{q}_1}=\frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_1+\dot{q}_3\cos q_2)$$

$$p_2=\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{q}_2}=\frac{7}{5}ma^2\dot{q}_2$$

$$p_3=\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{q}_3}=ma^2\left(\dot{q}_3\sin^2q_2+\frac{2}{5}\dot{q}_3+\frac{2}{5}\dot{q}_1\sin q_2\right)$$

得

$$\dot{q}_1=\frac{5}{7}\ \frac{p_1\left(1+\frac{5}{2}\sin^2q_2\right)-p_3\cos q_2}{ma^2\sin^2q_2}$$

$$\dot{q}_2=\frac{5}{7}\ \frac{p_2}{ma^2}$$

$$\dot{q}_3=\frac{5}{7}\ \frac{p_3-p_1\cos q_2}{ma^2\sin^2q_2}$$

于是，第一积分（d）可表示为

$$f=\frac{5}{7}\frac{p_2}{ma^2}\cos q_1+\frac{5}{7}\frac{(p_3-p_1\cos q_2)\sin q_1}{ma^2\sin q_2} \tag{e}$$

非完整约束可表为

$$\begin{aligned}\dot{q}_4&=-a(\dot{q}_3\cos q_1\sin q_2-\dot{q}_2\sin q_1)\\ \dot{q}_5&=-a(\dot{q}_3\sin q_1\sin q_2+\dot{q}_2\cos q_1)\end{aligned} \tag{f}$$

可以验证，式（e）和（f）满足条件（5.2.41)，故由命题9知，此系统有积分$\frac{\partial f}{\partial q_1}=C_1$，即

$$-\dot{\theta}\sin\psi+\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi=C_1$$

§5.3 正则变换

变换，是分析力学研究问题的重要手段。对于分析动力学问题中直接得到的 Hamilton 正则方程来说，往往很难求解。因此，利用变换的方法，使它变成一个较易求解的微分方程组，是一个十分重要的研究课题。正则变换便是达到这一目的的重要工具。本节研究这种变换的性质及其表达形式。

5.3.1 正则变换及其群性

1. 正则变换

设力学系统用正则变量q_1，…，q_n，p_1，…，p_n来描述，它的动力学方程为下列 Hamilton 正则方程

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}，\ \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}，\quad (s=1,\cdots,n) \tag{5.3.1}$$

我们研究由变量q_k，p_k向新变量Q_s，P_s的变换

$$Q_s=Q_s(q_k,p_k,t)，\ P_s=P_s(q_k,p_k,t)，\quad (s,k=1,\cdots,n) \tag{5.3.2}$$

并且函数行列式满足

$$\Delta=\frac{\partial(Q_s,P_s)}{\partial(q_s,p_s)}=\frac{\partial(Q_1,\cdots,Q_n;\ P_1,\cdots,P_n)}{\partial(q_1,\cdots,q_n;\ p_1,\cdots,p_n)}\neq 0 \qquad (5.3.3)$$

于是，变换（5.3.2）是可逆的。旧变量 q_s，p_s 可用新变量 Q_k，P_k 表出

$$q_s=q_s(Q_k,P_k,t),\ \ p_s=p_s(Q_k,P_k,t),\qquad (s,k=1,\cdots,n) \qquad (5.3.4)$$

在变换（5.3.2）下，Hamilton 正则方程（5.3.1）将过渡到一组新的方程，但一般说来，这组新方程没有正则方程的形式。

对积分动力学方程，有特别重要意义的是这样一类变换：在此类变换下，Hamilton 正则方程的形式保持不变。这时，在变换（5.3.2）下，方程（5.3.1）变为正则方程组

$$\dot{Q}_s=\frac{\partial H^*}{\partial P_s},\qquad \dot{P}_s=-\frac{\partial H^*}{\partial Q_s},\qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (5.3.5)$$

其中 $H^*=H^*(Q_s,P_s,t)$ 有 Hamilton 函数的作用。

定义 1 在 $2n$ 维相空间中，如果通过变量变换，将任何 Hamilton 正则方程组（5.3.1），仍然变成 Hamilton 正则方程组（5.3.5）（一般说来具有另一 Hamilton 函数 H^*）的变换（5.3.2）称为正则变换。

显然，通过正则变换，正则方程的形式不变。但是，可以使方程（5.3.5）比（5.3.1）更容易积分。

定义 1 对变换所提出的要求是针对状态变换本身而言的，它必须对同阶数的所有 Hamilton 系统都成立，而不应该依赖于 Hamilton 系统的具体选择。换句话说，正则变换是通用的，而不是专用的。把一个具体的 Hamilton 系统变成另一个 Hamilton 系统的变换并不一定是正则变换。例如，任何非正则变换 $Q_s=Q_s(q_k,p_k,t)$，$P_s=P_s(q_k,p_k,t)$ 都能将 $H\equiv 0$ 的 Hamilton 正则方程组变换为 $H^*\equiv 0$ 的 Hamilton 正则方程组。

下面我们来寻求，在怎样的条件，变换（5.3.2）是正则的。我们有如下判别条件。

命题1　变换（5.3.2）如果满足 Pfaff 方程

$$\sum_{s=1}^{n} P_s \mathrm{d}Q_s - k\sum_{s=1}^{n} p_s \mathrm{d}q_s = (H^* - kH)\mathrm{d}t - \mathrm{d}U \tag{5.3.6}$$

则一定是正则变换。这里 k 是不等于零的任意常数。

〔证明〕　将式（5.3.6）表为

$$k\sum_{s=1}^{n} p_s \mathrm{d}q_s - \sum_{s=1}^{n} P_s \mathrm{d}Q_s + (H^* - kH)\mathrm{d}t = \mathrm{d}U \tag{5.3.7}$$

设 q_s，p_s 有任意等时变分 δq_s，$\delta p_s (s=1,\cdots,n)$，则由上式得

$$k\sum_{s=1}^{n} p_s \delta q_s - \sum_{s=1}^{n} P_s \delta Q_s = \delta U \tag{5.3.8}$$

这是因为 $\delta t=0$。式（5.3.7）还可以写成

$$k\sum_{s=1}^{n} p_s \dot{q}_s - \sum_{s=1}^{n} P_s \dot{Q}_s + H^* - kH = \dot{U} \tag{5.3.9}$$

将式（5.3.8）对 t 求导数有

$$k\sum_{s=1}^{n} \dot{p}_s \delta q_s + k\sum_{s=1}^{n} p_s \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_s - \sum_{s=1}^{n} \dot{P}_s \delta Q_s - \sum_{s=1}^{n} P_s \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta Q_s$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta U \tag{5.3.10}$$

对式（5.3.9）取变分得

$$k\sum_{s=1}^{n} p_s \delta \dot{q}_s + k\sum_{s=1}^{n} \dot{q}_s \delta p_s - \sum_{s=1}^{n} P_s \delta \dot{Q}_s - \sum_{s=1}^{n} \dot{Q}_s \delta P_s + \delta H^*$$

$$- k\delta H = \delta \dot{U} \tag{5.3.11}$$

考虑到 δ 与$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$的可交换性，将式（5.3.11）与式（5.3.10）两式相减，得

$$k\sum_{s=1}^{n} (\dot{q}_s \delta p_s - \dot{p}_s \delta q_s) - \sum_{s=1}^{n} (\dot{Q}_s \delta P_s - \dot{P}_s \delta Q_s) + \delta H^*$$

$$-k\delta H=0 \tag{5.3.12}$$

由正则方程（5.3.1）知

$$k\sum_{s=1}^{n}(\dot{q}_s\delta p_s-\dot{p}_s\delta q_s)-k\delta H$$

$$=k\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\delta p_s+\frac{\partial H}{\partial q_s}\delta q_s\right)-k\delta H=k\delta H-k\delta H=0$$

因此，式（5.3.12）成为

$$\sum_{s=1}^{n}\dot{Q}_s\delta P_s-\sum_{s=1}^{n}\dot{P}_s\delta Q_s=\delta H^*$$

注意到

$$\delta H^*=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H^*}{\partial Q_s}\delta Q_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H^*}{\partial P_s}\delta P_s$$

于是

$$\dot{Q}_s=\frac{\partial H^*}{\partial P_s},\quad \dot{P}_s=-\frac{\partial H^*}{\partial Q_s}$$ ||

事实上，Pfaff 方程（5.3.6）也是正则变换的必要条件，但其证明要用到 Poincaré–Cartan 积分不变量的性质以及通用相对线性积分不变量的李华中定理，因此略去。其证明可参看〔9〕。

此外要注意：式（5.3.6）只要对某一对函数 H 和 H^* 成立，则变换（5.3.2）就是正则的。事实上，如果在 H 之外，另取一任意函数 H_1，并按下式定义 H_1^*

$$H_1^*-H^*=k(H_1-H)$$

则当以 $\mathrm{d}t$ 乘上式并代入式（5.3.6），我们便得到

$$\sum_{s=1}^{n}P_s\mathrm{d}Q_s-k\sum_{s=1}^{n}p_s\mathrm{d}q_s=(H_1^*-kH_1)\mathrm{d}t-\mathrm{d}U$$

因此式（5.3.6）对于任何函数 H_1 和与之对应的 H_1^* 也是正确的。

在式（5.3.6）中，k 被称作正则变换的“价”，而U则被称作正则变换的生成函数或母函数。如果 $k=1$，则这种变换称作单价正则变换。今后，我们仅限于讨论这种单价正则变换，简称为正则变换。这时，变换正则性的判别条件为

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \mathrm{d}q_s - \sum_{s=1}^{n} P_s \mathrm{d}Q_s + (H^* - H)\mathrm{d}t = \mathrm{d}U \quad (5.3.13)$$

2．正则变换的群性

设变换 T_1 将 $(q,p)\to(Q,P)$，变换 T_2 将 $(Q,P)\to(Q',P')$，则 $(q,p)\to(Q',P')$ 的变换记为 T_2T_1，称为两个变换的积。

若存在这样的变换，使

$$T_1^{-1}T_1(q,p)=(q,p)$$

则称 T_1^{-1} 为变换 T_1 的逆变换。

我们称变换 $T_0(q,p)=(q,p)$ 为恒等变换。

定义 2　我们把服从下述条件的变换的总合称为变换群。

（1）如果变换 T_1，T_2 属于总合，那么它的积 T_2T_1 也属于已给的总合；

（2）满足结合律

$$T_3(T_2T_1)=(T_3T_2)T_1$$

（3）存在恒等变换 T_0，以使

$$T_0T_1=T_1T_0=T_1$$

（4）对任意变换 T_1，存在逆变换 T_1^{-1}，以使

$$T_1T_1^{-1}=T_1^{-1}T_1=T_0$$

很显然，对于正则变换，两个正则变换的积仍是正则变换。同时，由于式（5.3.3）成立，所以任意一个正则变换的逆变换也存在。另一方面，$q_r\to q_r$，$p_r\to p_r$就是恒等变换，当然它仍是正则变换。此外，易验证正则变换也满足结合律。因此，我们有如下结论。

命题 2　全体正则变换构成一个群。

5.3.2 母函数

为解正则变换问题，必须在一般形式下对函数 U 和 H^* 解方程（5.3.6），因而问题是不确定的。我们可以认为其中一个函数是任意的。将母函数 U 取为这样的函数比较方便。借助它可以找到未知的变换。

现在 q，p，Q，P，t 共 $4n+1$ 个变量，它们被 $2n$ 个变换联系着，所以其中只有 $2n+1$ 个变量是独立的。选择怎样的 $2n+1$ 个变量作为独立变量，通常可以有多种方案。但是，对于一个具体的正则变换来说，这种选择决不是任意的[24]。独立变量的选择，是要根据变换的情况来判定的。以下，我们反过来做：在预先假定某 $2n+1$ 个变量可以作为变换的独立变量的前提下，来寻找这一类变换的明显表达式。

如取 U 作为 q_s，p_s，Q_s，P_s 和 t 的函数，则

$$\mathrm{d}U=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial q_s}\mathrm{d}q_s+\frac{\partial U}{\partial p_s}\mathrm{d}p_s+\frac{\partial U}{\partial Q_s}\mathrm{d}Q_s+\frac{\partial U}{\partial P_s}\mathrm{d}P_s\right)+\frac{\partial U}{\partial t}\mathrm{d}t$$

于是式（5.3.13）可写成

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\left(p_s-\frac{\partial U}{\partial q_s}\right)\mathrm{d}q_s-\left(P_s+\frac{\partial U}{\partial Q_s}\right)\mathrm{d}Q_s-\frac{\partial U}{\partial p_s}\mathrm{d}p_s-\frac{\partial U}{\partial P_s}\mathrm{d}P_s\right\}+\left(H^*-H-\frac{\partial U}{\partial t}\right)\mathrm{d}t=0 \quad (5.3.14)$$

下面研究四种基本形式的正则变换[25,26]。

1. 第一类母函数

记作 U_1，有形式

$$U_1=U_1(q_s,Q_s,t) \quad (5.3.15)$$

即选择 q_1，…，q_n，Q_1，…，Q_n，t 作为 $2n+1$ 个独立变量。这种变换显然是存在的。这种变换由补充关系式

$$\frac{\partial(Q_1,Q_2,\cdots,Q_n)}{\partial(p_1,p_2,\cdots,p_n)}\neq 0 \tag{5.3.16}$$

所规定。它保证了量 t，q_1，…，q_n，Q_1，…，Q_n 的独立性，这些量便可取作独立变量。这样的变换就是所谓的自由正则变换。事实上，只要有式（5.3.16）成立，就可从式（5.3.2）前 n 个方程将广义动量 p_1，…，p_n 用 $2n+1$ 个量 t，q_s，$Q_s(s=1,\cdots,n)$ 来表示。因此，依赖于变量 t，q_s，p_s 的任何函数都可以写成变量 t，q_s，Q_s 的函数形式。

将式（5.3.16）代入式（5.3.14），得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\left(p_s-\frac{\partial U_1}{\partial q_s}\right)\mathrm{d}q_s-\left(P_s+\frac{\partial U_1}{\partial Q_s}\right)\mathrm{d}Q_s\right\}+\left[H^*-\left(H+\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)\right]\mathrm{d}t=0$$

考虑到 $\mathrm{d}q_s$，$\mathrm{d}Q_s$，$\mathrm{d}t$ 的独立性，我们有

$$p_s=\frac{\partial U_1}{\partial q_s},\quad P_s=-\frac{\partial U_1}{\partial Q_s},\quad H^*=H+\frac{\partial U_1}{\partial t},\qquad (s=1,\cdots,n) \tag{5.3.17}$$

因此，由式（5.3.17）第一式可以求得

$$p_s=p_s(q_k,Q_k,t),\qquad (s,k=1,\cdots,n) \tag{5.3.18}$$

由式（5.3.17）第二式可求得

$$P_s=P_s(q_k,Q_k,t)$$

因此

$$q_s=q_s(Q_k,P_k,t) \tag{5.3.19}$$

将式（5.3.19）代入式（5.3.18）中，得到

$$p_s=p_s(Q_k,P_k,t) \tag{5.3.20}$$

再由式（5.3.19）和（5.3.20）解得

$$Q_s=Q_s(q_k,p_k,t),\quad P_s=P_s(q_k,p_k,t) \tag{5.3.21}$$

于是，已知母函数（5.3.15），可以求得正则变换（5.3.21）以及由式（5.3.17）最后一式求出新的 Hamilton 函数。

为了保证母函数生成的变换的可逆性，还应该要求 U_1 满足

如下条件

$$\det\left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial q_k \partial Q_s}\right] \neq 0 \tag{5.3.22}$$

2. 第二类母函数

记作 F_2，有形式

$$U_2 = F_2(q_s, P_s, t) - \sum_{s=1}^{n} Q_s P_s \tag{5.3.23}$$

于是

$$\frac{\partial U_2}{\partial q_s} = \frac{\partial F_2}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial p_s} = 0, \quad \frac{\partial U_2}{\partial Q_s} = -P_s, \quad \frac{\partial U_2}{\partial P_s} = \frac{\partial F_2}{\partial P_s} - Q_s \tag{5.3.24}$$

将式（5.3.24）代入式（5.3.14）中，得

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\left(p_s - \frac{\partial F_2}{\partial q_s}\right)\mathrm{d}q_s + \left(Q_s - \frac{\partial F_2}{\partial P_s}\right)\mathrm{d}P_s + \left(H^* - H - \frac{\partial F_2}{\partial t}\right)\mathrm{d}t\right\} = 0$$

因此有

$$p_s = \frac{\partial F_2}{\partial q_s}, \quad Q_s = \frac{\partial F_2}{\partial P_s}, \quad H^* = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \tag{5.3.25}$$

其中前两式给出

$$p_s = p_s(q_k, P_k, t) \tag{5.3.26}$$

$$Q_s = Q_s(q_k, P_k, t) \tag{5.3.27}$$

由式（5.3.27）解得

$$q_s = q_s(Q_k, P_k, t) \tag{5.3.28}$$

将上式代入式（5.3.26），得

$$p_s = p_s(Q_k, P_k, t) \tag{5.3.29}$$

因此存在变换（5.3.28），（5.3.29）。而式（5.3.25）中第三式给出新的 Hamilton 函数。

为了保证变换的可逆性，要求满足条件

$$\det\left[\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_k \partial P_s}\right] \neq 0 \tag{5.3.30}$$

3. 第三类母函数

记作 F_3，形式如下：

$$U_3 = F_3(p_s, Q_s, t) + \sum_{s=1}^{n} p_s q_s \tag{5.3.31}$$

用类似方法，得到

$$P_s = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_s},\quad q_s = -\frac{\partial F_3}{\partial p_s},\qquad H^* = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \tag{5.3.32}$$

此外，为保证变换的可逆性，要求下式成立

$$\det\left[\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_k \partial Q_s}\right] \neq 0 \tag{5.3.33}$$

4. 第四类母函数

记作 F_4，有形式

$$U_4 = F_4(p_s, P_s, t) + \sum_{s=1}^{n} p_s q_s - \sum_{s=1}^{n} P_s Q_s \tag{5.3.34}$$

用类似方法，得到

$$q_s = -\frac{\partial F_4}{\partial p_s},\quad Q_s = \frac{\partial F_4}{\partial P_s},\qquad H^* = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \tag{5.3.35}$$

此外，为了保证变换的可逆性，要求成立

$$\det\left[\frac{\partial^2 F_4}{\partial p_k \partial P_s}\right] \neq 0 \tag{5.3.36}$$

以上我们得到了用四类母函数表达的四类正则变换公式。必须说明，这四类正则变换显然不是正则变换的全部。但是，这四类正则变换也是足够广泛的了。和前面这四类正则变换的显式一样，我们事实上可以建立起一个借母函数和价 h 来决定正则变换的一般公式，这可以参看文献〔9〕。

我们注意到，如在上述母函数 U_1，F_2，F_3，F_4 中不显含时间 t，那么显然有 $H^* = H$，这时条件（5.3.13）可以写成

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \mathrm{d}q_s - \sum_{s=1}^{n} P_s \mathrm{d}Q_s = \mathrm{d}U \qquad (5.3.37)$$

这种变换被数学家 S Lie 称作为接触变换。

例 1　证明变换

$$Q = \ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right),\ P = q\mathrm{ctg}\,p \qquad (a)$$

是正则的，并求出与该变换相关的四种类型的母函数。

由式（a）知

$$p\mathrm{d}q - P\mathrm{d}Q = (p + \mathrm{ctg}\,p)\mathrm{d}q - q\mathrm{ctg}^2 p\,\mathrm{d}p = \mathrm{d}(qp + q\mathrm{ctg}\,p)$$

因此，该变换是正则的，母函数为

$$U = qp + q\mathrm{ctg}\,p \qquad (b)$$

在第一类变换下，母函数应选为 q，Q 的函数。

由式（a）得

$$p = \arccos\sqrt{1 - q^2 \mathrm{e}^{2Q}}$$

于是式（b）可以写成

$$U_1 = q\arccos\sqrt{1 - q^2\mathrm{e}^{2Q}} + \sqrt{\mathrm{e}^{-2Q} - q^2} \qquad (c)$$

作为验证，由式（5.3.17）得

$$p = \frac{\partial U_1}{\partial q} = \arccos\sqrt{1 - q^2\mathrm{e}^{2Q}},\quad P = -\frac{\partial U_1}{\partial Q} = \sqrt{\mathrm{e}^{-2Q} - q^2}$$

对第二类变换，母函数应选 q，P 的函数，由式（a）得

$$p = \mathrm{arctg}\frac{q}{P},\quad Q = -\ln\sqrt{q^2 + P^2}$$

考虑到式（b）和式（5.3.23），得

$$\begin{aligned} F_2 = U_2 + QP &= qp + q\mathrm{ctg}\,p + QP \\ &= q\mathrm{arc\,tg}\frac{q}{P} + P(1 - \ln\sqrt{q^2 + P^2}) \end{aligned} \qquad (d)$$

作为验证，由式（5.3.25）知

$$p=\frac{\partial F_2}{\partial q}=\operatorname{arctg}\frac{q}{p},\quad Q=\frac{\partial F_2}{\partial P}=-\ln\sqrt{q^2+P^2}$$

对于第三类变换，母函数应选为p，Q的函数，由式（a）得

$$q=\mathrm{e}^{-Q}\sin p$$

由式（5.3.31）知

$$F_3=U_3-qp=qp+q\operatorname{ctg}p-qp=e^{-Q}\cos p \qquad (e)$$

用式（5.3.32）来验证

$$P=-\frac{\partial F_3}{\partial Q}=-\mathrm{e}^{-Q}\cos p,\quad q=-\frac{\partial F_3}{\partial p}=\mathrm{e}^{-Q}\sin p$$

对于第四类变换，母函数取为p，P的函数，由式（a）得

$$q=P\operatorname{tg}p,\quad Q=\ln\frac{\cos p}{P}$$

由式（5.3.34）得

$$F_4=U_4-pq+PQ=P+p\ln\frac{\cos p}{P} \qquad (f)$$

用式（5.3.35）检验，表明

$$q=-\frac{\partial F_4}{\partial p}=P\operatorname{tg}p,\quad Q=\frac{\partial F_4}{\partial P}=\ln\frac{\cos p}{P}$$

在所有情况下，母函数都不显含t，因此

$$H^*=H$$ ‖

例2　用正则变换求解一平面谐振子的运动。

所谓平面谐振子是指一质量为m的质点在势能函数$V=\frac{1}{2}m\cdot(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2)$的影响下在平面$Oxy$上的运动。此时Hamilton函数为

$$H=T+V=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2)+\frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2)$$

如规定母函数为

$$U_1=\frac{1}{2}m(\omega_1x^2\operatorname{ctg}Q_1+\omega_2y^2\operatorname{ctg}Q_2)$$

它属于第一类母函数，由式（5.3.17）得

$$p_x=\frac{\partial U_1}{\partial x}=m\omega_1 x\mathrm{ctg}Q_1,\qquad p_y=\frac{\partial U_1}{\partial y}=m\omega_2 y\mathrm{ctg}Q_2$$

$$P_1=-\frac{\partial U_1}{\partial Q_1}=\frac{1}{2}m\omega_1 x^2\csc^2 Q_1,\quad P_2=-\frac{\partial U_2}{\partial Q_2}=\frac{1}{2}m\omega_2 y^2\csc^2 Q_2$$

将所得 p_x，p_y 代入式（5.3.17）最后一式可求得

$$H^*=\frac{1}{2}m(\omega_1^2 x^2\csc^2 Q_1+\omega_2^2 y^2\csc^2 Q_2)$$

$$=\omega_1 P_1+\omega_2 P_2$$

故用新的正则变换表示的谐振子的运动方程为

$$\dot{P}_1=-\frac{\partial H^*}{\partial Q_1}=0,\quad \dot{P}_2=-\frac{\partial H^*}{\partial Q_2}=0$$

$$\dot{Q}_1=\frac{\partial H^*}{\partial P_1}=\omega_1,\qquad \dot{Q}_2=\frac{\partial H^*}{\partial P_2}=\omega_2$$

积分得

$$P_1=C_1,\ P_2=C_2,\ Q_1=\omega_1 t+\varepsilon_1,\ Q_2=\omega_2 t+\varepsilon_2$$

其中 C_1，C_2，ε_1，ε_2 为积分常数，由初始条件确定。而谐振子在 Oxy 平面上的运动方程，回到原来坐标，是

$$x=\sqrt{\frac{2C_1}{m\omega_1}}\sin(\omega_1 t+\varepsilon_1)$$

$$y=\sqrt{\frac{2C_2}{m\omega_2}}\sin(\omega_2 t+\varepsilon_2)$$

此例表明，在正则变换下，新方程较原方程要简单得多，由原无循环积分的系统变成了有循环积分的系统。

5.3.3 Mathieu 变换和点变换

1. Mathieu 变换

对于正则变换

$$\sum_{s=1}^{n} p_s\mathrm{d}q_s-\sum_{s=1}^{n}P_s\mathrm{d}Q_s+(H^*-H)\mathrm{d}t=\mathrm{d}U$$

若 $H^*=H$，$U=0$，则成为一特殊的正则变换，此时

$$\sum_{s=1}^{n} P_s \mathrm{d}Q_s = \sum_{s=1}^{n} p_s \mathrm{d}q_s \tag{5.3.38}$$

这种变换首先由 Mathieu 于1874年所研究。容易证明，这种正则变换也构成一个群，并且显然是一般正则变换群的子群[25]。

2．点变换

若 Q 单独由 q 决定，P 由 p 决定，那么这种变换称为增广点变换，其变换式为

$$Q_s = Q_s(q_k),\quad P_s = P_s(p_k),\qquad (s,k=1,\cdots,n) \tag{5.3.39}$$

如果 $Q_s(q)$ 和 $P_s(p)$ 是线性函数，那么这种变换称为增广线性点变换，它的表达式为

$$Q_s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{sk} q_k,\quad P_s = \sum_{k=1}^{n} \beta_{sk} p_k \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{5.3.40}$$

其中 α_{sk}，β_{sk} 都是常数。

命题 3　增广线性点变换（5.3.40）的系数只要满足

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha_{sr}\beta_{sk} = \delta_{rk},\qquad (r,k=1,\cdots,n) \tag{5.3.41}$$

则其必为正则变换。

〔证明〕　利用式（5.3.40），我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{n} P_s \mathrm{d}Q_s - \sum_{s=1}^{n} p_s \mathrm{d}q_s \\
&= \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \beta_{sk} p_k \sum_{r=1}^{n} \alpha_{sr} \mathrm{d}q_r - \sum_{s=1}^{n} p_s \mathrm{d}q_s \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_k \mathrm{d}q_k \sum_{s=1}^{n} \beta_{sk}\alpha_{sk} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{r=1 \\ (r\neq k)}}^{n} p_k \mathrm{d}q_k \sum_{s=1}^{n} \beta_{sk}\alpha_{sr} \\
&\quad - \sum_{s=1}^{n} p_s \mathrm{d}q_s
\end{aligned}$$

显然，只要式（5.3.41）满足，则

$$\sum_{s=1}^{n} P_s \mathrm{d}Q_s - \sum_{s=1}^{n} p_s \mathrm{d}q_s = \sum_{k=1}^{n} p_k \mathrm{d}q_k - \sum_{s=1}^{n} p_s \mathrm{d}q_s = 0$$

因此，这时变换（5.3.40）是 Mathieu 变换，当然更是正则变换。‖

将系数 β_{ks} 排成行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \cdots \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \cdots \beta_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} \cdots \beta_{nn} \end{vmatrix}$$

令

$$\alpha_{ks} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_{ks}}, \qquad (k, s = 1, \cdots, n) \qquad (5.3.42)$$

显然，由此规定的 α_{ks}，β_{ks} 满足式（5.3.41）。

若 $\alpha_{ks} = \beta_{ks}$，那么条件（5.3.41）成为

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha_{sr} \alpha_{sk} = \delta_{rk} \qquad (5.3.43)$$

（5.3.43）可视为 n 维空间的坐标轴方向的正交条件，因此这时的变换式（5.3.40）被称为正交变换。

研究一理想，完整，有势的力学系统，它的广义坐标为 q_1，…，q_n。现在假定再另外引入一组广义坐标 Q_1，…，Q_n，它和原广义坐标由可逆的位形变换关系来联系

$$Q_s = f_s(q_1, \cdots, q_n, t) \qquad (s = 1, \cdots, n) \qquad (5.3.44)$$

满足条件

$$\frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(q_1, \cdots, q_n)} \neq 0$$

这种变换称为点变换。显然这种变换也构成变换群，并且也是正则变换的子群。它的母函数是

$$F_2=\sum_{s=1}^{n} f_s(q_1,\cdots,q_n,t)P_s \tag{5.3.45}$$

其变换式是

$$\begin{aligned} p_s&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial q_s}P_k,\quad Q_s=f_s(q_1,\cdots,q_n,t),\\ H^*&=H+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_s}{\partial t}P_s \end{aligned} \tag{5.3.46}$$

这种变换反映了同一系统的两种不同自然正则描述之间的变换。

5.3.4 无限小正则变换

考虑第二类母函数

$$F_2=\sum_{s=1}^{n} q_sP_s \tag{5.3.47}$$

利用式（5.3.25），得到正则变换的显式为

$$p_s=\frac{\partial F_2}{\partial q_s}=P_s,\quad Q_s=\frac{\partial F_2}{\partial P_s}=q_s,\quad H^*=H+\frac{\partial F_2}{\partial t}=H \tag{5.3.48}$$

并且

$$\det\left[\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_k\partial P_s}\right]=1\neq 0$$

显然，这就是相空间的恒等变换。

现假设新相坐标（Q_s,P_s）与旧相坐标（q_s,p_s）之差为无限小的正则变换，可写为

$$Q_s=q_s+\delta q_s,\quad P_s=p_s+\delta p_s,\qquad (s=1,\cdots,n) \tag{5.3.49}$$

显然，无限小正则变换与恒等变换之差为无限小。考虑到式（5.3.47），则无限小正则变换的母函数可写为

$$F_2=\sum_{s=1}^{n} q_sP_s+\varepsilon G(q,P,t) \tag{5.3.50}$$

式中 ε 是无限小参数。于是，我们有

$$p_s=\frac{\partial F_2}{\partial q_s}=P_s+\epsilon\frac{\partial G}{\partial q_s},\quad Q_s=\frac{\partial F_2}{\partial P_s}=q_s+\epsilon\frac{\partial G}{\partial P_s}$$

或

$$\delta p_s=P_s-p_s=-\epsilon\frac{\partial G}{\partial q_s},\quad \delta q_s=Q_s-q_s=\epsilon\frac{\partial G}{\partial P_s} \tag{5.3.51}$$

因为 P_s 与 p_s 之差是无限小，$G(q,P,t)$ 中的 P 可以近似地以 p 代替，而将 G 看成是 (q,p,t) 的函数，这样，式（5.3.51）可以改写成

$$\delta p_s=-\epsilon\frac{\partial G}{\partial q_s},\quad \delta q_s=\epsilon\frac{\partial G}{\partial p_s} \tag{5.3.52}$$

由于上式成立，我们将用 G 代替 F_2，称之为无限小正则变换的母函数。

在特殊情况下，我们可选用 Hamilton 函数 $H(q,p,t)$ 作为母函数 $G(q,p,t)$，$\mathrm{d}t$ 作为 ϵ。于是，由式（5.3.52），得

$$\delta p_s=-\mathrm{d}t\frac{\partial H}{\partial q_s}=\dot{p}_s\mathrm{d}t=\mathrm{d}p_s,\quad \delta q_s=\mathrm{d}t\frac{\partial H}{\partial p_s}=\dot{q}_s\mathrm{d}t=\mathrm{d}q_s \tag{5.3.53}$$

上式表明：力学系统由时刻 t 的相点 (q_s,p_s)，到时间 $t+\mathrm{d}t$ 的相点 (Q_s,P_s) 之间的状态变换，就是用 Hamilton 函数 $H(q,p,t)$ 作为母函数，无限小时间 $\mathrm{d}t$ 作为无限小参数的无限小正则变换。我们把由 Hamilton 正则方程决定的这种相空间的相流称作无限小动力学变换。显然，我们有下述结论

命题 4 由 Hamilton 正则方程决定的无限小动力学变换是无限小正则变换。

动力学系统从 t_0 至 t 有限时间内的运动，可以看成是由许多相继的无限小时刻 $\mathrm{d}t$ 的正则变换表达出来的。这许多持续的无限小正则变换，合成一个单独的有限时间 $t-t_0$ 的正则变换。所以，动力学系统自 t_0 时的相点 $(q_0,\ p_0)$，经运动变化到 t 时的相点 $(q,\ p)$，可用时间的连续函数的正则变换表示出来。Hamilton 函数 $H(q,p,t)$ 就是变换的母函数。

§5.4 Hamilton-Jacobi 方法

将 Hamilton 正则方程的积分问题归结为求某个一阶偏微分方程的完全积分问题，这就是积分 Hamilton 正则方程的 Hamilton-Jacobi 方法。它是分析动力学研究最有意义的成果之一，是积分完整系统运动微分方程的重要工具。

5.4.1 化零正则变换

1. 化零正则变换

考虑一个 Hamilton 正则系统

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\quad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s},\qquad (s=1,\cdots,n) \tag{5.4.1}$$

其中的 Hamilton 函数 $H=H(q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n,t)$。

现在来研究一个由第一类母函数 $S(q_1,\cdots,q_n,Q_1,\cdots,Q_n,t)$ 产生的正则变换

$$(q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n)\longleftrightarrow(Q_1,\cdots,Q_n,P_1,\cdots,P_n)$$

根据式 (5.3.17)，这个正则变换的变换关系式为

$$p_s=\frac{\partial S}{\partial q_s},\quad P_s=-\frac{\partial S}{\partial Q_s},\qquad H^*=H+\frac{\partial S}{\partial t},\qquad (s=1,\cdots,n) \tag{5.4.2}$$

显然，经过式 (5.4.2) 这样的正则变换，Hamilton 正则系统 (5.4.1) 在新的相空间 $(Q_1,\cdots,Q_n,P_1,\cdots,P_n)$ 内仍然是正则系统。因此，如果能选择这样的母函数 S，使得成立

$$H^*\equiv 0 \tag{5.4.3}$$

那么，我们称由这种母函数生成的正则变换 (5.4.2) 是化零正则变换。

如果我们找到了化零正则变换，而由于 $H^*\equiv 0$，所以系统的动力学方程在相空间 $(Q_1,\cdots,Q_n,P_1,\cdots,P_n)$ 里变得极为简单。

此时，所有的广义坐标 $Q_1,\cdots,Q_n$ 都是循环坐标，因而有 n 个循环积分

$$P_i=\beta_i=\text{const.},\qquad (i=1,\cdots,n)\qquad (5.4.4)$$

此外，因为

$$\dot{Q}_i=\frac{\partial H^*}{\partial P_i}=0,\qquad (i=1,\cdots,n)$$

所以有

$$Q_i=\alpha_i=\text{const.},\qquad (i=1,\cdots,n)\qquad (5.4.5)$$

即系统的所有新的广义坐标 $Q_1,\cdots,Q_n$ 本身也都是常数。因此，系统（5.4.1）经过化零正则变换之后，新的正则变量都是积分常数。

将式（5.4.4）和（5.4.5）这 $2n$ 个积分代入变换公式（5.4.2）后，得

$$\beta_i=-\left.\frac{\partial S}{\partial Q_i}\right|_{Q_j=\alpha_j}=-\frac{\partial S|_{Q_j=\alpha_j}}{\partial\alpha_i}=-\frac{\partial S(q_1,\cdots,q_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,t)}{\partial\alpha_i}$$

$$(i=1,\cdots,n)\qquad (5.4.6)$$

$$p_i=\left.\frac{\partial S}{\partial q_i}\right|_{Q_j=\alpha_j}=\frac{\partial S(q_1,\cdots,q_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,t)}{\partial q_i}$$

$$(i=1,\cdots,n)\qquad (5.4.7)$$

如果有了化零正则变换的母函数 S，我们就可以建立（5.4.6），（5.4.7）这些方程。从（5.4.6）这 n 个方程可以解出

$$q_i=q_i(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n,t),\qquad (i=1,\cdots,n)\quad (5.4.8)$$

其中 α_1，…，α_n，β_1，…，β_n 都是积分常数。显然式（5.4.8）就是系统 Lagrange 方程的通解。再由（5.4.7）这 n 个方程，可以进一步决定出

$$p_i=\left.\frac{\partial S(q_1,\cdots,q_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,t)}{\partial q_i}\right|_{q_j=q_j(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n,t)}$$

$$=p_i(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n,t),\qquad (i=1,\cdots,n)\quad (5.4.9)$$

式（5.4.8）和（5.4.9）结合在一起，构成了系统 Hamilton 正则方程（5.4.1）的通解。

由此可见，找到化零正则变换的母函数 S 是全部问题的关键。

2 化零正则变换与 Hamilton-Jacobi 方程

化零正则变换母函数 S 需满足的条件是式（5.4.3），即

$$H^* = \left[H + \frac{\partial S}{\partial t}\right]^* = \left[H(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n, t) + \frac{\partial S}{\partial t}\right]^* = 0 \tag{5.4.10}$$

注意到式（5.4.2），则式（5.4.10）成为

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \cdots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right)\right]^* = 0 \tag{5.4.11}$$

既然式（5.4.11）左端在表达成为新正则变量时恒等于零，那么在未变之前也应恒等于零。所以，母函数应满足的条件就是如下的 Hamilton-Jacobi 偏微分方程

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \cdots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) = 0 \tag{5.4.12}$$

如果我们能够找到 Hamilton-Jacobi 偏微分方程的某个全积分，就能够得到化零正则变换的母函数，从而完全解决了系统的动力学问题。当然，寻找 Hamilton-Jacobi 偏微分方程的全积分并不是寻找化零正则变换的唯一途径。Whittaker 很早就提出过另外一种设想[7]。根据这种设想和 Darboux 定理也可以给出一种直接构造化零正则变换的方法[10]。但是不可否认，寻找 Hamilton-Jacobi 方程的全积分却是积分 Hamilton 正则方程的最重要的方法。这实际就是著名的 Hamilton-Jacobi 方法。下一小节，我们换一个角度来重新证明，Hamilton-Jacobi 方程的全积分可以给出 Hamilton 正则方程的完全解。

5.4.2 Hamilton-Jacobi 定理

1. Hamilton-Jacobi 定理

Hamilton-Jacobi 偏微分方程是一个一阶非线性偏微分方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_1,\cdots,q_n,\ \frac{\partial S}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_n},t\right)=0$$

这个方程的未知函数是 S，自变量是 q_1，…，q_n，t，总共 $n+1$ 个独立变量。因此，这个偏微分方程的全积分应该包含 $n+1$ 个独立的待定常数。注意到，在 Hamilton-Jacobi 方程中，未知函数 S 只是以各个偏导数项出现，因此若 S 是一个解，则 $S+\alpha_{n+1}$ 也必然是解，这里 α_{n+1} 是一个任意常数。由此可见，Hamilton-Jacobi 偏微分方程的全积分一定含有一个相加常数。今后我们在积分常数中略去这个相加常数。所以，我们只要找到一个不包括相加常数在内，而另有 n 个独立积分常数的积分，就算找到了 Hamilton-Jacobi 方程的一个全积分。

Hamilton-Jacobi 定理 设函数 $H(q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n,t)$ 为力学系统的 Hamilton 函数，如果 $S=S(q_1,\cdots,q_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,t)$ 是 Hamilton-Jacobi 方程的一个全积分，亦即：$S\in C^2$，α_1，…，α_n 是独立的积分常数，即

$$\det\left[\frac{\partial^2 S}{\partial q_k\partial\alpha_s}\right]\neq 0$$

并且满足 Hamilton-Jacobi 偏微分方程。那么，正则方程

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\ \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s},\qquad (s=1,\cdots,n)\quad (5.4.13)$$

的全部 $2n$ 个第一积分有下列形式

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_s}=\beta_s,\qquad (s=1,\cdots,n)\qquad (5.4.14)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_s}=p_s,\qquad (s=1,\cdots,n)\qquad (5.4.15)$$

其中 $\beta_s(s=1,\cdots,n)$ 为新的任意常数。

〔证明〕 首先，我们证明关系（5.4.14）是系统的第一积

分，即证明它对时间 t 的全导数由于式（5.4.13）而恒等于零。现在，将式（5.4.14）对时间求全导数，注意到 q_k 依赖于 t，得

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial q_k}\dot{q}_k=0$$

其中 $\dot{q}_k$ 用式（5.4.13）替代而 p_k 要用式（5.4.15）替代，因此有

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial q_k}\frac{\partial H\left(t,q,\dfrac{\partial S}{\partial q}\right)}{\partial\left(\dfrac{\partial S}{\partial q_k}\right)}=0 \tag{5.4.16}$$

必须证明式（5.4.16）是恒等式。根据全积分的意义知，当将 $S(q,\alpha,t)$ 代入 Hamilton-Jacobi 偏微分方程时，有

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t,q,\frac{\partial S}{\partial q}\right)\equiv 0 \tag{5.4.17}$$

将上式对 α_s 求导数，有

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_s}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H\left(t,q,\dfrac{\partial S}{\partial q}\right)}{\partial\left(\dfrac{\partial S}{\partial q_k}\right)}\frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial \alpha_s}\equiv 0 \tag{5.4.18}$$

考虑到 $S\in C^2$，可见式（5.4.16）和（5.4.18）重合。即证明了式（5.4.16）为恒等式。其次，我们可以类似地证明式（5.4.15）也是第一积分。为此，将式（5.4.15）对 t 求全导数，得

$$\dot{p}_s=\frac{\partial^2 S}{\partial q_s \partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial q_s \partial q_k}\dot{q}_k$$

其中

$$\dot{q}_k=\frac{\partial H\left(t,q,\dfrac{\partial S}{\partial q}\right)}{\partial\left(\dfrac{\partial S}{\partial q_k}\right)}$$

因此有

$$-\dot{p}_s+\frac{\partial^2 S}{\partial q_s\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial q_s\partial q_k}\frac{\partial H\left(t,q,\frac{\partial S}{\partial q}\right)}{\partial\left(\frac{\partial S}{\partial q_k}\right)}=0 \quad (5.4.19)$$

将恒等式（5.4.17）两端对 q_s 求导数，得到

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t\partial q_s}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H\left(t,q,\frac{\partial S}{\partial q}\right)}{\partial\left(\frac{\partial S}{\partial q_k}\right)}\frac{\partial^2 S}{\partial q_k\partial q_s}+\frac{\partial H}{\partial q_s}\equiv 0 \quad (5.4.20)$$

考虑到 $S\in C^2$，$\frac{\partial H}{\partial q_s}=-\dot{p}_s$，因此式（5.4.19）与（5.4.20）重合，即式（5.4.19）亦是恒等式。命题得证。‖

2. Hamilton-Jacobi 定理的应用

利用 Hamilton-Jacobi 定理求解力学系统问题时，解题步骤如下：根据 Hamilton 函数写出 Hamilton-Jacobi 方程（5.4.12）；求此偏微分方程的全积分。作出式（5.4.14），（5.4.15）。这是 $2n$ 个代数方程，解此方程组得

$$\begin{aligned}&q_s=q_s(t,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n),\\&p_s=p_s(t,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n),\quad(s=1,\cdots,n)\end{aligned}\quad (5.4.21)$$

这种积分正则方程的方法就叫作 Hamilton-Jacobi 方法。

对于 $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ 的稳定的 Hamilton 系统，即存在广义能量积分 $H=h=\text{const.}$ 的系统，令

$$S=-ht+W \quad (5.4.22)$$

其中 W 不含时间 t，则 Hamilton-Jacobi 方程可以简化为

$$H\left(q_1,\cdots,q_n,\frac{\partial W}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial W}{\partial q_n}\right)=h \quad (5.4.23)$$

5.4.3 Liouville和Stäckel 情形

分离变量方法是积分 Hamilton-Jacobi 偏微分方程的最常用的研究方法。对此最早做出贡献的是Liouville，其后 Stäckel

将 Liouville 的结论推广到更一般的系统。

1. Stäckel 定理

我们来研究 n 个自由度的正交系统

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}g^{ii}p_i^2-U \tag{5.4.24}$$

其中 g^{11}, g^{22}, …, g^{nn}, U 均是广义坐标 q_1, …, q_n 的函数，并且 $g^{ii}\geqslant 0$。此时，相应的 Hamilton-Jacobi 方程取形

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}g^{ii}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2-U=h=\alpha_1 \tag{5.4.25}$$

我们假设，方程（5.4.25）中的变量可分离，

亦即
$$W=\sum_{\sigma=1}^{n}W_\sigma(q_\sigma,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

这时，
$$p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i}=\frac{\mathrm{d}W_i}{\mathrm{d}q_i}=f_i(q_i,\alpha);\quad f_i^2=F_i(q_i,\alpha)$$

这里，为简单起见，引入函数 f_i 和 F_i。于是，式（5.4.25）可以表示成

$$\sum_{i=1}^{n}g^{ii}F_i=2(U+\alpha_1) \tag{5.4.26}$$

很显然，将全积分代入式（5.4.25）时，式（5.4.26）应变为恒等式。此恒等式在任意值 α 下成立。将此恒等式对 $\alpha_k(k=1,\cdots,n)$ 求偏导数，我们得到相对 n 个函数 $g^{ii}(i=1,\cdots,n)$ 的 n 个线性方程

$$\sum_{i=1}^{n}g^{ii}F_{ki}=2\delta_{k1},\quad (k=1,\cdots,n) \tag{5.4.27}$$

其中

$$F_{ki}=\frac{\partial F_i}{\partial\alpha_k}$$

式（5.4.27）这个线性非齐次方程组的行列式异于零。实际上

$$\Delta=\det\|F_{ki}\|=\det\left\|2f_i\frac{\partial f_i}{\partial\alpha_k}\right\|=2^n f_1f_2\cdots f_n\cdot\det\left\|\frac{\partial f_i}{\partial\alpha_k}\right\|$$

$$=2^n f_1f_2\cdots f_n\cdot\det\left\|\frac{\partial^2 W}{\partial q_i\partial\alpha_k}\right\|$$

因为 W 是全积分，故知

$$\det\left\|\frac{\partial^2 W}{\partial q_i\partial\alpha_k}\right\|\neq 0$$

因此 $$\Delta\neq 0$$

将式（5.4.27）相对 g^{ii} 解出，我们得到

$$g^{ii}=\frac{2}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial F_{1i}} \tag{5.4.28}$$

此时，如果考虑到式（5.4.28）以及关系

$$\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Delta}{\partial F_{li}}F_{ki}=\delta_{kl} \tag{5.4.29}$$

力函数 U 取形式

$$U=\sum_{i=1}^{n}(f_i^2-\alpha_1F_{1i})\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial F_{1i}} \tag{5.4.30}$$

设 α_1^0，α_2^0，…，α_n^0 是某个任意常数组，在此组下

$$\Delta|_{\alpha\to\alpha_0}\neq 0$$

对这些值 α，函数 F_{ki} 及（$f_i^2-\alpha_1F_{ki}$）过渡到变量 q_i 的确定函数，亦即

$$F_{ki}|_{\alpha\to\alpha_0}=\varphi_{ik}(q_i),\ (f_i^2-\alpha_1F_{1i})|_{\alpha\to\alpha_0}=\psi_i(q_i)$$

因此，得

$$g^{ii}=\frac{2}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{i1}},\quad U=\sum_{i=1}^{n}\psi_i\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{i1}} \tag{5.4.31}$$

其中 $\Delta=\det\|\varphi_{ik}\|$。

反过来，现在设存在 n 个任意函数 $\psi_i(q_i)$ 及 n^2 个函数 φ_{ik}，在选取它们时，仅加一个限制

$$\Delta=\det\|\varphi_{ik}\|\neq 0$$

并设 Hamilton-Jacobi 方程（5.4.25）中的 g^{ii} 和 U 可用关系（5.4.31）表示。我们来证明，在这种情形中Hamilton-Jacobi

方程中的变量可以分离。实际上，据关系（5.4.29）

$$\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_{ik}\right)\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{i1}}=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ik}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{i1}}\right)=\alpha_1 \tag{5.4.32}$$

考虑到式（5.4.31）和（5.4.32），则式（5.4.25）可以表示为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{i1}}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2-\psi_i-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_{ik}\right]\equiv 0 \tag{5.4.33}$$

式（5.4.33）恒满足，如果取

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2-\psi_i-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_{ik}=0, \qquad (i=1,\cdots,n)$$

这时

$$\frac{\partial W}{\partial q_i}=\sqrt{\psi_i+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_{ik}} \qquad (i=1,\cdots,n)$$

于是，Hamilton-Jacobi 方程的全积分取如下形式

$$W=\sum_{i=1}^{n}W_i=\sum_{i=1}^{n}\int\sqrt{\psi_i+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_{ik}}\,\mathrm{d}q_i \tag{5.4.34}$$

由上面的证明，我们得到如下定理。

Stäckel 定理　n 个自由度的正交系统（5.4.24）为可分离变量的充要条件是，存在 $n(n+1)$ 个函数

$$\varphi_{ik}(q_i),\ \psi_i(q_i), \qquad (i,k=1,\cdots,n)$$

它们中的每一个函数仅依赖于一个变量，并具有性质

$$\Delta=\det\|\varphi_{ik}(q_i)\|\neq 0$$

$$g^{ii}=\frac{2}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{i1}},\quad U=\sum_{i=1}^{n}\psi_i\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{i1}}$$

2. Liouville 情形

现在我们研究 Stäckel 定理的特殊情形。设函数 φ_{ik} 是这样的，即

$$\varphi_{ik}=0, \qquad (i\neq k, k=2,\cdots,n) \tag{5.4.35}$$

则

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{i1}}=(-1)^{i+1}\begin{vmatrix}
\varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14}\cdots\varphi_{1i-1} & \varphi_{1i} & \varphi_{1i+1} & \cdots\varphi_{1n} \\
\varphi_{22} & 0 & 0\ \cdots\ 0 & 0 & 0 & \cdots\ 0 \\
0 & \varphi_{33} & 0\ \cdots\ 0 & 0 & 0 & \cdots\ 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0\ \cdots\varphi_{i-1\,i-1} & 0 & 0 & \cdots\ 0 \\
0 & 0 & 0\ \cdots\ 0 & 0 & \varphi_{i+1\,i+1}\cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0\ \cdots\ 0 & 0 & 0 & \cdots\ \varphi_{nn}
\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+1+(i-1)+1}\varphi_{1i}\begin{vmatrix}
\varphi_{22} & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & \cdots 0 \\
0 & \varphi_{33} & 0\cdots & 0 & 0 & \cdots 0 \\
0 & 0 & \varphi_{44}\cdots & 0 & 0 & \cdots 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0\cdots\varphi_{i-1\,i-1} & & 0 & \cdots 0 \\
0 & 0 & 0\cdots & 0 & \varphi_{i+1\,i+1}\cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & \cdots\varphi_{nn}
\end{vmatrix}$$

现在，我们选非零函数 φ_{ij} 如下

$$\varphi_{1i}=-A_i(q_1),\quad \varphi_{ii}=A_i(q_i), \qquad (i=2,\cdots,n) \tag{5.4.36}$$

$$\varphi_{i1}=2\Phi_iA_i,\quad \Phi_i=\Phi_i(q_i), \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{5.4.37}$$

这时

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{i1}}=(-1)^{2i+1}\varphi_{1i}\varphi_{22}\varphi_{33}\cdots\varphi_{i-1i-1}\varphi_{i+1i+1}\cdots\varphi_{nn}$$

$$=A_1A_2\cdots A_{i-1}A_{i+1}\cdots A_n$$

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{i1}}\varphi_{i1}=2A_1A_2\cdots A_n\sum_{i=1}^{n}\Phi_i$$

如果函数 ψ_i 也选取如下

$$\psi_i=2\theta_iA_i,\quad \theta_i=\theta_i(q_i), \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{5.4.38}$$

那么，关系式（5.4.31）可以表示为

$$g^{ii}=\frac{1}{A_i\sum\limits_{k=1}^{n}\Phi_k},\quad U=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\Phi_k} \tag{5.4.39}$$

带有这些值 g^{ii} 及 U 的 Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{A_i\sum_{k=1}^{n}\Phi_k}p_i^2-\frac{\sum_{k=1}^{n}\theta_k}{\sum_{k=1}^{n}\Phi_k}=\alpha_1 \qquad (5.4.40)$$

其全积分可由式（5.4.34）得到，只要我们将式（5.4.35）—（5.4.38）代入式（5.4.34）中。

现在，我们直接由式（5.4.40）求其全积分。由式(5.4.40)可得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{A_i}p_i^2-2\theta_i-2\alpha_1\Phi_i\right)=0 \qquad (5.4.41)$$

这里括号中的每个表达式仅依赖于一个变量。式（5.4.41）可满足，如果令

$$\frac{1}{A_i}p_i^2-2\theta_i-2\alpha_1\Phi_i=2a_i, \qquad (i=1,\cdots,n)$$

并且 n 个常量 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=0 \qquad (5.4.42)$$

这时

$$p_i=\sqrt{2A_i(\theta_i+\alpha_1\Phi_i+a_i)}$$

因此，式（5.4.40）的全积分为

$$W=\sum_{i=1}^{n}\int\sqrt{2A_i(\theta_i+\alpha_1\Phi_i+a_i)}\mathrm{d}q_i \qquad (5.4.43)$$

其中 $a_i(i=1,\cdots,n)$ 必须满足式（5.4.42）。

这个带 n 个自由度系统的运动方程的可积情形由 Liouville 求得，因此在文献中被称为 Liouville 情形。

例 1　求质点在均匀重力场中沿双曲抛物面运动问题的全积分。

双曲抛物面在直角坐标中的方程为

$$x^2-y^2=2pz, \qquad (p=\text{const.}) \qquad (a)$$

取 x，y 作为广义坐标，则质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

其中 m 为质点的质量。由式(a)知

$$z=\frac{x^2-y^2}{2p}, \quad \dot{z}=\frac{x\dot{x}-y\dot{y}}{p}$$

因此

$$T=\frac{m}{2}\left[\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)\dot{x}^2-\frac{2xy\dot{x}\dot{y}}{p^2}+\left(1+\frac{y^2}{p^2}\right)\dot{y}^2\right]$$

$$U=-mgz=-\frac{mg}{2p}(x^2-y^2)$$

在广义坐标 x,y 下，变量不可分离。我们转向另一些变量 q_1 和 q_2，令

$$x=\pm\sqrt{\frac{(q_1-p)(q_2+p)}{2}}; \quad y=\pm\sqrt{\frac{(q_1+p)(q_2-p)}{2}} \tag{b}$$

则 $z=\dfrac{q_2-q_1}{2}$

$$T=m\frac{(q_1+q_2)}{8}\left(\frac{q_1}{q_1^2-p^2}\dot{q}_1^2+\frac{q_2}{q_2^2-p^2}\dot{q}_2^2\right)$$

$$U=\frac{1}{2}mg(q_1-q_2)$$

故广义动量

$$p_1=\frac{m(q_1+q_2)}{4}\frac{q_1\dot{q}_1}{q_1^2-p^2}, \quad p_2=\frac{m(q_1+q_2)}{4}\frac{q_2\dot{q}_2}{q_2^2-p^2} \tag{c}$$

由式(c)可将 $\dot{q}_1$ 和 $\dot{q}_2$ 解为 p_1,p_2,q_1,q_2 的函数，于是我们可以求出 Hamilton 函数为

$$H=\frac{2}{m(q_1+q_2)}\left(\frac{q_1^2-p^2}{q_1}p_1^2+\frac{q_2^2-p^2}{q_2}p_2^2\right)+\frac{mg(q_2-q_1)}{2}$$

如果取

$$\Phi_1=q_1;\ A_1=\frac{mq_1}{4(q_1^2-p^2)};\ \theta_1=\frac{mgq_1^2}{2}$$

$$\Phi_2=q_2;\ A_2=\frac{mq_2}{4(q_2^2-p^2)};\ \theta_2=\frac{-mgq_2^2}{2}$$

则此问题的Hamilton-Jacobi方程有形式（5.4.40）

$$\frac{1}{2}\ \frac{1}{A_1(\Phi_1+\Phi_2)}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2+\frac{1}{2}\ \frac{1}{A_2(\Phi_1+\Phi_2)}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2-\frac{\theta_1+\theta_2}{\Phi_1+\Phi_2}=\alpha_1 \tag{d}$$

方程（d）的全积分，根据式（5.4.53）为

$$W=\int\sqrt{\frac{mq_1}{2(q_1^2-p^2)}\left(\frac{1}{2}mgq_1^2+\alpha_1q_1+a_1\right)}\,\mathrm{d}q_1+\int\sqrt{\frac{mq_2}{2(q_2^2-p^2)}\left(-\frac{1}{2}mgq_2^2+\alpha_1q_2+a_2\right)}\mathrm{d}q_2 \tag{e}$$

其中　$a_1+a_2=0$，α_1是能量常数。‖

5.4.4 Hamilton-Jacobi方法对特殊非完整系统的应用

Hamilton-Jacobi方法是解分析力学问题的强有力的工具。由于数学家和力学家的共同努力，应用Hamilton-Jacobi方法解决完整系统力学问题取得了巨大的成就。但是，将Hamilton-Jacobi方法推广到非完整系统的工作，却遇到了极大的困难，至今仍未取得一般性的结果。但是，在非势广义力和约束反力有广义势的情形，可将非完整系统的运动方程的积分问题归结为有条件的完整系统运动方程的积分问题。

1．带乘子的方程的Lagrange化

设力学系统的位形由n个广义坐标$q_1,\cdots,q_n$确定，系统受有g个一阶非线性非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0,\qquad(\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n)\tag{5.4.44}$$

系统的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\Lambda_s, \qquad (s=1,\cdots,n) \quad (5.4.45)$$

其中

$$\Lambda_s=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}$$

我们可以由式（5.4.44）和（5.4.45)将Lagrange乘子 λ_β 解为广义坐标，广义速度和时间的函数[1]，即

$$\lambda_\beta=\lambda_\beta(q,\dot{q},t)$$

将其代入式（5.4.45),我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q'_s, \qquad (s=1,\cdots,n) \quad (5.4.46)$$

其中

$$Q'_s=Q_s+\Lambda_s=Q'_s(t,q,\dot{q})$$

根据非完整系统Lagrange力学逆问题的理论[1]，我们有如下结论。

命题1 若 Q'_s 有广义势，即满足自伴随条件

$$\frac{\partial Q'_k}{\partial \dot{q}_i}=-\frac{\partial Q'_i}{\partial \dot{q}_k}, \quad \frac{\partial Q'_i}{\partial q_k}=\frac{\partial Q'_k}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial Q'_k}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i,k=1,\cdots,n) \quad (5.4.47)$$

则非完整系统（5.4.46）有如下解析表达

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L'}{\partial q_s}=0, \qquad (s=1,\cdots,n) \quad (5.4.48)$$

其中

$$L'=T+\sum_{k=1}^{n}q_k\int_0^1 Q'_k(t,\tau q,\tau\dot{q})\mathrm{d}\tau \qquad (5.4.49)$$

注意，因为Lagrange函数不是唯一的，因此命题1给出的构造Lagrange函数的方法并不是唯一的。

引进Hamilton函数和广义动量

$$H'=\sum_{s=1}^{n}p'_s\dot{q}_s-L', \quad p'_s=\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_s}, \qquad (s=1,\cdots,n)$$

则 Hamilton 正则方程为

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H'}{\partial p'_s},\quad \dot{p}'_s=-\frac{\partial H'}{\partial q_s},\qquad (s=1,\cdots,n)\quad (5.4.50)$$

方程组（5.4.50）有完整力学系统正则方程的形式，非完整系统是可以作为有条件的完整力学问题来研究的，即只要系统广义坐标和广义速度的初始值满足非完整约束方程

$$f'_\beta(q_{s0},p'_{s0},t_0)=f_\beta(q_{s0},\dot{q}_{s0}(q_{s0},p'_{s0},t_0),t_0)=0,$$
$$(\beta=1,\cdots,g)\qquad (5.4.51)$$

则式（5.4.50）的解给出所研究的非完整系统运动的相应解[30]。若非完整系统的方程能写成式（5.4.50）形式，则可以直接应用 Hamilton–Jacobi 方法来积分。

命题 2 若找到 Hamilton–Jacobi 方程

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H'\left(\frac{\partial V}{\partial q_s},q_s,t\right)=0\qquad (5.4.52)$$

的全积分 $V(q_1,\cdots,q_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,t)$，则非完整系统有如下形式的 $2n$ 个第一积分

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_s}=\beta_s,\quad \frac{\partial V}{\partial q_s}=p'_s,\qquad (s=1,\cdots,n)\quad (5.4.53)$$

其中常数 α_s,β_s 应满足约束方程

$$f'_\beta(q_s(\alpha_k,\beta_k,t_0),\ p'_s(\alpha_k,\beta_k,t_0),t_0)=0$$

于是，我们有 $2n-g$ 个任意常数。

例 2 设力学系统的位置用两个广义坐标 q_1,q_2 来确定，动能 T 和势能 V 分别为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2),\quad V=0$$

系统所受的非完整约束

$$f=\dot{q}_1+at\dot{q}_2-aq_2+t=0\qquad (a)$$

其中 a 为常数。

系统的 Routh 方程为

$$\ddot{q}_1=\lambda,\quad \ddot{q}_2=\lambda at\qquad (b)$$

将（a）两端对 t 求导，得

$$\ddot{q}_1 + at\ddot{q}_2 + 1 = 0 \qquad (c)$$

将式（b）代入式（c），解得 $\lambda = -\frac{1}{1+a^2t^2}$，于是系统的运动方程可表示为

$$\ddot{q}_1 = -\frac{1}{1+a^2t^2}, \quad \ddot{q}_2 = -\frac{at}{1+a^2t^2}$$

可以求得 L' 为

$$L' = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{a}\dot{q}_1 \text{arc tg} at + \frac{1}{2a}\dot{q}_2 \ln(1+a^2t^2)$$

于是有

$$p'_1 = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 + \frac{1}{a}\text{arc tg} at$$

$$p'_2 = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_2 + \frac{1}{2a}\ln(1+a^2t^2)$$

$$H' = \sum_{s=1}^{2} p'_s \dot{q}_s - L' = \frac{1}{2}\left[p'_1 - \frac{1}{a}\text{arc tg} at\right]^2 + \frac{1}{2}\left[p'_2 - \frac{1}{2a}\ln(1+a^2t^2)\right]^2$$

Hamilton-Jacobi 方程（5.4.51）在此情形下具有形式

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial V}{\partial q_1} - \frac{1}{a}\text{arc tg} at\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial V}{\partial q_2} - \frac{1}{2a}\ln(1+a^2t^2)\right]^2 = 0 \qquad (d)$$

方程（d）的全积分为

$$V = C_1 q_1 + D_1 q_2 + f(t),$$

$$f(t) = -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left[C_1 - \frac{1}{a}\text{arc tg} at\right]^2 + \left[D_1 - \frac{1}{2a}\ln(1+a^2t^2)\right]^2\right\}dt$$

其中 C_1，D_1 为常数。

进而，我们得到

$$\frac{\partial V}{\partial C_1}=C_2,\ \frac{\partial V}{\partial D_1}=D_2$$

其中 C_2，D_2 为新的常数，即

$$q_1-\int_{t_0}^{t_1}\left[C_1-\frac{1}{a}\text{arc tg}at\right]\mathrm{d}t=C_2$$

$$q_2-\int_{t_0}^{t_1}\left[D_1-\frac{1}{2a}\ln(1+a^2t^2)\right]\mathrm{d}t=D_2$$

亦即

$$\begin{aligned}q_1&=-\frac{t}{a}\text{arc tg}at+\frac{1}{2a^2}\ln(1+a^2t^2)-C_1t+C_2\\ q_2&=\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}\text{arc tg}at-\frac{t}{2a}\ln(1+a^2t^2)+D_1t+D_2\end{aligned}\tag{e}$$

其中任意常数必须满足式（5.4.53），由式（a），（e）可得

$$C_1-aD_2=0$$

2．Чаплыгин 系统方程的 Lagrange 化

设系统受有一阶非线性非完整约束

$$\dot{q}_{\epsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_\sigma,\dot{q}_\sigma,t),\qquad(\sigma=1,\cdots,\epsilon;\ \beta=1,\cdots,g;\ \epsilon=n-g)\tag{5.4.54}$$

Чаплыгин 系统的运动方程为

$$\varepsilon_\sigma(\tilde{L})=\Phi_\sigma,\qquad(\sigma=1,\cdots,\epsilon)\tag{5.4.55}$$

其中 $\varepsilon_\sigma=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial}{\partial q_\sigma}$

$$\Phi_\sigma=\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\epsilon+\beta}}\varepsilon_\sigma(\dot{q}_{\epsilon+\beta})\equiv\sum_{\nu=1}^{\epsilon}A_{\sigma\nu}(t,q,\dot{q})\ddot{q}_\nu+B_\sigma(t,q,\dot{q})$$

同样，由非完整 Lagrange 力学逆问题理论知，有下述结论。

命题 3 只要 Φ_σ 有广义势，即满足自伴随条件

$$\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \ddot{q}_\nu} = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial \ddot{q}_\sigma}$$

$$\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \dot{q}_\nu} + \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \ddot{q}_\nu} + \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial \ddot{q}_\sigma}\right) \tag{5.4.56}$$

$$\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial q_\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial q_\sigma} = \frac{1}{2}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)$$

则 Чаплыгин 系统存在解析表达

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L'}{\partial q_\sigma} = 0, \qquad (\sigma = 1, \cdots, \varepsilon) \tag{5.4.57}$$

其中

$$L' = \tilde{L} + \sum_{k=1}^{n} q_k \int_0^1 \Phi_k(t, \tau q, \tau\dot{q}, \tau\ddot{q})\mathrm{d}\tau$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\int_0^1 \sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}(\tau q_k)A_{k\nu}(t, \tau q, \tau\tau' q)\dot{q}_\nu \mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau' \tag{5.4.58}$$

自伴随条件（5.4.56）也被称作 Helmholtz 条件。

引进 Hamilton 函数和广义动量

$$H' = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} p'_\sigma \dot{q}_\sigma - L', \qquad p'_\sigma = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_\sigma} \qquad (\sigma = 1, \cdots, \varepsilon)$$

则 Hamilton 正则方程为

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H'}{\partial p'_\sigma}, \quad \dot{p}'_\sigma = -\frac{\partial H'}{\partial q_\sigma}, \qquad (\sigma = 1, \cdots, \varepsilon) \tag{5.4.59}$$

命题 4 设找到 Hamilton-Jacobi 方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H'\left(q_\sigma, \frac{\partial V}{\partial q_\sigma}, t\right) = 0$$

的全积分 $V(q_\sigma, \alpha_\sigma, t)$，则非完整系统的运动由关系

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_\sigma} = \beta_\sigma, \quad \frac{\partial V}{\partial q_\sigma} = p'_\sigma \qquad (\sigma = 1, \cdots, \varepsilon) \tag{5.4.60}$$

来确定。

如果函数 Φ_σ 不满足 Helmholtz 条件，但是给函数 Φ_σ 添加

一些按运动方程（5.4.55）而变为零的项，则可以得到满足 Helmholtz 条件的函数。

添加项可以按下述方法得到。方程（5.4.55）的某 h 个方程用方程

$$\varepsilon_\sigma(\tilde{L})=\Phi_\sigma+\varphi_\sigma[\varepsilon_\sigma(\tilde{L})-\Phi_\sigma], \qquad (\sigma=1,\cdots,h) \tag{5.4.61}$$

来代替，其中 φ_σ 为任意函数，满足 $\varphi_\sigma(0)=0$。其余方程可选如下形式

$$\varepsilon_{h+\alpha}(\tilde{L})=\Phi_{h+\alpha}+\sum_{\sigma=1}^{h}\varphi_\sigma^{h+\alpha}[\varepsilon_\sigma(\tilde{L})-\Phi_\sigma]$$

$$(\alpha=1,\cdots,\varepsilon-h) \tag{5.4.62}$$

其中 $\varphi_\sigma^{h+\alpha}$ 为任意函数，且 $\varphi_\sigma^{h+\alpha}(0)=0$。

例 3　匀质圆球在粗糙水平面上的自由运动。

设球心的坐标 x,y，三个 Euler 角 ψ,θ,φ。约束方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-a(\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi)\\ \dot{y}&=-a(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi)\end{aligned} \tag{a}$$

圆球的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}\ \frac{2}{5}ma^2(\dot{\psi}^2+\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2+2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta)$$

势能为

$$V=0$$

系统的 Lagrange 函数为

$$L=T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}\ \frac{2}{5}ma^2(\dot{\psi}^2+\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2+2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta) \tag{b}$$

显然这是 Чаплыгин 系统。将式（a）代入式（b）有

$$\tilde{L}=\frac{1}{2}ma^2\left\{\frac{7}{5}\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\frac{2}{5}(\dot{\varphi}^2+\dot{\psi}^2+2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta)\right\}$$

于是

$$\varepsilon_\psi(\tilde{L})=\frac{2}{5}ma^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)$$

$$\varepsilon_\theta(\tilde{L}) = ma^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{7}{5}\dot{\theta}\right) - ma^2\left(\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - \frac{2}{5}\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\right) \tag{c}$$

$$\varepsilon_\varphi(\tilde{L}) = ma^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\varphi}\sin^2\theta + \frac{2}{5}\dot{\varphi} + \frac{4}{5}\dot{\psi}\cos\theta\right)$$

$$\begin{aligned} &\Phi_\psi = 0 \\ &\Phi_\theta = -ma^2(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\dot{\varphi}\sin\theta \\ &\Phi_\varphi = ma^2(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned} \tag{d}$$

我们来验证 Helmholtz 条件（5.4.66）是否满足。由式（d）得

$$\frac{\partial \Phi_\theta}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial \dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta}\sin\theta,\quad \frac{\partial \Phi_\psi}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial \dot{\psi}} = 0$$

可见，式（5.4.56）中第二式没有满足。

系统的 Чаплыгин 方程为

$$\begin{aligned} &\varepsilon_\psi(\tilde{L}) = 0 \\ &\varepsilon_\theta(\tilde{L}) = -ma^2(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\dot{\varphi}\sin\theta \\ &\varepsilon_\varphi(\tilde{L}) = ma^2(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned} \tag{e}$$

在方程（e）的第一个的右边添加项

$$-\frac{5}{2}\varepsilon_\psi(\tilde{L}) = -ma^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)$$

它因第一个方程显然为零。在第三个方程的右边增添项

$$-\frac{5}{2}\varepsilon_\psi(\tilde{L})\cos\theta = -ma^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\cos\theta$$

它因第一个方程也为零。第二个方程左边不变，于是新的 Φ_σ 为 $\Phi'_\sigma(\sigma = \psi, \theta, \varphi)$

$$\begin{aligned} &\Phi'_\psi = -ma^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) \\ &\Phi'_\theta = -ma^2(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\dot{\varphi}\sin\theta \\ &\Phi'_\varphi = -ma^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\cos\theta] \end{aligned} \tag{f}$$

将式（f）代入式（5.4.56）中可以验证，$\Phi'_\psi, \Phi'_\theta, \Phi'_\varphi$ 满足 Helmholtz 条件。可以求得

$$L' = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} ma^2 (\dot{\psi}^2 - \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta)$$

于是

$$p'_\psi = \frac{\partial L'}{\partial \dot{\psi}} = \frac{7}{5} ma^2 (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)$$

$$p'_\theta = \frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}} = \frac{7}{5} ma^2 \dot{\theta}$$

$$p'_\varphi = \frac{\partial L'}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{7}{5} ma^2 (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)$$

由此解出广义速度为

$$\dot{\psi} = -\frac{5}{7ma^2\sin^2\theta}(p'_\varphi\cos\theta - p'_\psi)$$

$$\dot{\theta} = \frac{5}{7ma^2} p'_\theta$$

$$\dot{\varphi} = \frac{5}{7ma^2\sin^2\theta}(p'_\varphi - p'_\psi\cos\theta)$$

因此，系统的 Hamilton 函数为

$$\begin{aligned} H' &= \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} p'_\sigma \dot{q}_\sigma - L' \\ &= \frac{5}{14ma^2\sin^2\theta}\{p'^2_\psi + p'^2_\varphi + p'^2_\theta\sin^2\theta - 2p'_\varphi p'_\psi\cos\theta\} \end{aligned}$$

所以，Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{5}{14ma^2\sin^2\theta}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2\sin^2\theta - 2\frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial V}{\partial \psi}\cos\theta\right] = 0$$

其完全积分为

$$V = \frac{7}{5} ma^2 \left[\alpha_1\psi + \alpha_2\varphi + f(\theta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \frac{1}{2}\alpha_3 t\right]$$

其中

$$f(\theta,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\int_{\sin\theta}^{1}\sqrt{\alpha_3\sin^2\theta+2\alpha_1\alpha_2\cos\theta-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}\,\mathrm{d}\theta$$

因此，利用

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha_\sigma}=\beta_\sigma,\qquad(\sigma=1,2,3)$$

可以求得 ψ,θ,φ。

§5.5 场 方 法

Hamilton-Jacobi 方法是积分完整保守系统动力学方程特别有效的工具。但是，对于那些不具有 Hamilton 结构，即动力学方程不能够表示成 Hamilton 正则方程

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

的非保守完整系统，Hamilton-Jacobi 方法便不能直接应用。这是 Hamilton-Jacobi 方法的缺陷之一。此外，对非完整系统来说，推广和应用 Hamilton-Jacobi 方法，便出现了极大困难并有非常苛刻的限制。本节介绍一种积分非保守力学系统运动微分方程的通用方法——场方法[12]。这种方法不仅可对完整非保守系统动力学方程，而且原则上对一般非完整系统动力学方程的积分问题都可求解[13]。

5.5.1 求解常微分方程的场方法

1. 场方法

考虑一个一阶常微分方程组

$$\dot{x}_s=X_s(t,x_1,\cdots,x_n),\qquad(s=1,\cdots,n)\tag{5.5.1}$$

我们不去直接寻找微分方程（5.5.1）的解，而是先构造一个一阶拟线性偏微分方程，即基本偏微分方程。然后，从基本偏微分方程的全积分来得到方程（5.5.1）的解。自然，这里必须

是这种情况，即寻找基本偏微分方程的全积分要比直接积分方程（5.5.1）简单得多。很显然，这种方法在某种意义上和Hamilton-Jacobi方法类似，但它并不要求方程（5.5.1）必须具备Hamilton正则方程的形式，因此应用范围更加广泛。

这种方法的特点之一，就是假设将方程（5.5.1）中的某一个变量，例如x_1，表示成依赖于时间t和其余变量$x_2,\cdots,x_n$的场函数

$$x_1=u(t,x_2,\cdots,x_n) \qquad (5.5.2)$$

将式（5.5.2）对t求导数并利用方程（5.5.1）后面$n-1$个方程，我们可以把方程（5.5.1）的第一个方程表示为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}X_i(t,u,x_2,\cdots,x_n)-X_1(t,u,x_2,\cdots,x_n)=0 \qquad (5.5.3)$$

我们称这个拟线性偏微分方程为基本偏微分方程。

我们感兴趣的便是寻找方程（5.5.3）的一个全积分

$$x_1=u(t,x_2,\cdots,x_n,C_1,\cdots,C_n) \qquad (5.5.4)$$

其中$C_1,\cdots,C_n$是n个任意常数。将（5.5.4）代入方程（5.5.3）可使之成为恒等式。

事实上，寻找方程（5.5.3）的全积分是我们这种方法最主要的困难。但是，同样的困难也出现在Hamilton-Jacobi方法中，尤其当系统的变量是不可分离的情形。实际上，寻找基本偏微分方程（5.5.3）的一个全积分有时比求解非线性偏微分方程的一个全积分要简单的多。特别在处理常系数线性系统时，可以找到求解基本偏微分方程的一种系统的方法[12]。

假如已知方程（5.5.3）的一个全积分（5.5.4）。令方程（5.5.1）的初始条件为

$$x_\alpha(0)=x_{\alpha 0}, \qquad (\alpha=1,\cdots,n) \qquad (5.5.5)$$

将式（5.5.5）代入式（5.5.4），可将一个常数，例如C_1，用$x_{\alpha 0}$和$C_i(\alpha=1,\cdots,n;\ i=2,\cdots,n)$表出。于是，方程(5.5.4)可

以写成形式

$$x_1=u(t,x_2,\cdots,x_n,x_{10},\cdots,x_{n0},C_2,\cdots,C_n) \qquad (5.5.6)$$

下面，我们来证明一阶常微分方程组（5.5.1)的初值问题的解可以由式（5.5.6）和 $n-1$ 个代数方程

$$\frac{\partial u}{\partial C_i}=0, \qquad (i=2,\cdots,n) \qquad (5.5.7)$$

来确定。这里，要求行列式

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial C_i\partial x_j}\right)$$

在 x_j 和 $C_i(i,j=2,\cdots,n)$ 的相关域上处处不为零。

将式（5.5.7）对 t 求导数，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial C_i\partial t}+\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial C_i\partial x_j}\dot{x}_j=0 \qquad (5.5.8)$$

将式（5.5.6）代入式（5.5.3）中，我们得到一个恒等式。将这个恒等式对 C_i 求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial C_i\partial t}+\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial C_i\partial x_j}X_j+\left(\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial X_j}{\partial u}-\frac{\partial X_1}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial C_i}=0 \qquad (5.5.9)$$

因为由式（5.5.7)知 $\frac{\partial u}{\partial C_i}=0$，由式（5.5.8)减去式(5.5.9)，得

$$\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial C_i\partial x_j}(\dot{x}_j-X_j)=0 \qquad (5.5.10)$$

考虑到

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial C_i\partial x_j}\right)$$

在 x_j 和 $C_i(i$、$j=2,\cdots,n)$ 的相关域上处处不为零，故

$$\dot{x}_j=X_j, \qquad (j=2,\cdots,n)$$

因此证明了方程（5.5.1）的后面 $n-1$ 个方程对任意常数 C_i 恒满足。

下面，将式（5.5.6）对时间 t 求导并考虑到方程（5.5.1）

后面 $n-1$ 个方程，我们有

$$\dot{x}_1=\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}X_j \tag{5.5.11}$$

因为式（5.5.6）是基本偏微分方程的全积分，因此

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}X_j-X_1=0 \tag{5.5.12}$$

将方程（5.5.11）代入式（5.5.12），我们最后得到

$$\dot{x}_1=X_1$$

即方程（5.5.1）的第一个方程也满足。

因此，只要能求出基本偏微分方程（5.5.3）的一个完全解，便可由式（5.5.7）和（5.5.6）求出方程（5.5.1）相应的解。当然，最后我们要通过式（5.5.7）这 $n-1$ 个方程，利用初始条件（5.5.5）消去任意常数 $C_i(i=2,\cdots,n)$。于是最终解决了依赖于 n 个任意初始常数 $x_{\alpha 0}(\alpha=1,\cdots,n)$ 的常微分方程组（5.5.1）的初值问题。

2. 应用

例 1 考虑 Euler 方程

$$t^2\ddot{x}-(a+b)t\dot{x}+abx=0,\ x(1)=\alpha,\ \dot{x}(1)=\beta,\ 1\leqslant t<\infty, a\neq b \tag{a}$$

其中 a,b,α,β 是给定常数。

令场动量 $p=t\dot{x}$，则我们可以将方程（a）表示成等价的一阶常微分方程组

$$t\dot{x}=p,\ t\dot{p}=p(a+b)-abx \tag{b}$$

假定系统的场动量 p 可以表示为 $p=u(t,x)$，我们可以写出基本偏微分方程为

$$t\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-u(a+b)+abx=0 \tag{c}$$

为了找到方程（c）的一个全积分，我们令

$$u = f_1(t)x + f_2(t)$$

将其代入方程(c)，比较含 x 的项和自由项，得

$$t\dot{f}_1 + (f_1 - a)(f_1 - b) = 0 \qquad (d)$$

$$t\dot{f}_2 + f_2[f_1 - (a+b)] = 0 \qquad (e)$$

积分方程(d)，得

$$f_1 = \frac{Cat^a - bt^b}{Ct^a - t^b}$$

其中 C 是任意常数。将其代入方程(e)，并积分得

$$f_2 = \frac{Dt^{a+b}}{Ct^a - t^b}$$

其中 D 是新常数。于是，我们有

$$p = u(t,x) = x\frac{Cat^a - bt^b}{Ct^a - t^b} + \frac{Dt^{a+b}}{Ct^a - t^b} \qquad (f)$$

将初始条件代入式(f)、将 D 解为 α、β 和 C 的函数，然后再代回式(f)，得

$$p = u(t,x) = x\frac{Cat^a - bt^b}{Ct^a - t^b} + \frac{C(\beta - a\alpha) + \alpha b - \beta}{Ct^a - t^b}t^{a+b} \qquad (g)$$

根据式 (5.5.7)，我们有

$$\frac{\partial u}{\partial C} = \frac{t^{a+b}}{(Ct^a - t^b)^2}[x(b-a) - (\beta - a\alpha)t^b - (\alpha b - \beta)t^a] = 0$$

故

$$x = \frac{(\alpha b - \beta)t^a + (\beta - a\alpha)t^b}{b - a} \qquad (h)$$

将式(h)代入式(g)，最后得到

$$p = \frac{a(\alpha b - \beta)t^a + b(\beta - a\alpha)t^b}{b - a} \qquad (i)$$

可以验证式（ h ）就是 Euler 方程满足给定初始条件的解。 ‖

5.5.2 完整系统的场方法

1. 完整系统运动方程的标准形式

设完整系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定，

系统的运动方程可表示成第二类 Lagrange 方程的形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s, \qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (5.5.13)$$

其中 T 为系统的动能，Q_s 为广义力。

我们可以将式（5.5.13）表示成显式，得

$$\sum_{k=1}^{n}A_{ks}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}\dot{q}_k+\frac{\partial B_s}{\partial t}$$

$$-\Gamma_s-\frac{\partial T_0}{\partial q_s}=Q_s, \qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (5.5.14)$$

其中

$$A_{ks}=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}, \quad B_s=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

$$\Gamma_s=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k, \quad T_0=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)^2$$

$$[k,m;s]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}+\frac{\partial A_{ms}}{\partial q_k}-\frac{\partial A_{km}}{\partial q_s}\right)$$

$$(k,s,m=1,\cdots,n)$$

考虑到行列式 $|A_{ks}|=\det\|A_{ks}\|\neq 0$，因此式（5.5.13）可以表示为

$$\ddot{q}_l+\sum_{s=1}^{n}A_{ls}^{-1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m$$

$$=\sum_{s=1}^{n}A_{ls}^{-1}\left\{\Gamma_s+Q_s-\frac{\partial B_s}{\partial t}+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k\right\}$$

$$(l=1,\cdots,n) \qquad (5.5.15)$$

其中

$$A_{ls}^{-1}=\frac{1}{|A_{ks}|}\frac{\partial|A_{ks}|}{\partial A_{ls}}$$

于是可以将完整系统的运动微分方程表示为

$$\ddot{q}_s=g_s(t,q_k,\dot{q}_k), \qquad (s,k=1,\cdots,n) \qquad (5.5.16)$$

令 $x_s=q_s,\ x_{n+k}=\dot{q}_k,\qquad (s,k=1,\cdots,n)\qquad(5.5.17)$

则式（5.5.16）可表为

$$\dot{x}_k=x_{n+k},\ \dot{x}_{n+k}=g_k(t,x_s,x_{n+s}),\qquad (k,s=1,\cdots,n)\tag{5.5.18}$$

这 $2n$ 个一阶常微分方程可以称为一般完整系统动力学方程的标准形式。显然，它具有方程（5.5.1）的形式，因此可以直接运用场方法来求解完整系统的动力学问题。显然，这里并不要求完整系统一定是保守的。

2．场方法的应用

同样，令

$$x_1=u(t,x_A),\qquad (A=2,\cdots,2n)$$

我们可以得到基本偏微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_a}x_{n+a}+\sum_{b=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_{n+b}}g_b(t,u,x_A)-x_{n+1}=0\tag{5.5.19}$$

若方程（5.5.19）的完全解表示为形式

$$x_1=u(t,x_A,C_\alpha),\qquad (A=2,\cdots,2n;\ \alpha=1,\cdots,2n)\tag{5.5.20}$$

令运动的初始条件为

$$x_\alpha(0)=x_{\alpha 0},\qquad (\alpha=1,\cdots,2n)\tag{5.5.21}$$

将式（5.5.21）代入式（5.5.20）中，可将常数 C_1 用 $x_{\alpha 0}$ 和其余常数 C_A 表出。这样，式（5.5.20）可写成

$$x_1=u(t,x_A,x_{\alpha 0},C_A)\tag{5.5.22}$$

于是，我们有

$$\frac{\partial u}{\partial C_A}=0,\qquad (A=2,\cdots,2n)\tag{5.5.23}$$

这里，要求行列式

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial C_A\partial x_B}\right)$$

在 x_B 和 $C_A(B,A=2,\cdots,2n)$ 的相关域上处处不为零。因此，只

要能求出基本偏微分方程（5.5.19）的一个完全解（5.5.20），我们便可由式（5.5.23）和（5.5.22）求出相应完整系统的解，它包含 $2n$ 个任意常数。

5.5.3 非完整系统的场方法

1. 非完整系统Routh方程的标准化和场方法

设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定，在系统的运动上受有 g 个 Четаев 型理想非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0,\qquad(\beta=1,\cdots,g;s=1,\cdots,n)\qquad(5.5.24)$$

系统运动方程的 Routh 形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s},\qquad(s=1,\cdots,n)\quad(5.5.25)$$

其中 λ_β 为不定乘子。下面，我们设法消去不定乘子 λ_β。同上小节，我们将式(5.5.25)展开为显式，得

$$\begin{aligned}&\ddot{q}_l-\sum_{s=1}^{n}A_{sl}^{-1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m\\&=\sum_{s=1}^{n}A_{sl}^{-1}\Big\{\Gamma_s+Q_s-\frac{\partial B_s}{\partial t}+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k\\&\quad+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\Big\},\qquad(l=1,\cdots,n)\qquad(5.5.26)\end{aligned}$$

将式（5.5.24）对时间 t 求导，得

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial f_\gamma}{\partial\dot{q}_l}\ddot{q}_l\right)+\frac{\partial f_\gamma}{\partial t}=0,\qquad(\gamma=1,\cdots,g)$$

(5.5.27)

将由式（5.5.26）解得的 $\ddot{q}_l$ 代入式（5.5.27），便得

$$\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}A_{sl}^{-1}\frac{\partial f_\gamma}{\partial\dot{q}_l}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\lambda_\beta+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial f_\gamma}{\partial t}$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\sum_{s=1}^{n}A_{s\,l}^{-1}\left\{-\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m+\Gamma_s+Q_s\right.$$

$$\left.+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k\right\}=0,\qquad(\gamma=1,\cdots,g)$$

由此 g 个代数方程，可解得不定乘子，记作

$$\lambda_\beta=\lambda_\beta(q_s,\dot{q}_s,t),\qquad(\beta=1,\cdots,g)\qquad(5.5.28)$$

将式（5.5.28）代入式（5.5.26），可将Routh方程（5.5.26）表示为

$$\ddot{q}_s=y_s(t,q_k,\dot{q}_k),\qquad(s,k=1,\cdots,n)\qquad(5.5.29)$$

令 $$x_s=q_s,\ x_{n+k}=\dot{q}_k,\qquad(s,k=1,\cdots,n)\qquad(5.5.30)$$

则方程（5.5.29）可表为

$$\dot{x}_k=x_{n+k},\ \dot{x}_{n+k}=y_k(t,x_s,x_{n+s}),\qquad(k,s=1,\cdots,n)\quad(5.5.31)$$

这 $2n$ 个一阶常微分方程可称为一阶非完整系统动力学方程的标准形式。在式（5.5.30）下，约束方程（5.5.24）可表为

$$f_\beta(x_s,x_{n+k},t)=0,\qquad(\beta=1,\cdots,g)\qquad(5.5.32)$$

文献[30]证明，方程（5.5.25）可作为某个完整系统，称之为约化系统的力学问题来研究，只要初始值满足约束方程（5.5.24），那么约化系统的解就给出非完整系统的运动。同样，方程（5.5.31）可当作某个完整系统力学问题来研究。它和式（5.5.18）有同样的形式，因此只要求出基本偏微分方程（5.5.19）的一个完全解（5.5.20），我们便可由式（5.5.22）和（5.5.23）求出相应的约化系统的解，它包含 $2n$ 个任意常数。然后，将非完整约束对运动初始条件的限制

$$f_\beta(x_{s_0},x_{n+s_0},0)=0,\qquad(\beta=1,\cdots,g)\qquad(5.5.33)$$

加在相应约化系统的解上，便可求得相应非完整系统的解，它包含 $2n-g$ 个常数。

例 2 研究一单位质量的质点在平面上的运动，其 Lagrange 函数和约束方程分别为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2),\quad f=\dot{q}_1+at\dot{q}_2-aq_2+t=0 \qquad (a)$$

问题的 Routh 方程为

$$\ddot{q}_1=\lambda,\quad \ddot{q}_2=\lambda at$$

容易计算得

$$\lambda=-\frac{1}{1+a^2t^2}$$

于是有

$$\ddot{q}_1=-\frac{1}{1+a^2t^2},\quad \ddot{q}_2=-\frac{at}{1+a^2t^2}$$

令 $x_1=q_1, x_2=q_2, x_3=\dot{q}_1, x_4=\dot{q}_2$，则标准化方程为

$$\dot{x}_1=x_3, \dot{x}_2=x_4, \dot{x}_3=-\frac{1}{1+a^2t^2},\quad \dot{x}_4=-\frac{at}{1+a^2t^2} \qquad (b)$$

基本偏微分方程（5.5.19）给出为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x_2}x_4+\frac{\partial u}{\partial x_3}\left(-\frac{1}{1+a^2t^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial x_4}\left(-\frac{at}{1+a^2t^2}\right)-x_3=0 \qquad (c)$$

令其完全解为

$$x_1=u=f_1(t)+f_2(t)x_2+f_3(t)x_3+f_4(t)x_4 \qquad (d)$$

将式（d）代入方程（c），并比较自由项，含 x_2, x_3, x_4 的项，可以得到

$$\dot{f}_1-\frac{f_3}{1+a^2t^2}-\frac{atf_4}{1+a^2t^2}=0,\quad \dot{f}_2=0,\quad \dot{f}_3-1=0,\quad \dot{f}_4+f_2=0$$

积分之，得

$$f_1=C_1+C_2\left(\frac{1}{a^2}\text{arctg}\,at-\frac{t}{a}\right)+\frac{C_3}{a}\text{arc tg}\,at$$

$$+\frac{C_4}{2a}\ln(1+a^2t^2)+\frac{1}{2a}\ln(1+a^2t^2)$$

$$f_2=C_2,\quad f_3=C_3+t,\quad f_4=C_4-C_2t$$

令运动的初条件为

$$x_\alpha(0)=x_{\alpha 0}, \qquad (\alpha=1,2,3,4)$$

将其代入式(d)，消去C_1后有

$$x_1=u=(x_{10}-C_2x_{20}-C_3x_{30}-C_4x_{40})+C_2\left(\frac{1}{a^2}\text{arc tg}at-\frac{t}{a}\right)$$

$$+\frac{C_3}{a}\text{arctg}at+\frac{C_4}{2a}\ln(1+a^2t^2)+\frac{t}{2a^2}\ln(1+a^2t^2)$$

$$+C_2x_2+(C_3+t)x_3+(C_4-C_2t)x_4 \qquad (e)$$

关系(5.5.23)成为

$$\frac{\partial u}{\partial C_2}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial C_3}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial C_4}=0$$

即

$$-x_{20}+\frac{1}{a^2}\text{arctg}at-\frac{t}{a}+x_2-tx_4=0$$

$$-x_{30}+\frac{1}{a}\text{arctg}at+x_3=0$$

$$-x_{40}+\frac{1}{2a}\ln(1+a^2t^2)+x_4=0$$

由此解得

$$x_2=x_{20}+x_{40}t+\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}\text{arc tg}at-\frac{t}{2a}\ln(1+a^2t^2)$$

$$x_3=x_{30}-\frac{1}{a}\text{arctg}at \qquad (f)$$

$$x_4=x_{40}-\frac{1}{2a}\ln(1+a^2t^2)$$

将式(f)代入式(e)，得

$$x_1=x_{10}+x_{30}t+\frac{1}{2a^2}\ln(1+a^2t^2)-\frac{t}{a}\text{arctg}at \qquad (g)$$

解(f),(g)为相应约化系统(b)满足初条件的解。关系(5.5.33)给出为

$$x_{30}-ax_{20}=0 \qquad (h)$$

解(f),(g),(h)表示了非完整系统的运动。

2. Чаплыгин 方程的积分

应用 Routh 方程虽然可以解决一般一阶非线性非完整约束系统力学问题。但是，不定乘子的引入使方程数目多于系统的自由度数目，给求解带来了一定的困难。工程实际中相当多的非完整系统是 Чаплыгин 系统，而 Чаплыгин 系统运动方程数目等于系统的自由度数目，并且构成独立于约束方程的自治系统。

研究一力学系统，其位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定，它的运动受有 g 个 Четаев 型理想非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_{\beta}(q_{\sigma},\dot{q}_{\sigma},t), \qquad (\beta=1,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g;\ \sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{5.5.34}$$

其中广义坐标 $q_{\varepsilon+\gamma}(\gamma=1,\cdots,g)$ 不出现于约束方程中。设广义力是有势的，且 Lagrange 函数 L 不显含 $q_{\varepsilon+\gamma}$，则系统的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_{\sigma}}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_{\sigma}}-\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial\dot{q}_{\sigma}}-\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial q_{\sigma}}\right)=0$$

$$(\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{5.5.35}$$

其中$\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)$为$\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}$中 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 用式（5.5.34）替代所得表达式。

式（5.5.34），（5.5.35）构成 Чаплыгин 系统。由方程（5.5.35）看出，它是关于 $q_{\sigma}(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)$ 的二阶常微分方程组。因此，可先求出方程（5.5.35）的解，得到 $q_{\sigma}=q_{\sigma}(t,q_{\nu 0},\dot{q}_{\nu 0})$，然后将其代入式（5.5.34）并积分而求得 $q_{\varepsilon+\beta}=q_{\varepsilon+\beta}(t,q_{\sigma 0},\dot{q}_{\sigma 0})$，其中有 $2\varepsilon+g$ 个任意常数 $q_{\sigma 0},\dot{q}_{\sigma 0},(q_{\varepsilon+\beta})_0$。而 $(\dot{q}_{\varepsilon+\beta})_0$ 应满足约束方程（5.5.34），即

$$(\dot{q}_{\varepsilon+\beta})_0=\varphi_{\beta}(q_{\sigma 0},\dot{q}_{\sigma 0},t_0) \tag{5.5.36}$$

将方程（5.5.35）展开为显式。假设由此可解出广义速度 $\ddot{q}_{\sigma}$，并表示为

$$\ddot{q}_{\sigma}=f_{\sigma}(q_{\nu},\dot{q}_{\nu},t), \qquad (\sigma,\nu=1,\cdots,\varepsilon) \tag{5.5.37}$$

令 $x_{\sigma}=q_{\sigma}$，$x_{\varepsilon+\sigma}=\dot{q}_{\sigma}$

则（5.5.36）可化成一阶方程组

$$\dot{x}_\nu = x_{\varepsilon+\nu},\quad \dot{x}_{\varepsilon+\sigma} = f_\sigma(x_\nu, x_{\varepsilon+\nu}, t),\qquad (\sigma, \nu = 1, \cdots, \varepsilon) \tag{5.5.38}$$

如取 $\qquad x_1 = u(t, x_A),\qquad (A = 2, \cdots, 2\varepsilon)$

将其对 t 求导数并利用式（5.5.38）的后面 $2\varepsilon-1$ 个方程，得到基本偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{a=2}^{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_a} x_{\varepsilon+a} + \sum_{b=1}^{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_{\varepsilon+b}} f_b(t, u, x_A) - x_{\varepsilon+1} = 0 \tag{5.5.39}$$

若其完全解表为形式

$$x_1 = u(t, x_A, C_\alpha),\qquad (A = 2, \cdots, 2\varepsilon;\ \alpha = 1, \cdots, 2\varepsilon) \tag{5.5.40}$$

令 x_α 的初始值为

$$x_\alpha(0) = x_{\alpha 0},\qquad (\alpha = 1, \cdots, 2\varepsilon) \tag{5.5.41}$$

将式（5.5.41）代入式（5.5.40），可将一个常数，如 C_1 用 $x_{\alpha 0}$ 和其余常数 C_A 表出，这样式（5.5.40）可以写成

$$x_1 = u(t, x_A, x_{\alpha 0}, C_A),\qquad (A = 2, \cdots, 2\varepsilon;\ \alpha = 1, \cdots, 2\varepsilon) \tag{5.5.42}$$

于是有

$$\frac{\partial u}{\partial C_A} = 0,\qquad (A = 2, \cdots, 2\varepsilon) \tag{5.5.43}$$

其中要求

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial C_A \partial x_B}\right) \neq 0,\qquad (A, B = 2, \cdots, 2\varepsilon)$$

只要能求出方程（5.5.39）的一个完全解（5.5.40），便可由式（5.5.43）和（5.5.42）求出解

$$x_\alpha = x_\alpha(t, x_{\mu 0}),\qquad (\alpha, \mu = 1, \cdots, 2\varepsilon) \tag{5.5.44}$$

将解（5.5.44）代入约束方程（5.5.34），则有

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \varphi_\beta(x_\sigma(t, x_{\mu 0}),\ x_{\varepsilon+\sigma}(t, x_{\mu 0}), t) \tag{5.5.45}$$

运动的初始条件必须满足约束方程，即

$$(\dot{q}_{\varepsilon+\beta})_0 = \varphi_\beta(x_\sigma(0, x_{\mu 0}),\ x_{\varepsilon+\sigma}(0, x_{\mu 0}), 0) \tag{5.5.46}$$

将式（5.5.45）积分，得到

$$q_{\varepsilon+\beta}=(q_{\varepsilon+\beta})_0+\int_0^t \varphi_\beta(x_\alpha(t,x_{\alpha 0}),x_{\varepsilon+\sigma}(t,x_{\alpha 0}),t)\mathrm{d}t \quad (5.5.47)$$

于是，式（5.5.47）和（5.5.44）一起构成Чаплыгин非完整系统的解，其中包含$2n-g=2\varepsilon+g$个独立常数$x_{\alpha 0},(q_{\varepsilon+\beta})_0$。

例3 Appell-Hamel 例。问题中的Lagrange函数和约束方程分别为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz,\quad \dot{z}=\frac{b}{a}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2} \quad (a)$$

令

$$q_1=z,\ q_2=x,\ q_3=y$$

则式（a）可表示为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)-mgq_1,\ \dot{q}_3=\varphi=\left(\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_1^2-\dot{q}_2^2\right)^{1/2}$$

首先，建立Чаплыгин方程为

$$m\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\ddot{q}_1+mg-m\left(\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_1^2-\dot{q}_2^2\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_1\left(\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_1^2-\dot{q}_2^2\right)^{-1/2}\right]=0$$

$$-m\left(\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_1^2-\dot{q}_2^2\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-\dot{q}_2\left(\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_1^2-\dot{q}_2^2\right)^{-1/2}\right]=0$$

设 $\dot{q}_3\neq 0$，由此解得

$$\ddot{q}_1=-\frac{g}{1+\frac{a^2}{b^2}},\ \ddot{q}_2=-\frac{g\dot{q}_2}{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\dot{q}_1} \quad (b)$$

令

$$x_1=q_1,\ x_2=q_2,\ x_3=\dot{q}_1,\ x_4=\dot{q}_2$$

则方程（b）可写成

$$\dot{x}_1=x_3,\ \dot{x}_2=x_4,\ \dot{x}_3=-\frac{g}{1+\frac{a^2}{b^2}},\ \dot{x}_4=-\frac{gx_4}{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)x_3} \quad (c)$$

其次，建立基本偏微分方程（5.5.39）并求解。令

$$x_3=u(t,x_1,x_2,x_4)$$

则基本偏微分方程（5.5.39）给出

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x_1}u+\frac{\partial u}{\partial x_2}x_4+\frac{\partial u}{\partial x_4}\left(-\frac{gx}{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)x_3}\right)+\frac{g}{1+\frac{a^2}{b^2}}=0$$

注意到

$$x_4=Ax_3,\qquad \left(A=\frac{x_{40}}{x_{30}}\right)$$

则有

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x_1}u+\frac{\partial u}{\partial x_2}Au+\frac{\partial u}{\partial x_4}\left(-\frac{gA}{1+\frac{a^2}{b^2}}\right)+\frac{g}{1+\frac{a^2}{b^2}}=0 \qquad (d)$$

令其解有形式

$$x_3=u=f_1(t)+f_2(t)x_1+f_3(t)x_2+f_4(t)x_4$$

将其代入方程(d)，并比较自由项，含 x_1, x_2 和 x_4 的项，得到

$$\dot{f}_1+f_1(f_2+f_3A)+\frac{g}{1+\frac{a^2}{b^2}}(1-f_4A)=0$$

$$\dot{f}_2+f_2(f_2+f_3A)=0,\quad \dot{f}_3+f_3(f_2+f_3A)=0,$$

$$\dot{f}_4+f_4(f_2+f_3A)=0$$

积分之，得

$$f_1=\frac{1}{1+(C_2+C_3At)}\left\{C_1-\frac{g}{1+\frac{a^2}{b^2}}(1-C_4A)\cdot\left[t+\frac{1}{2}(C_2+C_3A)t^2\right]\right\}$$

$$f_2=\frac{C_2}{1+(C_2+C_3A)t},\quad f_3=\frac{C_3}{1+(C_2+C_3A)t}$$

$$f_4=\frac{C_4}{1+(C_2+C_3A)t}$$

于是有

$$x_3=u=\frac{1}{1+(C_2+C_3A)t}\left\{C_1-\frac{g}{1+a^2/b^2}(1-C_4A)\right.$$

$$\cdot\left[t+\frac{1}{2}(C_2+C_3A)t^2\right]+C_2x_1+C_3x_2+C_4x_4\Big\}$$

令初始条件为 $x_\alpha(0)=x_{\alpha 0}(\alpha=1,2,3,4)$，则有

$$C_1=x_{30}-C_2x_{10}-C_3x_{20}-C_4x_{40}$$

代入上式，得

$$x_3=u=\frac{1}{1+(C_2+C_3A)t}\Big\{x_{30}-C_2x_{10}-C_3x_{20}-C_4x_{40}$$

$$-\frac{g}{1+a^2/b^2}(1-C_4A)\left[t+\frac{1}{2}(C_2+C_3A)t^2\right]\cdot$$

$$+C_2x_1+C_3x_2+C_4x_4\Big\} \tag{e}$$

第三，由式（5.5.43）有

$$\frac{\partial u}{\partial C_A}=0,\quad (A=2,3,4) \tag{f}$$

在（f）中解出 x_1，x_2，x_4，并根据初始条件消去 C_2，C_3，C_4，知可取 $C_2=C_3=C_4=0$。解得

$$x_1=x_{10}+x_{30}t-\frac{gt^2}{2(1+a^2/b^2)}$$

$$x_2=x_{20}+x_{40}t-\frac{gx_{40}t^2}{2(1+a^2/b^2)x_{30}} \tag{g}$$

$$x_4=x_{40}-\frac{gx_{40}t}{(1+a^2/b^2)x_{30}}$$

将式（g）代入式（e），得

$$x_3=x_{30}-\frac{gt}{1+a^2/b^2} \tag{h}$$

最后，求 $q_3=y$。将式（g）返回到广义坐标，广义速度中，并代入约束方程，得

$$\dot{q}_3=\left(-\frac{a^2}{b^2}-\frac{x_{40}^2}{x_{30}^2}\right)^{1/2}\left(x_{30}-\frac{gt}{1+a^2/b^2}\right)$$

积分之，得

$$q_3=q_{30}+\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{x_{40}^2}{x_{30}^2}\right)^{1/2}\left[x_{30}t-\frac{gt^2}{2(1+a^2/b^2)}\right] \qquad (i)$$

解（g），（h），（i）为 Appll-Hamel 例的解，其中有5个独立的常数。 ||

由上面的例子，可以看到，场方法积分非完整动力学方程有如下优点：

（1）通用性：利用场方法，原则上可求解一般非完整动力学方程的积分问题。它没有象 Hamilton-Jacobi 方法的那样的限制。

（2）灵活性：基本偏微分方程可建立在任何一个场坐标 $x_1,\cdots,x_n$ 上，也可建立在任何一个场动量 $x_{n+1},\cdots,x_{2n}$ 上。对具体问题可选一个较为方便的 x_α。

（3）利用场方法的主要困难在于求基本偏微分方程的完全解。但是，只要求出完全解，不用任何进一步积分，便可直接得到系统的运动。

对于事件空间中非完整非保守系统的参数方程也可用场方法进行积分[14]。

§5.6 Noether 定理

动力学系统的守恒定律在力学研究中起着重要作用，甚至在系统的运动微分方程不可积分的情况下，某个守恒量的存在也可以使我们对所研究系统的局部物理状态有所了解。1918年德国著名女科学家 A. E. Noether 提出了一个定理[15]，揭示了力学系统的守恒量与其内在的动力学对称性的潜在关系。近些年来，Noether 定理不断受到物理学和力学研究者的高度重视，并被进行了各种形式的推广[16-21]。本节将对分析动力学积分理论中占重要地位的各种形式的 Noether 定理作一概括介绍。

5.6.1 变换群

我们研究带 n 个自由度的力学系统，它在每一时刻的位置由广义坐标 $q_1, \cdots, q_n$ 来确定。我们把系统的运动研究作为示点在扩充的 $n+1$ 维空间中沿曲线的运动，这里 $q_1, \cdots, q_n$ 和时间 t 是示点的坐标。在这个空间中研究坐标变换，形如

$$
\begin{aligned}
t^* &= f_0(t, q_1, \cdots, q_n, a_1, \cdots, a_r) = f_0(t, q, a) \\
q_i^* &= f_i(t, q_1, \cdots, q_n, a_1, \cdots, a_r) = f_i(t, q, a) \\
&\qquad (i=1, \cdots, n) \qquad (5.6.1)
\end{aligned}
$$

这里函数 $f_i(i=0,1,\cdots,n)$ 依赖于广义坐标 q_i 及 r 个独立参数 $a_\alpha(\alpha=1,\cdots,r)$。方程（5.6.1）对每一组 a_α 确定 $n+1$ 维空间中点 $P(t,q)$ 到点 $P^*(t^*,q^*)$ 的变换。我们假定 $f_i \in C^2(i=0,1,\cdots,n)$，并且变换的 Jacobi 行列式满足

$$
J = \left| \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \right| \neq 0, \qquad (i,k=0,1,\cdots,n;\ q_0=t)
$$

那么，变换（5.6.1）存在逆变换

$$
t = \bar{f}_0(t^*, q^*, a),\ q_i = \bar{f}_i(t^*, q^*, a), \qquad (i=1,\cdots,n) \qquad (5.6.2)
$$

它将点 $P^*(t^*, q^*)$ 变换到点 $P(t,q)$。

考虑到假设，变换（5.6.1）连续地依赖于 r 个参数 $a_\alpha(\alpha=1,\cdots,r)$，当它满足 §5.3 中变换群定义的4个条件时，变换（5.6.1）组成变换 G_r 的有限群，称之为Lie群。

设取参数 a^0_α 确定群的恒等变换

$$
t = f_0(t, q, a^0);\ q_i = f_i(t, q, a^0), \qquad (i=1,\cdots,n)
$$

为了简化起见，设 $a^0_\alpha=0$。如果研究足够接近于零的值 Δa_α，那么变换（5.6.1）为

$$
t^* = f_0(t, q, \Delta a);\ q_i^* = f_i(t, q, \Delta a)
$$

展成 Taylor 级数并限于相对 Δa 的线性项，我们得

$$
t^* = f_0(t, q, 0) + \sum_{\alpha=1}^{r} \xi_0^\alpha \Delta a_\alpha
$$

$$q_i^* = f_i(t,q,0) + \sum_{\alpha=1}^{r} \xi_i^\alpha \Delta a_\alpha$$

其中

$$\xi_i^\alpha = \left.\frac{\partial f_i(t,q,a)}{\partial a_\alpha}\right|_{a=0}, \qquad (i=0,1,\cdots,n)$$

记 $\varepsilon_\alpha = \Delta a_\alpha$，得变换

$$t^* = t + \sum_{\alpha=1}^{r} \xi_0^\alpha \varepsilon_\alpha; \quad q_i^*(t^*) = q_i(t) + \sum_{\alpha=1}^{r} \xi_i^\alpha \varepsilon_\alpha \qquad (5.6.3)$$

显然，此变换与恒等变换相差一无限小。式（5.6.3)实现了无限小群变换。借助于无限小变换，系统地研究连续群的构造，首先由挪威数学家 S.Lie 采用。可以指出，任何的有限的群变换可以作为重复无限小变换无限多次的结果来研究。但是，如果给出无限小群变换，那么并不经常得到形如（5.6.1）式中的有限变换。

我们研究连续群的例子。

例 1　三维坐标系的所有可能的平行移动的总合

$$t^* = t, \quad x_k^* = x_k + a_k, \qquad (k=1,2,3)$$

其中 x_k 是直角坐标，构成平行移动的群 G_3。

例 2　平面上直角坐标系的所有转动的总合

$$t^* = t, \quad x^* = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \quad y^* = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

构成平面上转动群 G_1；无限小群变换有形

$$t^* = t, \quad x^* = x - \varepsilon y, \quad y^* = y + \varepsilon x$$

例 3　从一个任意的惯性坐标系向另一个相对第一个以常速度运动的坐标系的所有可能的过渡的总合

$$t^* = t, \quad x_k^* = x_k + v_k t, \qquad (k=1,2,3)$$

其中 x_k 是直角坐标，构成 Galilei 群。

5.6.2　作用量的变分

1. 作用量与变换群

设 Lagrange 函数为

$$L=L(t,q_1,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_n)=L(t,q,\dot{q})$$

则由 2.2.1 知，积分

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(t,q,\dot{q})\mathrm{d}t \tag{5.6.4}$$

叫作时间区间$[t_1, t_2]$Hamilton 意义下的作用量，这里 t_1 及 t_2 是任意的时刻。显然，由方程给定的每条曲线 γ，相应于确定的值 S。因此，我们记作

$$S(\gamma)=\int_{t_1}^{t_2}L(t,q,\dot{q})\mathrm{d}t$$

我们研究比式（5.6.1）更一般形式的变换群 G_r，其函数 f_i 还包含广义速度 $\dot{q}_i$，有

$$t^*=t+\Delta t,\quad q_i^*(t^*)=q_i(t)+\Delta q_i,\qquad (i=1,\cdots,n) \tag{5.6.5}$$

或展开式为

$$t^*=t+\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha\xi_0^\alpha(t,q,\dot{q}) \tag{5.6.6}$$

$$q_i^*(t^*)=q_i(t)+\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha\xi_i^\alpha(t,q,\dot{q})$$

是无限小群变换，ε_α 是无限小参数，我们认为 ε_α，Δq_i，Δt 都具有一阶小 ε。

变换式（5.6.5）将曲线 γ 变到邻近的曲线 γ^*，它由方程

$$q_i^*=q_i^*(t^*),\qquad (i=1,\cdots,n)$$

确定。在此变换下，积分（5.6.4）相应于积分

$$S(\gamma^*)=\int_{t_1^*}^{t_2^*}L(t^*,q^*,\dot{q}^*)\mathrm{d}t^*$$

这里$[t_1^*, t_2^*]$是与原变量中的区间$[t_1, t_2]$相应的积分区间。

2. 作用量的变分

现在的问题是计算积分（5.6.4）式的变分 ΔS，即差

$$S(\gamma^*)-S(\gamma)=\int_{t_1^*}^{t_2^*}L(t^*,q^*,\dot{q}^*)\,\mathrm{d}t^*-\int_{t_1}^{t_2}L(t,q,\dot{q})\mathrm{d}t$$

的相对 ϵ 的主线性部分，亦即精确到一阶小量。

由式（5.6.5）知

$$\mathrm{d}t^*=\mathrm{d}t+\mathrm{d}(\Delta t)=\mathrm{d}t\left[1+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)\right]$$

将

$$S(\gamma^*)-S(\gamma)=\int_{t_1}^{t_2}\Big[L(t+\Delta t,q+\Delta q,\dot{q}+\Delta\dot{q})\left[1+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)\right]-L(t,q,\dot{q})\Big]\mathrm{d}t$$

展开为 Taylor 级数并限于相对 ϵ 的一阶项，我们得到

$$L(t+\Delta t,q+\Delta q,\dot{q}+\Delta\dot{q})=L(t,q,\dot{q})+\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\Delta q_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\Delta\dot{q}_i$$

这时

$$S(\gamma^*)-S(\gamma)=\int_{t_1}^{t_2}\Big[L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)+\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\Delta q_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\Delta\dot{q}_i\right)\Big]\mathrm{d}t+\cdots\tag{5.6.7}$$

考虑到等时变分 δq，$\delta\dot{q}$，即

$$\delta q_i=q_i^*(t)-q_i(t),\quad \delta\dot{q}_i=\dot{q}_i^*(t)-\dot{q}_i(t),\qquad (i=1,\cdots,n)$$

以及等时变分和非等时变分的关系（2.2.16）和（2.2.18），即

$$\Delta q_i=\delta q_i+\dot{q}_i\Delta t,\quad \Delta\dot{q}_i=\delta\dot{q}_i+\ddot{q}_i\Delta t$$

我们可以将式（5.6.7）表示为

$$\Delta S=\int_{t_1}^{t_2}\Big[L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)+\Big(\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\Big)\Delta t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\Big]\mathrm{d}t \tag{5.6.8}$$

根据 Hölder 定义，无论完整或非完整系统，全部等时变分都采用交换关系

$$\delta\dot{q}_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_i),\qquad (i=1,\cdots,n) \tag{5.6.9}$$

将式（5.6.9）代入式（5.6.8），并整理得

$$\Delta S=\int_{t_1}^{t_2}\Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(L\Delta t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big)+\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big)\delta q_i\Big]\mathrm{d}t \tag{5.6.10}$$

此式便是 Hamilton 作用量变分 ΔS 的基本公式。用式（5.6.6）来代替表达式中的 Δt，Δq_i，则上式变为

$$\Delta S=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha\Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(L\xi_0^\alpha+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bar{\xi}_i^\alpha\Big)-\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}\Big)\bar{\xi}_i^\alpha\Big]\mathrm{d}t \tag{5.6.11}$$

其中

$$\bar{\xi}_i^\alpha=\xi_i^\alpha-\dot{q}_i\xi_0^\alpha,\qquad (i=1,\cdots,n) \tag{5.6.12}$$

5.6.3 作用量与 Lagrange 方程的关系

1. 作用量与 Lagrange 方程的关系

为了更明确地引入对称性的概念，我们先考察作用量与系统运动方程的关系。

对于完整保守系统，系统的 Hamilton 原理可以表述为：当条件

（1）积分域不变，即 $\Delta t=0$

（2）坐标的变分在积分域的边界上等于零，即

$$\delta q_i = 0,\ (i=1,\cdots,n)\ 当\ t=t_1\ 及\ t=t_2\ 时$$

满足的情况下，沿真实轨道的 Hamilton 作用量的变分为零。即

$$\Delta S = \delta S = 0$$

由式（5.6.10），我们由 Hamilton 原理有

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\right]\mathrm{d}t = 0$$

考虑到积分域是任意的，坐标的变分是独立的，故得到完整保守系统的 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,\qquad (i=1,\cdots,n) \tag{5.6.13}$$

对于完整非保守系统，系统的 Hamilton 原理在同完整保守系统同样的条件下，要求沿真实轨道成立

$$\Delta S+\int_{t_1}^{t_2}\Delta W\mathrm{d}t=\delta S+\int_{t_1}^{t_2}\delta W\mathrm{d}t=0$$

其中 $\delta W=\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i$ 是非保守广义力 Q_i 的虚功。同样考虑到式（5.6.10）和积分域的任意性以及坐标变分的独立性，可以得到完整非保守系统的 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i,\qquad (i=1,\cdots,n) \tag{5.6.14}$$

2．两个不同作用量对应同一方程的条件

为今后的描述，特别要注意 Hamilton 作用量（5.6.4）中 Lagrange 函数的选取。它引向于给出的运动方程组是非单值的，亦即存在不同的函数 $L(t,q,\dot{q})$，它们引向同样的运动方程。我们有如下结果。

命题 1 如果积分

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(t,q,\dot{q})\mathrm{d}t \quad 及 \quad S_1=\int_{t_1}^{t_2}L_1(t,q,\dot{q})\mathrm{d}t$$

引向同样的运动方程组，那么 L 及 L_1 应由关系

$$L_1(t,q,\dot{q})=L(t,q,\dot{q})+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda(t,q) \qquad (5.6.15)$$

相联系，这里 $\lambda(t,q)$ 是 t 及 $q_i(i=1,\cdots,n)$ 的任意函数。

〔证明〕 记 Lagrange 函数的差为 $L_1-L=\varphi$，假设由 $S=\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t$ 和 $S_1=\int_{t_1}^{t_2}L_1\mathrm{d}t$ 可导出同样的 Lagrange 方程 (5.6.14)，则对任意函数 φ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}=0, \qquad (i=1,\cdots,n) \qquad (5.6.16)$$

对所有变量应恒满足。

展开式 (5.6.16)，有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}_i}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}_i}\right)\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}_i}\right)\ddot{q}_k$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\equiv 0, \qquad (i=1,\cdots,n)、$$

既然是恒等式，那么 $\ddot{q}_k$ 的系数应等于零，亦即

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_k}=0, \qquad (i,k=1,\cdots,n)$$

因此函数 φ 应有形式

$$\varphi=A(t,q)+\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_iB_i(t,q)$$

这时方程组 (5.6.16) 过渡到关系

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_i}{\partial q_k}-\frac{\partial B_k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k+\left(\frac{\partial B_i}{\partial t}-\frac{\partial A}{\partial q_i}\right)=0,$$

$$(i,k=1,\cdots,n)$$

由于它们是恒等式，故

$$\frac{\partial B_i}{\partial q_k}-\frac{\partial B_k}{\partial q_i}=0, \quad \frac{\partial B_i}{\partial t}-\frac{\partial A}{\partial q_i}=0, \qquad (i,k=1,\cdots,n)$$

这些条件表明，表达式 $A(t,q)\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}B_i(t,q)\mathrm{d}q_i$ 乃是某个函数 $\lambda=\lambda(t,q)$ 的全微分，亦即

$$\varphi=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda(t,q)$$

下面证明充分性。通过直接计算容易证明 $\varphi=\frac{d}{\mathrm{d}t}\lambda(t,q)$ 使得 L 及 L_1 允许得到同样的运动方程。为此只要证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\right)\equiv 0,\qquad (i=1,\cdots,n) \tag{5.6.17}$$

我们有

$$\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\lambda}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)=\frac{\partial\lambda}{\partial q_i}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\right)&=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\lambda}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)\\&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial q_i}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial q_i}\right)\end{aligned}$$

故恒等式（5.6.17）得证。

5.6.4 对称变换，准对称变换，广义准对称变换

1. 对称变换

我们先来确定作用量的不变性定义。我们把作用量称为变换群 G_r 的不变量，如果对群的每一个变换，始终成立

$$\int_{t_1}^{t_2}L(t,q,\dot{q})\mathrm{d}t=\int_{t_1^*}^{t_2^*}L(t^*,q^*,\dot{q}^*)\mathrm{d}t^* \tag{5.6.18}$$

特别地，式（5.6.18）对无限小群变换（5.6.5）也是正确的，当然是精确到相对于 ε 的线性项。

定义 1 如果 Hamilton 作用量是无限小群变换的不变量，

即对每一个无限小群变换，始终成立

$$\Delta S=0 \tag{5.6.19}$$

则称无限小变换为对称变换。

2. 准对称变换

现设 L_1 是某个另外的Lagrange函数，对变换（5.6.5）精确到一阶小量满足条件

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t,q,\dot{q})\,\mathrm{d}t=\int_{t_1^*}^{t_2^*} L_1(t^*,q^*,\dot{q}^*)\mathrm{d}t^* \tag{5.6.20}$$

这里有非通常的不变性，我们称之为准不变性。因为不同于式（5.6.18），（5.6.20）的左边和右边有不同的Lagrange函数。如果由式（5.6.20）确定的Lagrange函数 L_1 可以得到与 L 一样的运动方程，那么我们称式（5.6.5）为准对称变换。由命题1知，在这种情况下，有关系

$$L_1(t,q,\dot{q})=L(t,q,\dot{q})+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda(t,q)$$

于是式（5.6.20）可以表示为

$$\int_{t_1^*}^{t_2^*}\left[L(t^*,q^*,\dot{q}^*)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^*}\lambda(t^*,q^*)\right]\mathrm{d}t^*=\int_{t_1}^{t_2} L(t,q,\dot{q})\mathrm{d}t$$

或

$$\int_{t_1^*}^{t_2^*} L(t^*,q^*,\dot{q}^*)\,\mathrm{d}t^*-\int_{t}^{t_2} L(t,q,\dot{q})\,\mathrm{d}t=-\int_{t_1^*}^{t_2^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^*}\lambda(t^*,q^*)\mathrm{d}t^* \tag{5.6.21}$$

式（5.6.21）的左边在变换（5.6.5）下是一阶无限小量，因此右边应为同阶无限小量。因此 $\Delta\lambda$ 可用来代替 λ。显然，精确到相对 ε 的一阶小可以认为 $\Delta\lambda(t^*,q^*)=\Delta\lambda(t,q,\dot{q})$。于是，我们有下述定义。

定义 2 如果Hamilton作用量是无限小群变换的准不变量，即对每一个无限小变换（5.6.5），始终成立

$$\Delta S=-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta\lambda)\mathrm{d}t \tag{5.6.22}$$

则称变换（5.6.5）为准对称变换。

容易看到，如果准对称变换应用于完整保守系统的 Lagrange 方程的某个解，那么这个解可变换到同一方程的某个另外解。

利用式（5.6.7），并考虑到积分区域的任意性，我们有下述命题。

命题 2 对于无限小群变换（5.6.5），若其满足

$$\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\Delta q_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Delta \dot{q}_i+L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)$$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta\lambda) \tag{5.6.23}$$

则式（5.6.5）为给定系统的准对称变换。

利用式（5.6.11），取 $\Delta\lambda=\sum_{\alpha=1}^{r}\epsilon_\alpha\lambda^\alpha$，并考虑到积分域的任意性及 ϵ_α 的独立性，我们有下述命题。

命题 3 若无限小群变换（5.6.6）满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\xi_0^\alpha+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bar{\xi}_i^\alpha\right]-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right]\bar{\xi}_i^\alpha$$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda^\alpha,\qquad(\alpha=1,\cdots,n) \tag{5.6.24}$$

则它是给定系统的准对称变换。

显然，在式（5.6.23），（5.6.24）的右边为零的情形中，作用量是给定变换的不变量，此时式（5.6.5）与（5.6.6）是对称变换。有些文献将准对称变换也称为对称变换，即对称变换是指以上的两类变换。

3. 广义准对称变换

为了研究非保守系统，不仅要考虑系统的 Hamilton 作用量，还要考虑到系统非保守力的虚功。为此，引入广义准对称变换的概念[21]。

假设作用在系统上的非势广义力为

$$Q_i=Q_i(t,q,\dot{q})$$

类似式（5.6.20），引进广义准不变性的概念，即若条件

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t,q,\dot{q})\mathrm{d}t=\int_{t_1^*}^{t_2^*} L_1(t^*,q^*,\dot{q}^*)\mathrm{d}t^*+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}Q_i\,\delta q_i\,\mathrm{d}t \tag{5.6.25}$$

对变换（5.6.5）精确到一阶小恒满足，并且由式（5.6.25）确定的 Lagrange 函数 L_1 可以得到与 L 一样的非保守系统的动力学方程，那么我们称变换（5.6.5）为广义准对称变换。同样容易看到，如果广义准对称变换应用于完整非保守系统 Lagrange 方程的某个解，那么这个解可变换到同一个方程的某个另外解。

定义 3 若对于变换（5.6.5）的每一个变换，系统的 Hamilton 作用量都是广义准不变量，即

$$\Delta S=-\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta\lambda)+\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i\right]\mathrm{d}t \tag{5.6.26}$$

成立，则我们称其为系统的广义准对称变换。

对于广义准对称变换，容易证明有以下判据。

命题 4 对于无限小变换（5.6.5），若满足

$$\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\Delta q_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Delta\dot{q}_i+L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}Q_i(\Delta q_i-\dot{q}_i\Delta t)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta\lambda) \tag{5.6.27}$$

则变换为给定系统的广义准对称变换。

命题 5 对于变换（5.6.6），若其满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\xi_0^{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bar{\xi}_i^{\alpha}\right]-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}-Q_i\right]\bar{\xi}_i^{\alpha}$$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda^{\alpha}\qquad(\alpha=1,\cdots,r) \tag{5.6.28}$$

则变换为给定系统的广义准对称变换。

4．例

例4 研究数学摆的小振动，其长为 l，质量为 m，Lagrange 函数 $L=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}^2-k^2\varphi^2)$，这里 $k^2=\frac{g}{l}$，φ 是摆对铅垂线的倾角。

我们导出运动方程为

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0$$

（1）对于变换

$$t^*=t+\varepsilon,\quad \varphi^*(t^*)=\varphi(t) \tag{a}$$

借助命题2，我们可以判断它是否为对称变换。这里 $\Delta t=\varepsilon$，$\Delta\varphi=0$，式（5.6.23）的左边等于零，因此变换（a）是对称变换，而 Lagrange 函数是变换的不变量。

（2）变换

$$t^*=t,\quad \varphi^*(t^*)=\varphi(t)+\varepsilon \tag{b}$$

对给定的问题来说不是对称变换。因为式（5.6.23）的左边等于 $\varepsilon\varphi k^2$，显然不会是某个函数对时间的全导数。

我们来看看，如果应用这些变换来解方程，将发生什么。系统的解是

$$\varphi=A\sin(kt+\alpha)$$

其中 A 及 α 由初始条件确定。将变换（a）应用于这个解，有

$$\varphi^*=A\sin[k(t^*-\varepsilon)+\alpha]$$

即我们得到方程的另外一个解

$$\varphi^*=A\sin[kt^*+\alpha_1]$$

其中 $\alpha_1=\alpha-k\varepsilon$。

若应用变换（b），则

$$\varphi^*=A\sin(kt^*+\alpha)+\varepsilon$$

显然，这表达式不是系统运动方程的解。 ||

5.6.5 Noether 定理及其逆定理

1. Noether 定理

定理 1 设给定的有限群 G_r 的无限小变换（5.6.6）是完整保守系统的准对称变换，那么此完整保守系统存在 r 个线性独立的第一积分，形如

$$L\xi_0^\alpha+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\bar{\xi}_i^\alpha+\lambda^\alpha=C_\alpha\qquad(\alpha=1,\cdots,r)\tag{5.6.29}$$

这里 $\bar{\xi}_i^\alpha=\xi_i^\alpha-\dot{q}_i\xi_0^\alpha\qquad(i=1,\cdots,n)$

〔证明〕 因为给定无限小变换（5.6.6）是准对称变换，有

$$\Delta S+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta\lambda)\mathrm{d}t=0$$

考虑到式（5.6.11），以及 $\Delta\lambda=\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha\lambda^\alpha$，我们有

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\xi_0^\alpha+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\bar{\xi}_i^\alpha+\lambda^\alpha\right]-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\xi_i^\alpha\right\}\mathrm{d}t=0$$

因为积分域是任意的，而 ε_α 彼此独立，因此对完整保守系统的真实轨道，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\xi_0^\alpha+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\bar{\xi}_i^\alpha+\lambda^\alpha\right]=0,\qquad(\alpha=1,\cdots,r)$$

或

$$L\xi_0^\alpha+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\bar{\xi}_i^\alpha+\lambda^\alpha=C_\alpha,\qquad(\alpha=1,\cdots,r)$$ ‖

定理 1 就是著名的 Noether 定理。在 $r=1$ 的情形，第一积分有形

$$L\Delta t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i+\Delta\lambda=\Delta C \qquad (5.6.30)$$

某些作者在文献中把满足对称变换，而不是准对称变换作为条件的定理 1 称之为 Noether 定理。这时，我们证明的定理可以称之为广义 Noether 定理。

例 5 质量为m的质点在均匀力场中沿直线运动，Lagrange 函数有形

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+kx$$

其中 $k=\text{const.}$。

无限小变换 $t^*=t$, $x^*=x+\epsilon$ 是准对称变换。因为由式（5.6.23）有

$$\epsilon k=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta\lambda)$$

即 $\Delta\lambda=-\epsilon kt$. 按定理 1，我们有形如（5.6.30）的第一积分，即

$$m\dot{x}-kt=C$$

2．Noether 逆定理

研究带 Lagrange 函数 $L=L(t,q,\dot{q})$的力学系统，它的 Hess 行列式

$$|h_{ij}|=\left|\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right|\neq 0$$

这时存在矩阵 $H=\|h_{ij}\|$ 的逆矩阵 $H^{-1}=\|\tilde{h}_{ij}\|$。因此

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{h}_{kj}h_{ji}=\delta_{ki}$$

假设已知完整保守系统的 r 个线性独立的第一积分

$$D^{\alpha}(t,q,\dot{q})=C_{\alpha}, \qquad (\alpha=1,\cdots,r) \qquad (5.6.31)$$

我们设法寻找相应的无限小准对称变换

$$t^* = t + \sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_\alpha \xi_0^\alpha(t, q, \dot{q}) \qquad (5.6.6)$$

$$q_i^*(t^*) = q_i(t) + \sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_\alpha \xi_i^\alpha(t, q, \dot{q}), \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

对于完整保守系统来说，其任意轨道必须满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \bar{\xi}_i^\alpha = 0, \qquad (\alpha = 1, \cdots, r)$$

$$(5.6.32)$$

这里 $\qquad \bar{\xi}_i^\alpha = \xi_i^\alpha - \dot{q}_i \xi_0^\alpha, \qquad (i = 1, \cdots, n; \ \alpha = 1, \cdots, r)$

在式（5.6.31）两端对时间求导，并与式（5.6.32）相加，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D^\alpha - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \bar{\xi}_i^\alpha = 0$$

$$(\alpha = 1, \cdots, r) \qquad (5.6.33)$$

显然，这些关系沿任意轨道恒满足，将它表为展开式，得

$$\frac{\partial D^\alpha}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial D^\alpha}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial D^\alpha}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_i} + \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \ddot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \bar{\xi}_i^\alpha = 0$$

很明显，沿任意轨道，所有 $\ddot{q}_j$ 的系数应为零，即

$$\frac{\partial D^\alpha}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \bar{\xi}_i^\alpha = 0, \qquad (j = 1, \cdots, n; \alpha = 1, \cdots, r)$$

解上面方程组，我们得到

$$\bar{\xi}_i^\alpha = \sum_{j=1}^{n} \bar{h}_{ij} \frac{\partial D^\alpha}{\partial \dot{q}_j}, \qquad (i = 1, \cdots, n; \ \alpha = 1, \cdots, r)$$

$$(5.6.34)$$

现在令
$$D^{\alpha}=L\xi_0^{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\bar{\xi}_i^{\alpha}+\lambda^{\alpha}\tag{5.6.35}$$
那么
$$\xi_0^{\alpha}=L^{-1}\Big(D^{\alpha}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\bar{\xi}_i^{\alpha}-\lambda^{\alpha}\Big),\qquad(\alpha=1,\cdots,r)\tag{5.6.36}$$
如果 $\bar{\xi}_i^{\alpha}$ 已由式（5.6.34）单值地确定，当函数 D^{α} 已知时，那么量 ξ_0^{α} 能求出精确到任意函数 $\lambda^{\alpha}=\lambda^{\alpha}(t,q,\dot{q})$。这意味着，选具体的函数 $\lambda^{\alpha}(\alpha=1,\cdots,r)$，我们得到确定的准对称变换。特别地，置 $\lambda^{\alpha}=0(\alpha=1,\cdots,r)$，我们得到
$$\xi_0^{\alpha}=L^{-1}\Big(D^{\alpha}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\xi_i^{\alpha}\Big),\qquad(\alpha=1,\cdots,r)\tag{5.6.37}$$
将式（5.6.35）代入式（5.6.33）中，根据命题 3 可知，求出的无限小变换是准对称变换。因此，我们得到下述定理。

定理 2　如果已知完整保守力学系统的 r 个线性独立的第一积分，那么由式（5.6.6），（5.6.34），（5.6.36）确定的无限小变换是系统的准对称变换。

显然，由定理 2 求出的变换是非单值的。

推论　如果已知完整保守力学系统的 r 个线性独立的第一积分（5.6.31），那么系统存在由式(5.6.6)，(5.6.34)，(5.6.37)确定的唯一的无限小变换是系统的对称变换。

我们称定理 2 为 Noether 定理的逆定理。

应用定理 2 的推论，我们来研究一个例子。限于 $r=1$ 的情形，而未知的变换表为形式
$$t^*=t+\Delta t,\quad q_i^*(t^*)=q_i(t)+\Delta q_i\tag{5.6.38}$$
其中
$$\Delta t=\varepsilon\xi_0,\quad \Delta q_i=\delta q_i+\dot{q}_i\Delta t,\quad \delta q_i=\varepsilon\xi_i$$
例 6　研究例 4 数学摆的小振动。显然，系统有第一积分
$$ml^2(\dot{\varphi}^2+k^2\varphi^2)=C$$
表示摆的机械能守恒。这里，$D=ml^2(\dot{\varphi}^2+k^2\varphi^2)$。

由式(5.6.34)，有

$$\bar{\xi}_\varphi=\frac{1}{ml^2}\ \frac{\partial D}{\partial\dot{\varphi}}=2\dot{\varphi}$$

由式（5.6.37），有

$$\xi_0=L^{-1}\left(D-\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\bar{\xi}_\varphi\right)=L^{-1}ml^2(\dot{\varphi}^2+k^2\varphi^2-2\dot{\varphi}^2)=-2$$

这时，利用式（5.6.38），我们求得

$$\Delta t=-2\varepsilon,\ \ \Delta\varphi=\varepsilon\bar{\xi}_\varphi+\dot{\varphi}\Delta t=0$$

这样，在给定情形中，变换 $t^*=t-2\varepsilon$，$\varphi^*(t^*)=\varphi(t)$ 是系统的对称变换。 ‖

5.6.6 力学中基本守恒定律的推导

利用作用量中被积函数的类型，借助于 Noether 定理，可找到完整保守系统的每条轨道保持为常数的函数，亦即守恒定律。

1. 能量守恒定律

我们研究当力学系统的 Lagrange 函数不明显依赖于时间，即 $L=L(q,\dot{q})$ 的情形，Noether 定理给出什么。

对 t 的独立性意味着，积分（5.6.4）在通常意义下，相对于无限小变换

$$t^*=t+\varepsilon,\ \ q_i^*(t^*)=q_i(t),\qquad (i=1,\cdots,n)$$

是不变的。事实上，式（5.6.23）的左边等于零，因此 $\Delta\lambda=0$。由式（5.6.30），我们得到运动方程的第一积分有形

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i-L=C \qquad (5.6.39)$$

这个关系，众所周知，称作广义能量积分或者 Jacobi-Painlevé 积分。

对于稳定系统，式（5.6.39）给出通常的机械能守恒定律。

2. 广义动量守恒定律

设 L 不依赖于坐标 $q_1,\cdots,q_r$，亦即它们是循环坐标。在此情

形中，无限小变换

$$t^*=t,\ q_\alpha^*=q_\alpha+\varepsilon_\alpha,\ q_i^*=q_i,\qquad (\alpha=1,\cdots,r;i=r+1,\cdots,n)$$

使作用量为不变的，因为在这种情形式（5.6.23）左边等于零。

利用式（5.6.29），我们得到 r 个第一积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}=C_\alpha\quad 或\ p_\alpha=C_\alpha,\qquad (\alpha=1,\cdots,r)\qquad (5.6.40)$$

亦即，由 Noether 定理得到：相应于循环坐标的广义动量在系统运动时保持为常数。容易证明，系统的动量守恒以及动量矩守恒都可由对循环坐标的等式（5.6.40）而得到，因此有下面的结论。

命题 6 如果广义坐标 q_l 是这样的：使系统象整体一样在方向 dq_l 上移动，而所有外力在这方向上的投影之和等于零，那么按 Noether 定理，由 L 相对于无限小变换

$$t^*=t;\ q_i^*=q_i,\ i\neq l;\ q_l^*=q_l+\varepsilon$$

的不变性，引出系统动量在方向 dq_l 上的动量守恒定律

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}=C\qquad (5.6.41)$$

命题 7 如果广义坐标 q_l 是这样的：使 dq_l 相应于系统绕某个轴的转动，而相对这轴的外力矩之和等于零，那么根据 Noether 定理，由 Lagrange 函数相对于无限小变换

$$t^*=t;\ q_i^*=q_i,\ i\neq l;\ q_l^*=q_l+\varepsilon$$

的不变性，得到系统相对于这轴的动量矩守恒定律，形如

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}=C\qquad (5.6.42)$$

5.6.7 Noether 定理的推广形式

1. 广义 Noether 定理

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_1,\cdots,q_n$ 来确定，并受有 g 个一阶非线性非完整约束

$$f_\beta=f_\beta(t,q,\dot{q})=0,\qquad (\beta=1,\cdots,g)\qquad (5.6.43)$$

根据 Appell-Четаев 定义（1.4.10），广义坐标的变分 δq 必须满足

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = 0 \tag{5.6.44}$$

对一阶非线性非完整系统，我们有广义 Noether 定理[21]。

定理 3 设对给定的非完整系统，无限小群变换（5.6.6）是广义准对称变换，同时这些无限小变换又满足 Appell-Четаев 定义，则此非完整系统存在 r 个线性独立的第一积分，形如

$$L\xi_0^\alpha + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bar{\xi}_i^\alpha + \lambda^\alpha = C_\alpha, \qquad (\alpha = 1, \cdots, r) \tag{5.6.45}$$

其中 $\bar{\xi}_i^\alpha = \xi_i^\alpha - \dot{q}_i \xi_0^\alpha$。

〔证明〕 如果无限小群变换（5.6.6）是广义准对称变换，则

$$\Delta S + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta\lambda) + \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i \right] \mathrm{d}t = 0$$

考虑到式（5.6.11），我们有

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_\alpha \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(L\xi_0^\alpha + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bar{\xi}_i^\alpha + \lambda^\alpha \right) \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - Q_i \right) \bar{\xi}_i^\alpha \right] \mathrm{d}t = 0 \tag{5.6.46}$$

因为无限小变换式（5.6.6）满足 Appell-Четаев 定义，故

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_i} \bar{\xi}_i^\alpha = 0, \qquad (\alpha = 1, \cdots, r; \ \beta = 1, \cdots, g) \tag{5.6.47}$$

引入 Lagrange 乘子 λ_β，我们有

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_\alpha \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_i} \bar{\xi}_i^\alpha = 0 \tag{5.6.48}$$

将式（5.6.46）和（5.6.48）相加，有

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha\Big[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(L\xi_0^\alpha+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\bar\xi_i^\alpha+\lambda^\alpha\Big)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}-Q_i-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot q_i}\Big)\bar\xi_i^\alpha\Big]\mathrm{d}t=0$$

因为积分域是任意的，而 ε_α 彼此独立，所以对于所研究的非完整系统的实际轨道，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[L\xi_0^\alpha+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\bar\xi_i^\alpha+\lambda^\alpha\Big]=0,\qquad(\alpha=1,\cdots,r)$$

即

$$L\xi_0^\alpha+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\bar\xi_i^\alpha+\lambda^\alpha=C_\alpha,\qquad(\alpha=1,\cdots,r)\qquad\|$$

当 $\alpha=1$ 时，定理 1 退化为如下推论。

推论 1 只要无限小变换的生成函数 ξ_i，ξ_0 以及规范函数 λ 满足

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot q_i}[\xi_i(t,q,\dot q)-\dot q_i\xi_0(t,q,\dot q)]=0\qquad(\beta=1,\cdots,g)\tag{5.6.49}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\xi_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\dot\xi_i+\Big(L-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\dot q_i\Big)\dot\xi_0+\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0$$

$$+\sum_{i=1}^{n}Q_i(\xi_i-\dot q_i\xi_0)+\dot\lambda(t,q,\dot q)=0\tag{5.6.50}$$

则非完整系统存在守恒量

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\xi_i+\Big(L-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\dot q_i\Big)\xi_0+\lambda=C=\text{const.}\tag{5.6.51}$$

这是非线性非完整系统 Noether 定理的一种特殊形式，其中我们称式（5.6.49）、（5.6.50）为广义 Noether 等式[20]。由推

论 1，我们可以得到非完整系统经典的守恒量。例如

（1）取 $\xi_i=0$，$\xi_0=1$，$\lambda=0$，则广义 Noether 等式退化为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=0\qquad(\beta=1,\cdots,g);\quad \frac{\partial L}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}Q_i\dot{q}_i=0$$

守恒量成为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=C$$

由此，我们显然可以得到关于广义能量积分的判定定理，即 § 5.1 的命题 3 。

（2）假设广义力有势，即 $Q_i=0$。取 $\xi_1=1$，其余 $\xi_i=0$ $(i\neq1)$，并且 $\xi_0=\lambda=0$，则广义 Noether 等式成为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_1}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial q_1}=0$$

守恒定律（5.6.51）成为

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=C_1$$

显然，这就是相对于循环坐标 q_1 的循环积分或者说广义动量守恒律。

当系统是完整非保守系统时，定理 3 退化为下述推论。

推论 2 设对完整非保守系统，无限小变换（5.6.6)是广义准对称变换，则此系统存在 r 个线性独立的第一积分，形如

$$L\xi_0^\alpha+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bar{\xi}_i^\alpha+\lambda^\alpha=C_\alpha,\qquad(\alpha=1,\cdots,r)\tag{5.6.52}$$

其中 $\bar{\xi}_i^\alpha=\xi_i^\alpha-\dot{q}_i\xi_0^\alpha$。

这就是完整非保守系统的广义 Noether 定理。当 $\alpha=1$ 时，是 Djukić[16] 和 Vujanović[16,17] 推广的 Noether 定理的形式。

2．广义 Noether 逆定理

对于非完整系统，同样可以由已知的第一积分，来寻求相应

的无限小广义准对称变换。

假设已知非完整非保守系统的 r 个线性独立的第一积分

$$D^{\alpha}(t,q,\dot{q})=C_{\alpha}, \qquad (\alpha=1,\cdots,r) \tag{5.6.53}$$

对于所研究的非完整系统来说，其任意轨道必须满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}-Q_i-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_i}=0,$$

$$(i=1,\cdots,n)$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}-Q_i-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_i}\right)\bar{\xi}_i^{\alpha}=0 \tag{5.6.54}$$

在式（5.6.53）两端对时间求导，并与式（5.6.54）相加，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D^{\alpha}-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}-Q_i-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_i}\right)\bar{\xi}_i^{\alpha}=0,$$

$$(\alpha=1,\cdots,r) \tag{5.6.55}$$

将上式表示为展开式，有

$$\frac{\partial D^{\alpha}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial D^{\alpha}}{\partial q_j}\dot{q}_j+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial D^{\alpha}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial t\partial \dot{q}_i}\right.$$

$$+\frac{\partial^2 L}{\partial q_j\partial \dot{q}_i}\dot{q}_j+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_j-\frac{\partial L}{\partial q_i}-Q_i(t,q,\dot{q})$$

$$\left.-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_{\beta}(t,q,\dot{q})\frac{\partial f_{\beta}(t,q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i}\right]\bar{\xi}_i^{\alpha}=0$$

很明显，沿任意轨道，所有 $\ddot{q}_j$ 的系数应为零，即

$$\frac{\partial D^{\alpha}}{\partial \dot{q}_j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j\partial \dot{q}_i}\bar{\xi}_i^{\alpha}=0,$$

$$(j=1,\cdots,n;\ \alpha=1,\cdots,r)$$

解上面的线性方程组，我们得到

$$\bar{\xi}_i^\alpha = \sum_{j=1}^n \bar{h}_{ij} \frac{\partial D^\alpha}{\partial \dot{q}_j}, \qquad (i=1,\cdots,n;\ \alpha=1,\cdots,r) \tag{5.6.56}$$

令
$$D^\alpha = L\xi_0^\alpha + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bar{\xi}_i^\alpha + \lambda^\alpha \tag{5.6.57}$$

那么

$$\xi_0^\alpha = L^{-1}\left(D^\alpha - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bar{\xi}_i^\alpha - \lambda^\alpha\right), \qquad (\alpha=1,\cdots,r) \tag{5.6.58}$$

显然，式（5.6.56），（5.6.58）和式（5.6.34），（5.6.36）在形式上完全一样，因此求出的无限小变换（5.6.6）是不唯一的。

对于非完整系统来说，其广义坐标的变分必须满足 Appell-Четаев 定义（5.6.44），即必须满足

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_i}\bar{\xi}_i^\alpha = 0, \quad (\alpha=1,\cdots,r;\ \beta=1,\cdots,g)$$

将上式和式（5.6.57）代入式（5.6.55），并整理有

$$\frac{d}{dt}\left\{L\xi_0^\alpha + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bar{\xi}_i^\alpha\right\} - \sum_{i=1}^n \left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - Q_i\right\}\bar{\xi}_i^\alpha$$
$$= -\frac{d}{dt}\lambda^\alpha \qquad (\alpha=1,\cdots,r) \tag{5.6.59}$$

根据命题 5 知，我们求出的变换是系统的广义准对称变换。于是我们得到如下定理。

定理 4 如果已知受一阶非线性非完整约束（5.6.43）的非保守系统的 r 个线性独立的第一积分，那么由式（5.6.6），（5.6.56），（5.6.58）确定的无限小变换，只要满足 Appell-Четаев 定义，必是系统的广义准对称变换。

这就是非完整非保守系统的 Noether 逆定理。它在形式上与完整保守系统的 Noether 定理中相应的公式一样，但现在求出的变换必须满足 Appell-Четаев 定义这个限制。如果去掉这个

限制，我们便得到完整非保守系统的 Noether 逆定理。

推论 如果已知完整非保守系统的 r 个线性独立的第一积分，那么由式（5.6.6），（5.6.56），（5.6.58）确定的无限小变换，必是系统的广义准对称变换。

例 7 Appell–Hamel 例。

考虑一质量为 m 的质点，在重力作用下的运动，所受有非线性非完整约束为

$$f=\dot{z}-a(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2}=0$$

系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz$$

令
$$q_1=x, q_2=y, q_3=z$$

则
$$L=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)-mgq_3$$

且
$$f=\dot{q}_3-a(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{1/2}=0$$

现在取
$$\xi_0^1=0,\quad \xi_1^1=\frac{1}{2}\dot{q}_1,\quad \xi_2^1=\frac{1}{2}\dot{q}_2,\quad \xi_3^1=\frac{1}{2}\dot{q}_3$$

$$\xi_0^2=0,\quad \xi_1^2=-\frac{1}{\dot{q}_2},\quad \xi_2^2=\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_2^2},\quad \xi_3^2=0$$

则

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\bar{\xi}_i^1=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}(\xi_i^1-\dot{q}_i\xi_0^1)=\frac{1}{2}a\dot{q}_1^2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-1/2}$$

$$+\frac{1}{2}a\dot{q}_2^2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-1/2}-\frac{1}{2}\dot{q}_3=\frac{1}{2}[a(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{1/2}-\dot{q}_3]=-\frac{1}{2}f=0$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\bar{\xi}_i^2=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}(\xi_i^2-\dot{q}_i\xi_0^2)$$

$$=a\dot{q}_1(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-1/2}\left(-\frac{1}{\dot{q}_2}\right)+a\dot{q}_2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-1/2}\left(\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_2^2}\right)$$

$$=a(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-1/2}\left(-\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_2}+\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_2}\right)=0$$

即我们引进的无限小变换满足 Appell-Четаев 定义。假设此变换是广义准对称变换，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\xi_0^\alpha+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bar{\xi}_i^\alpha\right]-\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}-Q_i\right]\bar{\xi}_i^\alpha$$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda^\alpha,\qquad (\alpha=1,2)$$

即
$$\dot{\lambda}^1=\frac{1}{2}mg\dot{q}_3-\frac{1}{2}m(\dot{q}_1\ddot{q}_1+\dot{q}_2\ddot{q}_2+\dot{q}_3\ddot{q}_3)$$

$$\dot{\lambda}^2=-m\frac{\ddot{q}_1\dot{q}_2-\dot{q}_1\ddot{q}_2}{\dot{q}_2^2}$$

于是有

$$\lambda^1=-\frac{1}{4}m(\dot{q}_1^2-\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+\frac{1}{2}mgq_3;\quad \lambda^2=-m\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_2}$$

因此，系统存在守恒量

$$L\xi_0^\alpha+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bar{\xi}_i^\alpha+\lambda^\alpha=C_\alpha,\qquad (\alpha=1,2)$$

即

$$\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+mgq_3=C_1$$

和

$$m\dot{q}_1\left(-\frac{1}{\dot{q}_2}\right)+m\dot{q}_2\left(\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_2^2}\right)-m\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_2}=C_2$$

即
$$\dot{q}_1/\dot{q}_2=C_3$$
其中
$$C_3=-C_2/m=\text{const}.$$
由这两个第一积分，我们立即得到系统的运动轨线，代回原来的直角坐标为

$$C_3^{-1}(C_3^2+1)^{1/2}(x-x_0)=(C_3^2+1)^{1/2}(y-y_0)=C_3(z-z_0)$$

其中 x_0, y_0, z_0 是系统在 $t=0$ 时的位置坐标。

下面我们来应用非完整系统的 Noether 逆定理。对 Appell-

Hamel 系统，显然成立

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=f=0,\quad \frac{\partial L}{\partial t}=0,\quad Q_i=0,\qquad (i=1,2,3)$$

即系统存在广义能量积分

$$\frac{1}{4}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+\frac{1}{2}mgq_3=\frac{1}{2}C=\text{const.}$$

所以

$$D=\frac{1}{4}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+\frac{1}{2}mgq_3$$

因为 $\dfrac{\partial D}{\partial \dot{q}_1}=\dfrac{1}{2}m\dot{q}_1,\quad \dfrac{\partial D}{\partial \dot{q}_2}=\dfrac{1}{2}m\dot{q}_2,\quad \dfrac{\partial D}{\partial \dot{q}_3}=\dfrac{1}{2}m\dot{q}_3$

又 $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=m\dot{q}_1,\quad \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}=m\dot{q}_2,\quad \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}=m\dot{q}_3$

故有 $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial \dot{q}_j}=m\delta_{ij},\qquad (i=1,2,3)$

$$\bar{h}_{ij}=\frac{1}{m}\delta_{ij},\qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

由 $\bar{\xi}_i=\sum_{j=1}^{3}\bar{h}_{ij}\dfrac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}$，我们求出

$$\bar{\xi}_1=\frac{1}{2}\dot{q}_1,\quad \bar{\xi}_2=\frac{1}{2}\dot{q}_2,\quad \bar{\xi}_3=\frac{1}{2}\dot{q}_3$$

将上面结果代入 $\xi_0=L^{-1}\left(D-\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bar{\xi}_i-\lambda\right)$，有

$$\xi_0=L^{-1}\left[-\frac{1}{4}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+\frac{1}{2}mgq_3-\lambda\right]$$

取 $\lambda=-\dfrac{1}{4}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+\dfrac{1}{2}mgq_3$

则 $\xi_0=0$。考虑到式（5.6.12），有

$$\xi_1=\frac{1}{2}\dot{q}_1,\quad \xi_2=\frac{1}{2}\dot{q}_2,\quad \xi_3=\frac{1}{2}\dot{q}_3$$

容易验证 $\bar{\xi}_i(i=1, 2, 3)$ 满足 Appell-Четаев 定义，故所求广义准对称变换为

$$t^*=t,\ q_1^*=q_1+\frac{1}{2}\epsilon\dot{q}_1,\ q_2^*=q_2+\frac{1}{2}\epsilon\dot{q}_2,\ q_3^*=q_3+\frac{1}{2}\epsilon\dot{q}_3$$

这恰是前面为求第一个守恒量而引进的无限小准对称变换。 ‖

§5.7 力学系统的积分不变量

众所周知，守恒定律在力学与物理学中起着重大作用。特别是由 Poincaré[22] 首先引出的所谓积分不变量具有重要价值。Poincaré 为了研究天体的运动，尤其是三体问题中渐近的和双渐近运动的稳定性，广泛应用了积分不变量。Chazy 借助积分不变量理论在三体问题中得到新的结论。Wilkins 的研究借助积分不变量给出了研究流星和慧星运动的重要结果。积分不变量在统计物理学，量子力学及微分方程的定性理论中获得了应用。

设有常微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1, \cdots, x_n, t),\qquad (i=1, \cdots, n)\quad (5.7.1)$$

它可研究作为 n 维空间中带有坐标 $x_1, \cdots, x_n$ 的点的运动。如果研究这样的一些点，它们在初始时刻占据 k 维区域 D_0，那么在后续时刻它们也将占据 k 维区域 D_0。方程(5.7.1) 的某个解组沿这个区域计算的 k 重积分，如果在任何时刻保持自己的值，按 Poincaré 的定义称之为 k 阶积分不变量。

如果积分不变量对初始条件的任选区域具有不变性的性质，那么称它为绝对积分不变量。如果积分区域应是封闭的，那么相应的积分不变量叫做相对积分不变量。

5.7.1 Poincaré一阶线性相对积分不变量

1. 存在Poincaré线性积分不变量的充分条件

如果把带 n 个自由度完整保守系统的运动解释为相点在 $2n$ 维状态空间中的运动，则可由Hamilton正则方程来描述。

定理1 在 $2n$ 维相空间 $(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)$ 对由Hamilton正则方程

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad (i=1, \cdots, n) \tag{5.7.2}$$

决定的完整保守系统的运动来说，存在如下的相对线性积分不变量

$$I_1=\oint \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i \tag{5.7.3}$$

〔证明〕 我们计算Hamilton作用量从一个真实轨道过渡到另一个真实轨道的等时变分。每一个轨道我们用某个参数 α 来确定，它依赖于相点的初始位置，亦即由广义坐标 q 及广义动量 p 的初始值给定的系统的初值状态。我们有

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\right)\right]\mathrm{d}t$$

又对等时变分来说，变分和微分运算成立交换关系

$$\delta\dot{q}_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i$$

又考虑到

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i$$

因此

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_{t=t_2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_{t=t_1}$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i \mathrm{d}t$$

因为这些邻近轨道是真实的，那么当沿它们运动时，满足 Lagrange 方程，故这时

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_{t=t_2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_{t=t_1}$$

或者过渡到广义动量

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i\Big|_{t=t_2}-\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i\Big|_{t=t_1} \qquad (5.7.4)$$

因为

$$\delta=\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathrm{d}\alpha$$

于是式（5.7.4）可写成

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\Phi(t,\alpha)\mathrm{d}\alpha=\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i\Big|_{t=t_2}-\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i\Big|_{t=t_1}$$

或者

$$\delta\Phi(t,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i\Big|_{t=t_2}-\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i\Big|_{t=t_1} \qquad (5.7.5)$$

这里

$$\Phi(t,\alpha)=\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t$$

我们想象相点的初始位置的封闭轮廓 C_0，它依赖于参数 α。我们以 C_0 上的每个点作为始点建立相点的轨道，正好得到某个管形轨道。每个时间 t 值相应于管形轨道的某个截面（相点的某个封闭轮廓）。为了使系统初始状态的轮廓是封闭的，参数 α 应是另一参数的周期函数，即初值 α_1 与终值 α_2 应重合

$$\alpha_1=\alpha_2$$

这时

$$\oint \delta\Phi(t,\ \alpha) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \delta\Phi(t,\ \alpha) = 0$$

因此，由式（5.7.5）知

$$\oint_{\text{II}} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - \oint_{\text{I}} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i = 0$$

这里Ⅰ与Ⅱ分别代表相应于时刻 t_1 及 t_2 的管形轨道截面的封闭轮廓。因此，对任意时刻有

$$I_1 = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i = \text{const.}$$ ‖

我们所得到的积分不变量称为Poincaré一阶线性相对积分不变量，或者Poincaré线性积分不变量。

注意，有些书[24,25]将Poincaré线性积分不变量记作

$$I_1 = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d} q_i \qquad (*)$$

事实上这和式（5.7.3）是一回事。这是因为，引进参数 α，则

$$q_i = q_i(t,\ \alpha), \qquad (i = 1,\ \cdots,\ n)$$

在计算（*）式时d代表的是状态空间微分，时间变量是不变的，即（*）式可表为

$$I_1 = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d} q_i = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \mathrm{d}\alpha$$

而考虑到

$$\delta = \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathrm{d}\alpha$$

故式（5.7.3）成为

$$I_1 = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \mathrm{d}\alpha$$

在本章中，我们均采用符号“δ”，不采用符号“d”，以便不与一般

微分的概念相混淆。

2．存在 Poincaré 线性积分不变量的必要条件

前面已证明，对 Hamilton 方程组，Poincaré 积分不变量是存在的。下面我们证明相反的结论。

定理 2 如果微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=Q_i(t,q,p),\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=P_i(t,q,p),\quad (i=1,\cdots,n) \tag{5.7.6}$$

具有 Poincaré 线性相对积分不变量 I_1，那么它一定有 Hamilton 正则方程的形式。

〔证明〕 事实上，在此情况下，有

$$\begin{aligned}0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_1&=\oint\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}\delta q_i+\oint\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i\\&=\oint\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}\delta q_i+\oint\sum_{i=1}^{n}p_i\delta\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

借助分部积分法有

$$\int p_i\delta\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=p_i\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}-\int\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}\delta p_i$$

故

$$0=\oint\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}\delta q_i-\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}\delta p_i\right)=0$$

或者根据方程(5.7.6)

$$\oint\sum_{i=1}^{n}(P_i\delta q_i-Q_i\delta p_i)=0$$

由于积分轮廓是任意的，那么被积函数乃是某个函数 $-H(t,q,p)$ 的变分

$$\sum_{i=1}^{n}(P_i\delta q_i-Q_i\delta p_i)=-\delta H(t,q,p)$$

即

$$Q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ P_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad (i=1,\ \cdots,\ n)$$

由定理 1 和定理 2 可知：微分方程组(5.7.6) 为 Hamilton 正则方程的充要条件便是存在 Poincaré 一阶线性相对积分不变量（5.7.3）。

5.7.2 高阶积分不变量

1. 高阶积分不变量

我们变换表达式（5.7.3）。因为

$$\delta\sum_{i=1}^{n} p_i q_i=\sum_{i=1}^{n}(q_i\delta p_i+p_i\delta q_i)$$

但

$$\oint\delta\sum_{i=1}^{n} p_i q_i=0$$

因此

$$\oint\sum_{i=1}^{n} q_i\delta p_i=-I_1$$

故

$$I_1=\frac{1}{2}\oint\sum_{i=1}^{n}(p_i\delta q_i-q_i\delta p_i)\qquad(5.7.7)$$

应用 Stokes 定理，有

$$\oint_C F_x(x,\ y)\mathrm{d}x+F_y(x,\ y)\mathrm{d}y=\iint_\sigma\left(\frac{\partial F_x}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里 σ 是由封闭轮廓 C 限制的任意曲面。于是，式（5.7.7）变为

$$I_1=\frac{1}{2}\iint_\sigma 2\sum_{i=1}^{n}\delta p_i\delta q_i=\iint_\sigma\sum_{i=1}^{n}\delta p_i\delta q_i\qquad(5.7.8)$$

最后的积分我们记作 I_2，并称之为二阶线性绝对积分不变量或二阶积分不变量。

Cartan[27] 借助于他建立的外形式方程证明了存在更高阶的，一直到 $2n$ 阶的积分不变量，有形式

$$I_{2k-1}=\underbrace{\iint\cdots\int}_{2k-1}\sum_{i_1 i_2\cdots i_k} p_{i_1}\delta q_{i_1}\delta p_{i_2}\delta q_{i_2}\cdots\delta p_{i_k}\delta q_{i_k} \quad (5.7.9)$$

$$(k=2,\ \cdots,\ n)$$

$$I_{2k}=\underbrace{\iint\cdots\int}_{2k}\sum_{i_1 i_2\cdots i_k}\delta p_{i_1}\delta q_{i_1}\delta p_{i_2}\delta q_{i_2}\cdots\delta p_{i_k}\delta q_{i_k}$$

$$(k=2,\ \cdots,\ n) \qquad (5.7.10)$$

奇数阶不变量是相对的，偶数阶不变量是绝对的。此外，如果沿计算 I_{2m-1} 的轮廓是对 I_{2m} 的积分区域的边界，则有

$$I_{2m}=I_{2m-1}, \qquad (m=1,\ \cdots,\ n) \qquad (5.7.11)$$

在此以及上一小节确定的积分不变量也称做万有积分不变量或通用积分不变量，因为它们不依赖于Hamilton函数 $H(t,\ q,\ p)$，因此对任何 Hamilton 系统都是对的。

2. Liouville 定理

表达式

$$\underbrace{\iint\cdots\int}_{2n}\delta p_1\delta q_1\delta p_2\delta q_2\cdots\delta p_n\delta q_n$$

也是积分不变量，在统计物理学中有重大价值并被称作 Liouville 积分不变量，它表示对任意时刻相空间的体积的不变性。

定理 3 （Liouville 定理） Hamilton 正则方程所决定的相空间的状态变化保持相体积不变，即

$$I=\underbrace{\iint\cdots\int}_{2n}\delta p_1\delta q_1\delta p_2\delta q_2\cdots\delta p_n\delta q_n \qquad (5.7.12)$$

是绝对积分不变量。

在证明定理 3 之前，我们先讨论 m 阶积分不变量的理论。设

$$I=\iint\cdots\int M(x,\ t)\delta x_1\delta x_2\cdots\delta x_m \qquad (5.7.13)$$

按照状态方程

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=X_i(x_1,\cdots,x_m,t),\qquad (i=1,\cdots,m)\quad(5.7.14)$$

在 $m+1$ 维空间中变化，现在来看看若要使 I 是积分不变量，则 M 必须满足什么条件。

假设式（5.7.14）的通解为

$$x_i=x_i(t,\alpha_1,\cdots,\alpha_m),\qquad (i=1,\cdots,m)\quad(5.7.15)$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为积分常数。对每一个运动来说，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 不变化，与时间无关。于是，我们可将 I 用 Jacobi 积分表示如下

$$I=\iint\cdots\int M\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{\partial(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)}\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\cdots\mathrm{d}\alpha_m$$

上式 α 的积分限不是时间 t 的函数，积分的区域是任意设定的。因此，有积分不变量的充要条件是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[M\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{\partial(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)}\right]=0\qquad(5.7.16)$$

令

$$J=\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{\partial(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_1} & \frac{\partial x_2}{\partial\alpha_1}\cdots\frac{\partial x_m}{\partial\alpha_1}\\ \frac{\partial x_1}{\partial\alpha_2} & \frac{\partial x_2}{\partial\alpha_2}\cdots\frac{\partial x_m}{\partial\alpha_2}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial x_1}{\partial\alpha_m} & \frac{\partial x_2}{\partial\alpha_m}\cdots\frac{\partial x_m}{\partial\alpha_m}\end{vmatrix}$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_j}\right)=\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\alpha_j}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\alpha_j}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}=\begin{vmatrix}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial X_1}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\alpha_1} & \frac{\partial x_2}{\partial\alpha_1}\cdots\frac{\partial x_m}{\partial\alpha_1}\\ \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial X_1}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\alpha_2} & \frac{\partial x_2}{\partial\alpha_2}\cdots\frac{\partial x_m}{\partial\alpha_2}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial X_1}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\alpha_m} & \frac{\partial x_2}{\partial\alpha_m}\cdots\frac{\partial x_m}{\partial\alpha_m}\end{vmatrix}$$

$$
+\begin{vmatrix}
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} & \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial X_2}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_1} \\
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} & \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial X_2}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_m} & \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial X_2}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_m} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_m}
\end{vmatrix}
$$

$$
+\cdots+\begin{vmatrix}
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial X_m}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_1} \\
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial X_m}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_m} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_m} & \cdots & \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial X_m}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_m}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right)J+\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)J+\cdots+\left(\frac{\partial X_m}{\partial x_m}\right)J
$$

$$
=\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}\right)J \qquad (5.7.17)
$$

由式（5.7.16），有

$$
J\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}+M\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}=0 \qquad (5.7.18)
$$

将式（5.7.18）代入式（5.7.17）中，有

$$
J\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}+M\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}\right)J=0
$$

或

$$
\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}(MX_i)+\frac{\partial M}{\partial t}=0 \qquad (5.7.19)
$$

因此，我们有如下命题。

命题1 常微分方程组（5.7.14）具有m阶绝对积分不变量

(5.7.13) 的充要条件是，函数M满足式 (5.7.19)。

对于 Hamilton 力学系统的相积分 (5.7.12) 来说，与式 (5.7.13) 比较可知

$m=2n$，$M=1$，而式 (5.7.14) 成为

$$X_i=\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad (i=1, \cdots, n)$$

$$X_i=\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\dot{p}_{i-n}=-\frac{\partial H}{\partial q_{i-n}}, \qquad (i=n+1, \cdots, 2n)$$

将这些代入式 (5.7.19)，有

$$\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial x_i}X_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)+\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{\partial}{\partial p_{i-1}}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_{i-n}}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\partial p_i}-\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial q_i}\right)=0$$

即满足式 (5.7.19)，因此由命题 1，我们证明了定理 3。

由定理 3，还可以导出统计力学的基本定理——Liouville 定理[9]，它是我们用相空间概念处理统计物理学问题的基本依据。

例 1 谐振子的运动用方程

$$\ddot{q}+\omega^2 q=0$$

来描述。求其解，我们有

$$q=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t$$

这里C_1和C_2是依赖于初始条件的常数。

在计算积分不变量时，可引出参数不直接对初始条件而是对另一些由初始条件确定的量的依赖关系。因此，我们选

$$C_1=\rho\cos\alpha, \quad C_2=b\rho\sin\alpha \qquad (a)$$

这里在计算I_1时$\rho=\rho_0$，而计算I_2时ρ由 0 到ρ_0变化，$b=$ const.，α由 0 到 2π 变化。

此系统动能有形为$T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2$，因此

$$p=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=a\dot{q}=a\omega(C_1\cos\omega t-C_2\sin\omega t)$$

下面来计算积分不变量

$$I_1=\oint p\delta q=\int_0^{2\pi} p\frac{\partial q}{\partial \alpha}\mathrm{d}\alpha=a\omega\rho_0^2\int_0^{2\pi}(\cos\alpha\cos\omega t$$

$$-b\sin\alpha\sin\omega t)(b\cos\alpha\cos\omega t-\sin\alpha\sin\omega t)\mathrm{d}\alpha=ab\omega\rho_0^2\pi$$

而

$$I_2=\int_0^{\rho_0}\int_0^{2\pi}\frac{\partial(p,q)}{\partial(\rho,\alpha)}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\alpha$$

其中

$$\frac{\partial(p,q)}{\partial(\rho,\alpha)}=b\rho a\omega$$

因此

$$I_2=\int_0^{\rho_0}\int_0^{2\pi}a\omega b\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\alpha=ab\omega\rho_0^2\pi$$

5.7.3 正则变换与积分不变量

1. Poincaré 定理

定理 4 二阶绝对积分不变量 $I_2=\iint_D\sum_{i=1}^n\delta p_i\delta q_i$ 在坐标的正则变换下是不变的，即

$$\iint_D\sum_{i=1}^n\delta p_i\delta q_i=\iint_D\sum_{k=1}^n\delta P_k\delta Q_k \qquad (5.7.20)$$

〔证明〕 因为积分区域 D 是相空间中的任意二维曲面，那么为表征相点在曲面上的位置，我们选两个参数 u 及 v，以使

$$q_i=q_i(u,v),\quad p_i=p_i(u,v)$$

我们有

$$\delta p_i \delta q_i = \frac{\partial(p_i, q_i)}{\partial(u, v)} \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

同样

$$\delta P_k \delta Q_k = \frac{\partial(P_k, Q_k)}{\partial(u, v)} \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

因此，式（5.7.20）成为

$$\iint_D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(p_i, q_i)}{\partial(u, v)} \mathrm{d}u \mathrm{d}v = \iint_D \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(P_k, Q_k)}{\partial(u, v)} \mathrm{d}u \mathrm{d}v \quad (5.7.21)$$

因为积分域 D 是任意的，u, v 是彼此独立的，因此式（5.7.21）仅当 Jacobi 行列式之和相等才是可能的，即

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(p_i, q_i)}{\partial(u, v)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(P_k, Q_k)}{\partial(u, v)} \quad (5.7.22)$$

研究由母函数 $U_1(q, Q, t)$ 确定的正则变换，我们有

$$p_i = \frac{\partial U_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial U_1}{\partial Q_i}$$

这时

$$\frac{\partial p_i}{\partial u} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U_1}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial u} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U_1}{\partial q_i \partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial u}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial v} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U_1}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial v} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U_1}{\partial q_i \partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial v}$$

将所得表达式代入式（5.7.22）左边，将每个行列式分成两个和并在每一行中提出公因子，得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(p_i, q_i)}{\partial(u, v)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial(q_k, q_i)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial q_i \partial Q_k} \frac{\partial(Q_k, q_i)}{\partial(u, v)} \right]$$

这等式右边的第一个和等于零，因为它不依赖于指标 i 及 k 的顺序，而同时位于其中的行列式当交换这些指标位置时改变符号。

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(p_i,q_i)}{\partial(u,v)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 U_1}{\partial q_i\partial Q_k}\frac{\partial(Q_k,q_i)}{\partial(u,v)}$$

类似有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(P_k,Q_k)}{\partial(u,v)}=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 U_1}{\partial Q_k\partial q_i}\frac{\partial(q_i,Q_k)}{\partial(u,v)}$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(p_i,q_i)}{\partial(u,v)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(P_k,Q_k)}{\partial(u,v)}$$

定理 4 又称为 Poincaré 定理。这个证明的想法是借用 Goldstein[28] 的，那里引用了 $F_2(q,p,t)$ 这个母函数。用同样的方法可研究由另外类型的母函数实现的正则变换。显然，考虑到式（5.7.8）知，定理 4 表明，一阶 Poincaré 积分不变量（5.7.3）在正则变换下也是不变的。

2．例

例 2 计算例 1 的谐振子的积分不变量在坐标的正则变换下的性质。作为母函数，我们取 $U_1=\frac{1}{2}a\omega q^2\mathrm{ctg}Q$，这时

$$P=-\frac{\partial U_1}{\partial Q}=\frac{1}{2}a\omega q^2\frac{1}{\sin^2 Q},\quad p=\frac{\partial U_1}{\partial q}=a\omega q\,\mathrm{ctg}Q$$

由此得

$$q=\sqrt{\frac{2P}{a\omega}}\sin Q,\qquad p=\sqrt{2a\omega P}\cos Q$$

写出简谐振子的 Hamilton 函数

$$H=T+V=\frac{1}{2}a\dot{q}^2+\frac{1}{2}cq^2=\frac{1}{2}\frac{1}{a}p^2+\frac{1}{2}cq^2$$

其中 $c=a\omega^2$ 是恢复力的系数。写出变换后 Hamilton 函数

$$H^*=H+\frac{\partial U_1}{\partial t}=H=\omega P\cos^2 Q+\omega P\sin^2 Q=\omega P$$

这时 Hamilton 正则方程为

$$\dot{Q}=\frac{\partial H}{\partial P}=\omega,\quad \dot{P}=-\frac{\partial K}{\partial Q}=0$$

由此得出

$P=\text{const.}$，$Q=\omega t+\gamma$，并且 $P=\frac{E}{\omega}$，这里 E 是振子的总能量。常数 E 及 γ 与常数 C_1 及 C_2 用关系

$$E=\frac{1}{2}a\omega^2(C_1^2+C_2^2);\quad \gamma=\text{arctg}\frac{C_1}{C_2}$$

相联系。因此，例 1 中关系（a）表示为

$$E=\frac{1}{2}a\omega^2\rho^2(\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha);\quad \gamma=\text{arctg}(b\,\text{tg}\,\alpha)$$

计算积分不变量

$$I_1=\oint P\delta Q=\int_0^{2\pi}\frac{E}{\omega}\frac{\partial Q}{\partial\gamma}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}\mathrm{d}\alpha$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{a\omega\rho_0^2(\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha)b}{2(1-b^2\text{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha}\mathrm{d}\alpha$$

$$=\frac{ab\omega\rho_0^2}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\alpha=ab\omega\rho_0^2\pi$$

类似地

$$I_2=\iint\delta P\delta Q=\int_0^{\rho_0}\int_0^{2\pi}\frac{\partial(P,Q)}{\partial(\rho,\alpha)}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\alpha=ab\omega\rho_0^2\pi$$

5.7.4 关于积分不变量的唯一性定理

1947 年，中国学者李华中证明了无论是相对的还是绝对的任意阶通用积分不变量的唯一性。他指出，任何其他的通用积分不变量仅和上列积分之一相差一个常数因子[29]。尤其重要的是关于一阶积分不变量的李华中定理。

定理 5（李华中定理） 若

$$I_1' = \oint \sum_{i=1}^{n} [A_i(t, q_k, p_k)\delta q_i + B_i(t, q_k, p_k)\delta p_i] \quad (5.7.23)$$

是通用相对积分不变量，则

$$I_1' = cI_1 \quad (5.7.24)$$

这里 c 是常数，I_1 是 Poincaré 线性积分不变量。

〔证明〕 为简单起见，认为 $n=1$。这时，从 I_1' 的不变性知，$\frac{dI_1'}{dt}=0$， 即

$$\frac{d}{dt}\oint [A(t, q, p)\delta q + B(t, q, p)\delta p] = 0 \quad (5.7.25)$$

对式（5.7.23）来说，积分是沿相平面（q, p）上的封闭回路选取的。应用 Hamilton 正则方程，可得到其通解有如下形式

$$q = q(t, q_0, p_0), \quad p = p(t, q_0, p_0)$$

其中 q_0, p_0 是当 $t=t_0$ 时 q, p 的初值。假设

$$q_0 = q_0(\alpha), \quad p_0 = p_0(\alpha)$$

是由初始条件的封闭轮廓所确定的函数，便得到任意时刻封闭轮廓的参数方程

$$q = q(t, \alpha), \quad p = p(t, \alpha)$$

积分 I_1' 中的 q, p 用这些函数代替后，在式（5.7.25）对积分号下求导数，然后改变对 t 的导数和变分的顺序，得

$$\oint\left[\frac{dA}{dt}\delta q + A\delta\frac{dq}{dt} + \frac{dB}{dt}\delta p + B\delta\frac{dp}{dt}\right] = 0$$

对上式左边分部积分并利用积分轮廓的封闭性，有

$$\oint\left[\frac{dA}{dt}\delta q + A\delta\frac{dq}{dt} + \frac{dB}{dt}\delta p + B\delta\frac{dp}{dt}\right]$$

$$= \oint\left[\frac{dA}{dt}\delta q - \delta A\frac{dq}{dt} + \frac{dB}{dt}\delta p - \delta B\frac{dp}{dt}\right]$$

$$= \oint\left\{\left[\frac{\partial A}{\partial t} + \left(\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q}\right)\frac{dp}{dt}\right]\delta q\right.$$

$$+\left[\frac{\partial B}{\partial t}+\left(\frac{\partial B}{\partial q}-\frac{\partial A}{\partial p}\right)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right]\delta p\left.\right\}=0$$

我们记

$$\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}=z \tag{5.7.26}$$

考虑到 Hamilton 方程

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q},\quad \dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}$$

最后得

$$\oint\left[\left(\frac{\partial A}{\partial t}-z\frac{\partial H}{\partial q}\right)\delta q+\left(\frac{\partial B}{\partial t}-z\frac{\partial H}{\partial p}\right)\delta p\right]=0 \tag{5.7.27}$$

因为等式（5.7.27）对任意封闭的积分轮廓是对的，那么被积表达式是某个函数的变分，亦即

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial A}{\partial t}-z\frac{\partial H}{\partial q}\right)=\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial B}{\partial t}-z\frac{\partial H}{\partial p}\right) \tag{5.7.28}$$

由式（5.7.26）

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial^2 A}{\partial p\partial t}-\frac{\partial^2 B}{\partial q\partial t}$$

因此式（5.7.28）变换为

$$\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}=0$$

考虑到 H 的通用性，即上式应在任何 H 下都满足，所以

$$\frac{\partial z}{\partial p}=\frac{\partial z}{\partial q}=\frac{\partial z}{\partial t}=0$$

即

$$z=\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}=\text{const.}=c$$

于是，我们有

$$\frac{\partial(A-cp)}{\partial p}=\frac{\partial B}{\partial q}$$

因此存在这样的函数 $\Phi(t,q,p)$，使

$$\delta\Phi=(A-cp)\delta q+B\delta p$$

这时

$$A\delta q+B\delta p=cp\delta q+\delta\Phi$$

因此

$$I_1'=\oint(A\delta q+B\delta p)=c\oint p\delta q+\oint\delta\Phi=cI_1$$

这就是所要证明的。当 $n>1$ 时，虽然证明本身变得比较复杂，但证明的思路仍然是这样的。‖

5.7.5 Poincaré-Cartan 积分不变量

我们研究 Hamilton 作用量的非等时变分 $\Delta\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t$。对于比较的真实轨道，它们带不同的初始条件，即初始时刻和终了时刻以及初始坐标和终了坐标都是不固定的，而是参数 α 的函数：

$$t_1=t_1(\alpha),\quad q_i^1=q_i^1(\alpha);\quad t_2=t_2(\alpha),\quad q_i^2=q_i^2(\alpha)$$
$$(i=1,\cdots,n)$$

应用分部积分法，有

$$\Delta S=\Delta\int_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)}L\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\delta L\mathrm{d}t+L\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2}$$

因为邻近轨道是真实的，那么重复 5.7.1 中的计算，我们得到

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\left(p_i\delta q_i\Big|_{t=t_2}-p_i\delta q_i\Big|_{t=t_1}\right)$$
$$+L\Big|_{t=t_2}\Delta t_2-L\Big|_{t=t_1}\Delta t_1$$

利用非等时变分和等时变分间的关系（2.2.16），有

$$\Delta q_i\Big|_{t=t_k}=\delta q_i\Big|_{t=t_k}+\dot{q}_i(t_k)\Delta t_k,\qquad(k=1,2)$$

以及 Hamilton 函数的表达式 $H=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-L$，可将 Hamilton 作

用量写成

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\Delta q_i\bigg|_{t=t_2} - H\bigg|_{t=t_2}\Delta t_2\right] - \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\Delta q_i\bigg|_{t=t_1} - H\bigg|_{t=t_1}\Delta t_1\right]$$

最后，研究在初值 α_1 与终值 α_2 相重合条件下相轨道对参数 α 的依赖性。选 Hamilton 作用量非等时变分由 α_1 到 α_2 的区间的积分，我们得到

$$\oint_{\mathrm{II}}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\Delta q_i - H\Delta t\right) - \oint_{\mathrm{I}}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\Delta q_i - H\Delta t\right) = 0$$

或者

$$\oint\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\Delta q_i - H\Delta t\right) = \text{const.} \tag{5.7.29}$$

所得积分称为 Poincaré-Cartan 积分不变量。在计算它时研究在扩充的相空间中的管形轨道。该空间除广义坐标 q_i 及广义动量 p_i 以外还有时间 t 作为坐标，而沿其积分的环绕管形轨道的轮廓不一定是同时状态的轮廓。显然，如果积分是沿同时状态的轮廓进行，那么 Poincaré-Cartan 积分不变量（5.7.29）变为 Poincaré 线性积分不变量（5.7.3）。

类似 5.7.1节，我们也可证明一个逆命题。设一阶微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = Q_i(t,\ q_j,\ p_j),\quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = P_i(t,\ q_j,\ p_j)$$

$$(i,\ j = 1,\ \cdots,\ n) \tag{5.7.30}$$

具有 Poincaré-Cartan 积分不变量，那么它一定具有 Hamilton 正则方程的形式[9]。因此，我们有如下结论。

定理 6 相空间的状态方程

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = Q_i(t,\ q_j,\ p_j),\quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = P_i(t,\ q_j,\ p_j)$$

$$(i,\ j = 1,\ \cdots,\ n)$$

是 Hamilton 正则方程的充要条件是，存在 Poincaré-Cartan 积分不变量

$$I = \oint \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \Delta q_i - H\Delta t \right)$$

5.7.6 没有积分不变量的动力学方程

由本章 5.7.1 和 5.7.5 可知，如果力学系统的运动不可以借助 Hamilton 正则方程来描述，亦即如果作用在它上面的力不是保守的，那么一般来说表达式 $\oint \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i$ 或 $\oint \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \Delta q_i - H\Delta t \right)$ 不是不变量，而是依赖于时间的。

我们研究这样类型的两个例子。

例 3[23] 设一个自由度的力学系统的运动是衰减振动，可用微分方程

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0 \qquad (a)$$

来描述，这里 $k > n > 0$。此方程的解为

$$q = e^{-nt}(C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t)，其中\ \omega = \sqrt{k^2 - n^2} \qquad (b)$$

同例 1 一样引出积分常数 C_1 及 C_2 对参数 ρ 及 α 的依赖关系

$$C_1 = \rho_0 \cos\alpha,\quad C_2 = b\rho_0 \sin\alpha \qquad (c)$$

动能形为

$$T = \frac{1}{2} a\dot{q}^2$$

故广义动量为

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q} = ae^{-nt}[C_1(\omega\cos\omega t - n\sin\omega t) - C_2(\omega \sin\omega t + n\cos\omega t)]$$

现在计算 $\oint p\delta q$，我们有

$$\oint p\delta q = \pi ab\omega\rho_0^2 e^{-2nt} \neq \text{const.} \qquad (d)$$

例 4[23] 如果力学系统的运动用方程

$$\ddot{q} - 2n\dot{q} + k^2 q = 0 \qquad (a)$$

描述，这里 $k>n>0$，有解

$$q = e^{nt}(C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t)，\text{其中 } \omega = \sqrt{k^2 - n^2} \qquad (b)$$

容易得到

$$\oint p\delta q = \pi ab\omega\rho_0^2 e^{2nt} \neq \text{const.} \qquad (c)$$

显然，例 3 结果（d）与例 4 结果（c）的差别仅在因子 e^{-2nt} 或e^{2nt}。因此，当时间无限增大时，$\oint p\delta q$ 在例 3 中减小到零，而在例 4 中无限增大。所以，系统相轨道管内部分布着由初始条件的小变化所引起的所有干扰相轨道，在例 3 中缩小为一点，而在例 4 中无限扩展。这是与下面事实相联系的：在例 3 中的衰减振动是稳定的，与此同时在例 4 中带有增大振幅的振动乃是不稳定的运动。

§5.8 历 史 资 料

5.8.1 名家介绍

S. D. Poisson（1781—1840） 法国数学家、力学家、物理学家。主要贡献在弹性理论，流体动力学，外弹道学，静电和磁铁理论，偏微分方程理论和概率论等方面。在刚体运动学方面有 Poisson 方程，在分析力学方面有 Poisson 括号，Poisson 定理等。

C. G. J. Jacobi（1804—1851） 德国数学家。椭圆函数论的创始人之一。在分析力学方面，他改进和发展了 Hamilton 的

工作，建立了一套解动力学微分方程的方法，即Hamilton-Jacobi 方法；给出了最小作用量原理的 Jacobi 形式等。

J. Liouville (1809—1882)　法国数学家。创刊并主编《Journal de Liouville》这个十九世纪最著名的数学杂志近四十年，对纯数学和应用数学做出过重要贡献，主要工作涉及数学分析，尤其是微分方程理论，代数，几何，数论。此外，对数学物理，天体力学和理论力学亦有贡献。在分析力学方面，他建立了关于 Hamilton 正则方程决定的相空间的状态变化保持相体积不变的著名 Liouville 定理。

E. T. Whittaker (1873—1956)　英国数学家、物理学家。在理论力学、光学和电磁学等方面发表许多论文。1904 年出版《分析动力学》，本书很好地总结了本世纪以前分析力学的成就，在剑桥大学多次出版。该书 1924 年被译成德文，1937 年被译成俄文。

E. R. Noether (1882—1935)　德国数学家。主要贡献在高等代数，群论和不变量理论。她在《不变变分问题》(Invariant Variationsprobleme, 1918) 中提出著名的 Noether 定理，揭示了动力学系统的守恒量与其内在的动力学对称性的潜在关系。近年，Noether 定理被推广到物理学和力学的多种领域中，形成了一个热点。

5.8.2　关于分析力学方程的积分理论

在分析力学方程的积分理论方面，本章主要讲述了七个问题：动力学方程的两种降阶方法，Poisson 定理及其应用，正则变换，Hamilton-Jacobi 方法，场方法，Noether 定理，力学系统的积分不变量等。

当然，属于分析力学积分理论的还有诸如 Lagrange 括号[4]，Levi-Civita 定理及其推广[4,31]，已知半数积分动力学问题的解及其推广[4,32]，根据已知积分确定作用在系统上的力[8]，

具有对动量为线性的积分的系统[4]，具有对速度平方的积分的系统[4]，时间积分定理的推广[33,34]，局部能量积分[35]等。

习　　题

1．试证明 §5.1 中的命题 4。

2．应用 Whittaker 方程和循环积分求解对称陀螺在光滑水平面上的运动。

3．一力学系统受有一阶线性齐次定常的非完整约束

$$\dot{q}_4=\dot{q}_1+\dot{q}_2\sin q_3+\dot{q}_3\sin q_2$$

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2+\dot{q}_4^2)$$

势能为

$$V=g(q_2+q_3)$$

试寻求循环积分，并利用循环积分降阶运动方程。

4．设某系统的 Hamilton 函数为

$$H=F\{f_n[\cdots,\ f_2(f_1(q_1,p_1),q_2,p_2)\cdots,q_n,p_n],t\}$$

试证明函数 $f_1(q_1,p_1)$，$f_2(f_1,q_2,p_2)$，…，$f_n(f_{n-1},q_n,p_n)$都是第一积分。

5．试证对 Hamilton 函数为

$$H(q_s,p_s)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(q_k,p_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k(q_k,p_k)}$$

的方程组来说，函数 $f_k(q_k,p_k)-H(q_s,p_s)\varphi_k(q_k,p_k)$ 是第一积分。

6．试证变换

$$Q_s=-q_sp_s,\quad P_s=\ln\left[\left(\frac{1}{a}\right)p_s^a q_s^{a+1}\right]\quad(s=1,\cdots,n)$$

是正则的，并求第四类变换的母函数 $F_4(p_s,P_s,t)$。

7．变换

$$x_1=\sqrt{\xi\eta}\cos\varphi,\quad x_2=\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi,\quad x_3=\frac{1}{2}(\xi-\eta)$$

实现了由直角坐标向广义坐标的过渡，求广义动量的变换公式

$$p_{x_i}=p_{x_i}(\xi,\eta,\varphi,p_\xi,p_\eta,p_\varphi,t)$$

确定变换的正则性，并求出母函数 U。

8．在平面上运动的质量为 m 的质点与两个固定中心 A 和 B 相互作用。A 和 B 之间的距离为 $2c$。相互作用势等于

$$V=-\left(\frac{\gamma_1}{r_1}+\frac{\gamma_2}{r_2}\right)$$

其中 $$r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\quad r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

是引力中心到质点的距离，而 γ_1 和 γ_2 是常数。试求 Hamilton-Jacobi 方程的全积分。

9．已知某力学系统的 Hamilton-Jacobi 方程的全积分为

$$S=-a_1\int f(t)\mathrm{d}t+\int\sqrt{a_nf_n(q_n)}\,\mathrm{d}q_n+\sum_{s=1}^{n-1}\int\sqrt{(a_s-a_{s+1})f_s(q_s)}\mathrm{d}q_s$$

试求该系统的 Hamilton 函数。

10．试用积分 Чаплыгин 方程的场方法求解 Чаплыгин 雪橇的惯性运动。此系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}k\dot{\varphi}^2$$

约束方程是

$$\dot{y}=\dot{x}\operatorname{tg}\varphi$$

11．试用非完整系统的广义 Noether 定理求均质球在粗糙水平面上运动的第一积分。

12．试证明 §5.6 定理 3 的推论 1。

13．设函数 $f(q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n)$ 是某 Hamilton 系统的第一积分。在增广相空间中选取一初始闭回路 C_0，使它位于上述第一积分所决定的某张积分曲面上，由 C_0 生成一流管，在此流管上任取一环绕流管的闭曲线 C，试证明

$$I' = \oint_C \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \Delta q_i - (H + f) \Delta t \right]$$

的值与 C 在流管上的选取无关。

14．设函数 $f(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)$ 是某 Hamilton 系统 的第一积分，试证

$$I = \iint_{2n} \cdots \int f(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n, t) \mathrm{d}q_1 \cdots \mathrm{d}q_n \mathrm{d}p_1 \cdots \mathrm{d}p_n$$

是绝对积分不变量。

参 考 文 献

〔1〕 梅凤翔．非完整系统力学基础．北京：北京工业学院出版社，1985．

〔2〕 刘端，梅凤翔．带任意阶非完整约束的力学系统的广义能量积分和广义 Whittaker 方程．兵工学报，2，1990．

〔3〕 Routh E J. A treatise on the stability of motion. London: Macmillia, 1877.

〔4〕 Whittaker E T. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies with an introduction to the problem of three bodies, Combrige, 1904.

〔5〕 刘端．非完整系统的 Routh 方法．科学通报，22，1988．

〔6〕 梅凤翔．利用循环积分降阶事件空间中非完整保守系统的广义 Чаплыгин 方程．北京工业学院学报，3(1)，1988．

〔7〕 梅凤翔．Whittaker 方程对非完整力学系统的推广．应用数学和力学，5(1)，1984．

〔8〕 梅凤翔．非完整动力学研究．北京：北京工业学院出版社，1987．

〔9〕 甘特马赫 Φ Р．分析力学讲义．钟奉俄，薛问西译．北京：人民教育出版社，1963．

〔10〕 赵世鹰．关于直接构造化零正则变换的一般方法．同济大学学报，14(1)，1986．

〔11〕 刘端. 非完整系统Lagrange力学逆问题及应用. 中国力学学会, 现代数学与力学讨论会论文, 1986.

〔12〕 Vujanović B. A field method and its application to the theory of vibrations. Int. J. Non-Linear Mechanics, 19(4), 1984.

〔13〕 Mei Fengxiang. A field method for solving the equations of motion of nonholonomic systems. Acta Mechanica Sinica, 5(3), 1989.

〔14〕 Mei Fengxiang. Parametric equations of nonholonomic systems in the event space and their method of integration. Acta Mechanica Sinica, 6(2), 1990.

〔15〕 Noether A E. Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. 1918.

〔16〕 Candotti E, Palmieri C and Vitale B. Am. J. Phys. 40, 1972.

〔17〕 Djukić Dj S, Vujanović B. Acta Mechanica, 23, 1975.

〔18〕 Vujanović B. Acta Mechanica, 65, 1986.

〔19〕 李子平. 约束系统的变换性质. 物理学报, 30(12), 1981.

〔20〕 刘端. 非完整非保守动力学系统的守恒律. 力学学报, 21(1), 1989.

〔21〕 Liu Duan. Noether's theorem and its inverse of nonholonomic nonconservative dynamical systems. Proc. of ICDVC, 1990.

〔22〕 Poincaré H. Les méthods nouvelles de la mécanique céleste. Paris: Gauthier-Villars, 1897.

〔23〕 Добронравов В В. Основы аналитической механики. М: Высшая школа, 1976.

〔24〕 陈滨. 分析动力学. 北京: 北京大学出版社, 1987.

〔25〕 汪家訸. 分析力学. 北京: 高等教育出版社, 1983.

〔26〕 梅凤翔, 刘桂林. 分析力学基础. 西安: 西安交通大学出版社, 1987.

〔27〕 Cartan E. Leçons sur les invariants intégraux. Paris: Hermann, 1921.

〔28〕 Goldstein H.. Classical mechanics. Addison-Wesley Press, 1950.

〔29〕 Hwa-Chung Lee. Invariants of Hamilton systems and applications to the theory of canonical transformations. Proc. Roy. Soc. Edinbourgh, Ser. A, V. LXⅡ, 1947.

〔30〕 Новоселов В С. Вариационные методы в механике. Л, 1966.

〔31〕 Каподанно П (Capodanno P). Распространение теоремы Леви-Чивита на неголономные системы. П. М. М. 45(3), 1981.

〔32〕 刘端，梅凤翔．一类特殊的非完整系统动力学方程的完全解．北京工业学院学报，3,1987.

〔33〕 Papastavridis J P. Int. J. Engng Sci., 25, 1987.

〔34〕 Mei Fengxiang. Time-integral theorems for variable mass nonholonomic systems. Applied Mechanics, Proc. of ICAM, Vol. 1, August, 1989.

〔35〕 罗勇，刘桂林．非完整力学系统的局部能量积分．北京工业学院学报，3，1987.

第六章　分析力学的张量方法

张量分析，起初被称作“绝对微分学”，它是在和物理学的相互促进中发展起来的，已经有百年历史。自Einstein发表著名的广义相对论论文以来，张量分析在理论物理、力学等领域中得到了广泛的应用，越来越受到人们的重视。

张量分析获得成功的主要原因有两个：张量分析把冗长的公式变得简洁、紧凑，从而突出了现象的几何特性和物理特性；张量运算具有不随坐标的选择而变化的性质。正是由于这种不变性，张量分析才被引入到分析力学中。

描述系统（定常的或非定常的）运动的各种形式的分析力学方程具有突出的缺点，它们对于（不包含时间或包含时间的）坐标变换群不是不变的。利用张量形式写出力学系统的运动方程可以避开这个缺点。这样，一方面可以使所得方程对坐标变换群具有不变性，另一方面还可得到运动方程的最紧凑的形式。

§6.1 张量分析的某些结论

6.1.1 张量的基本概念[1,2]

定义 1　设X是n维内积空间，$\{\boldsymbol{g}_i, i=1,\cdots,n\}$和$\{\boldsymbol{g}^j, j=1,\cdots,n\}$是$X$的两组极大线性无关组，且满足

$$\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\tag{6.1.1}$$

则称$\{\boldsymbol{g}_i\}$为X的一组协变基，$\{\boldsymbol{g}^j\}$为X的一组逆变基（或与$\{\boldsymbol{g}_i\}$对偶的基）。对任意$\boldsymbol{u}\in X$，有

$$\boldsymbol{u}=u_i\boldsymbol{g}^i=u^i\boldsymbol{g}_i \tag{6.1.2}$$

其中 u^i 称为矢量 $\boldsymbol{u}$ 的逆变分量，u_i 称为 $\boldsymbol{u}$ 的协变分量。式中使用了 Einstein 求和约定，即重复的指标表示求和。本书采用这种求和约定，无必要时不再另作说明。

定义 2 对于任意正整数 r，r 重线性函数

$$\boldsymbol{\Phi}:\ X\times X\times\cdots X\longrightarrow \boldsymbol{R}:\ (\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)\longmapsto\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r) \tag{6.1.3}$$

称为在 X 上的 r 阶张量（第六章、第七章中的 R 表示欧氏空间）。r 重线性是指：$\forall \boldsymbol{v}_i$、$\boldsymbol{v}_i'\in X$，α、$\beta\in R$，且满足

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\alpha\boldsymbol{v}_i+\beta\boldsymbol{v}_i',\cdots,\boldsymbol{v}_r)\\&=\alpha\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_i,\cdots,\boldsymbol{v}_r)+\beta\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_i',\cdots,\boldsymbol{v}_r)\end{aligned} \tag{6.1.4}$$

如果对任意的$\boldsymbol{v}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{v}_r\in X$，有

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)=\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r) \tag{6.1.5}$$

则两个 r 阶张量相等$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Psi}$。

记

$$\begin{aligned}&\phi_{i_1\cdots i_r}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}_{i_r})\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\phi_{i_1\cdots i_k}{}^{i_{k+1}\cdots i_r}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}_{i_k},\boldsymbol{g}^{i_{k+1}},\cdots,\boldsymbol{g}^{i_r})\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\phi^{i_1\cdots i_r}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}^{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}^{i_r})\end{aligned} \tag{6.1.6}$$

定义 3 $\phi_{i_1\cdots i_r}$ 称为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的协变分量，$\phi_{i_1\cdots i_k}{}^{i_{k+1}\cdots i_r}$ 称为$\boldsymbol{\Phi}$ 的混合分量，$\phi^{i_1\cdots i_r}$ 称为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的逆变分量。

张量的各种分量之间并非彼此独立，它们通过一种称为“度量张量”的张量分量相联系。

定义 4 记

$$g_{ij}=\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j,\quad g^{ij}=\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}^j \tag{6.1.7}$$

称 g_{ij} 为度量张量的协变分量，g^{ij} 为度量张量的逆变分量。显然，$g_{ij}=g_{ji}$，$g^{ij}=g^{ji}$。

由式（6.1.1）和式（6.1.7）知

$$\boldsymbol{g}_i=g_{ij}\boldsymbol{g}^j,\ \ \boldsymbol{g}^i=g^{ij}\boldsymbol{g}_j \tag{6.1.8}$$

$$g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases} \tag{6.1.9}$$

将式（6.1.8）代入式（6.1.6），得

$$\begin{aligned}
&g^{ji_k}\phi_{i_1\cdots i_k\cdots i_r}=\phi_{i_1\cdots}{}^{j}{}_{\cdots i_k}\\
&g_{ji_k}\phi^{i_1\cdots i_k\cdots i_r}=\phi^{i_1\cdots}{}_{j}{}^{\cdots i_k}\\
&g^{ji_k}g^{j_1i_s}\phi_{i_1\cdots i_k\cdots i_s\cdots i_r}=\phi_{i_1\cdots}{}^{j}{}_{\cdots}{}^{j_1}{}_{\cdots i_r}\\
&g^{ij_k}g_{j_1i_s}\phi_{i_1\cdots i_k\cdots}{}^{i_s}{}_{\cdots i_r}=\phi_{i_1\cdots}{}^{j}{}_{\cdots j_1\cdots i_r}
\end{aligned} \tag{6.1.10}$$

余者类推。

由此可见，张量的各种类型的分量，只要给定了一种，其余的便可确定。

如果对任意的 $\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_r\in X$，张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 的值

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)=0 \tag{6.1.11}$$

则称 $\boldsymbol{\Phi}$ 为零张量，且记为 0 。

定理 1 设 $\boldsymbol{\Phi}$、$\boldsymbol{\Psi}$ 是任意的 r 阶张量，α 是任一实数，如果按式（6.1.11）定义零张量，且引进“加法”和“数乘”运算：对 $\forall\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_r\in X$，

$$(\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\Psi})(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)+\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r) \tag{6.1.12}$$

$$(\alpha\boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)=\alpha\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r) \tag{6.1.13}$$

则全体 r 阶张量构成一个矢量空间，称为 X 上的 r 阶张量空间，记为 $\mathscr{T}_r(X)$。

〔证明〕 因由式（6.1.12）定义的“加法”运算，对任意的 r 阶张量 $\boldsymbol{\Phi}$、$\boldsymbol{\Psi}$、$\boldsymbol{\Omega}$，满足

$$\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{\Phi},\ \ (\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\Psi})+\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Phi}+(\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{\Omega})$$

$$\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{\Phi},\ \ \boldsymbol{\Phi}+(-\boldsymbol{\Phi})=0$$

而由式（6.1.13）定义的“数乘”运算，对任意的 r 阶张量 $\boldsymbol{\Phi}$、$\boldsymbol{\Psi}$，和任意的 α、$\beta\in\boldsymbol{R}$，满足

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{\Phi}=\alpha\boldsymbol{\Phi}+\beta\boldsymbol{\Phi}$$

$$\alpha(\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\Psi})=\alpha\boldsymbol{\Phi}+\alpha\boldsymbol{\Psi}$$

$$\alpha(\beta\boldsymbol{\Phi})=(\alpha\beta)\boldsymbol{\Phi},\ 1\cdot\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}$$

且这两种运算的结果仍然是r阶张量。因此，在式（6.1.12）的“加法”和式（6.1.13）的“数乘”定义下，全体r阶张量构成矢量空间。

定义 5 设$\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}_r(X)$，$\boldsymbol{\Psi}\in\mathscr{T}_s(X)$。如下定义的映射“$\otimes$”称为张量积：

$$\otimes:\mathscr{T}_r(X)\times\mathscr{T}_s(X)\to\mathscr{T}_{r+s}(X):(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi})\longmapsto\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi} \tag{6.1.14}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{r+s})=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{v}_{r+s})$

$$\forall\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{r+s}\in X \tag{6.1.15}$$

按经典的说法，张量积就是所谓的并乘。

显然，由定义5可得到如下一个定理。

定理 2 $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}$的分量是$\boldsymbol{\Phi}$和$\boldsymbol{\Psi}$的相应分量的乘积，例如

$$\Omega^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\phi^{i_1\cdots i_r}\psi_{j_1\cdots j_s} \tag{6.1.16}$$

对于简单张量❶ $\boldsymbol{u}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_r$，定义值

$$\boldsymbol{u}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)=(\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{v}_1)\cdots(\boldsymbol{u}_r\cdot\boldsymbol{v}_r)$$

$$\forall\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r\in X \tag{6.1.17}$$

定理 3 $\{\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\boldsymbol{g}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}\}$，$\{\boldsymbol{g}^{i_1}\otimes\boldsymbol{g}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}\}$，$\cdots$，$\{\boldsymbol{g}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i_r}\}$是$\mathscr{T}_r(X)$的$2^r$组基。每一基有$n^r$个简单张量❶，故$\mathscr{T}_r(X)$是$n^r$维的。

〔证明〕 我们只对$\{\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}\}$进行证明。

1° 设

$$\mathbf{u}=u^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}=0$$

即$\mathbf{u}$是零张量。根据前述零张量的定义（6.1.11），有

$$u^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}(\boldsymbol{g}^{j_1},\cdots,\boldsymbol{g}^{j_r})$$
$$=u^{i_1\cdots i_r}\delta^{j_1}_{i_1}\cdots\delta^{j_r}_{i_r}=u^{j_1\cdots j_r}=0$$

上式说明，$\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}$是线性无关的$r$阶张量组。

---

❶ 如果$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_r$，其中$\boldsymbol{v}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{v}_r\in X$，则称张量$\boldsymbol{\Phi}$为简单张量。

2° 对任意的$\Phi \in \mathscr{T}_r(X)$，有

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^r)&=\Phi(v_{i_1}^1\boldsymbol{g}^{i_1},\cdots,v_{i_r}^r\boldsymbol{g}^{i_r})\\&=v_{i_1}^1\cdots v_{i_r}^r\Phi(\boldsymbol{g}^{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}^{i_r})\\&=v_{i_1}^1\cdots v_{i_r}^r\phi^{i_1\cdots i_r}\\&=\phi^{i_1\cdots i_r}(\boldsymbol{g}_{i_1}\cdot\boldsymbol{v}^1)\cdots(\boldsymbol{g}_{i_r}\cdot\boldsymbol{v}^r)\\&=\phi^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}(\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^r)\end{aligned}$$

即Φ可以由张量组$\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}$线性表示。因而$\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}$是$\mathscr{T}_r(X)$的一组基。

综上所述，任意一个r阶张量Φ均可表示成

$$\Phi=\phi^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}$$

根据定理 2，度量张量$\mathbf{I}$可以表示为

$$\mathbf{I}=g_{ij}\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}^j=g^{ij}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j \tag{6.1.18}$$

1 阶张量就是矢量，0 阶张量就是常数。

6.1.2 张量的性质

设有另一组协变基$\{\boldsymbol{g}_{i'},i=1,\cdots,n\}$。将$\boldsymbol{g}_{i'}$在$\boldsymbol{g}_i$上分解，有

$$\boldsymbol{g}_{i'}=A_{i'}^{i}\boldsymbol{g}_i \tag{6.1.19}$$

则

$$\begin{aligned}g_{i'j'}=\boldsymbol{g}_{i'}\cdot\boldsymbol{g}_{j'}&=A_{i'}^{k}A_{j'}^{l}\boldsymbol{g}_k\cdot\boldsymbol{g}_l\\&=A_{i'}^{k}A_{j'}^{l}g_{kl}\end{aligned} \tag{6.1.20}$$

同样，将新逆变基$\{\boldsymbol{g}^{i'},i=1,\cdots,n\}$在$\{\boldsymbol{g}^i\}$上分解，有

$$\boldsymbol{g}^{i'}=B_j^{i'}\boldsymbol{g}^j \tag{6.1.21}$$

则

$$\begin{aligned}g^{i'j'}=\boldsymbol{g}^{i'}\cdot\boldsymbol{g}^{j'}&=B_k^{i'}B_l^{j'}\boldsymbol{g}^k\cdot\boldsymbol{g}^l\\&=B_k^{i'}B_l^{j'}g^{kl}\end{aligned} \tag{6.1.22}$$

由$\boldsymbol{g}^{i'}\cdot\boldsymbol{g}_{j'}=\delta_{j'}^{i'}$，得

$$A_{j'}^{i}B_i^{i'}=\delta_{j'}^{i'} \tag{6.1.23}$$

即矩阵$(A_{j'}^{i})$与$(B_i^{i'})$互为逆矩阵。

定义 6 $A_{i'}^{i}$称为协变转换系数，$B_i^{i'}$称为逆变转换系数。

新的协变基$\{\boldsymbol{g}_{i'}\}$诱导出$\mathscr{T}_r(X)$的2^r组新的乘积基：

$\{\boldsymbol{g}_{i_1'}\otimes\boldsymbol{g}_{i_2'}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r'}\}$，…，$\{\boldsymbol{g}^{i_1'}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i_r'}\}$。张量$\Phi$在新

基下可表示为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi} &= \phi^{i'_1\cdots i'_r}\boldsymbol{g}_{i'_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i'_r} \\
&= \phi_{i'_1}{}^{i'_2\cdots i'_r}\boldsymbol{g}^{i'_1}\otimes\boldsymbol{g}_{i'_2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i'_r} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \phi_{i'_1\cdots i'_r}\boldsymbol{g}^{i'_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i'_r}
\end{aligned}
\tag{6.1.24}
$$

将式（6.1.21）、（6.1.19）代入式（6.1.6），可得 $\boldsymbol{\Phi}$ 的新旧分量之间有如下关系：

$$
\begin{aligned}
&\phi^{i'_1\cdots i'_r} = B^{i'_1}_{j_1}\cdots B^{i'_r}_{j_r}\phi^{j_1\cdots j_r} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\phi_{i'_1\cdots i'_r} = A^{j_1}_{i'_1}\cdots A^{j_r}_{i'_r}\phi_{j_1\cdots j_r}
\end{aligned}
\tag{6.1.25}
$$

与矢量类似，张量也有形如式（6.1.24）的实体表示和形如式（6.1.6）的分量表示两种表示方法。

6.1.3 绝对微分

设系统在状态空间中质点的位置由矢量

$$
\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q^i) \tag{6.1.26}
$$

表示。取协变基矢量为

$$
\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} \tag{6.1.27}
$$

显然，$\{\boldsymbol{g}_i, i=1,\cdots,n\}$ 将是随点变化的局部协变基[2]。

因 $\dfrac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial q^i}$ 是矢量，故可令

$$
\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial q^i} = \Gamma^k_{ij}\boldsymbol{g}_k = \Gamma_{ij,k}\boldsymbol{g}^k \tag{6.1.28}
$$

其中 $\{\boldsymbol{g}^k, k=1,\cdots,n\}$ 是逆变基，因而

$$
\Gamma_{ij,k} = g_{kl}\Gamma^l_{ij} \tag{6.1.29}
$$

定理 4 如下关系成立：

$$
\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right) \tag{6.1.30}
$$

$$\Gamma_{ij,k}=\Gamma_{ji,k},\quad \Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji} \tag{6.1.31}$$

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{lk}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial q^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial q^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^l}\right) \tag{6.1.32}$$

其中 Γ^k_{ij} 称为第二类 Christoffel 符号，$\Gamma_{ij,k}$ 称为第一类 Christoffel 符号。

〔证明〕 由式（6.1.27）和（6.1.28）和

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial q^j}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q^j\partial q^i}=\Gamma^k_{ij}\boldsymbol{g}_k=\Gamma_{ij,k}\boldsymbol{g}^k$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial q^i}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q^i\partial q^j}=\Gamma^k_{ji}\boldsymbol{g}_k=\Gamma_{ji,k}\boldsymbol{g}^k$$

由求偏导数次序的可交换性，得

$$\Gamma_{ij,k}=\Gamma_{ji,k},\quad \Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$$

因而有

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}=\frac{\partial(\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_k)}{\partial q^j}=\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial q^j}\cdot\boldsymbol{g}_k+\boldsymbol{g}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial q^j}$$

$$=\Gamma_{ij,l}\boldsymbol{g}^l\cdot\boldsymbol{g}_k+\boldsymbol{g}_i\cdot\Gamma_{kj,l}\boldsymbol{g}^l$$

$$=\Gamma_{ij,k}+\Gamma_{kj,i}$$

同理可得

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}=\Gamma_{ji,k}+\Gamma_{ki,j}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}=\Gamma_{ik,j}+\Gamma_{jk,i}$$

由以上三式可推出

$$\Gamma_{ij,k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right)$$

式（6.1.32）可由上式及式（6.1.28）直接得到。 ‖

将 $\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial q^j}$ 在逆变基上分解，有[1,2]

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial q^j}=-\Gamma^i_{jk}\boldsymbol{g}^k \tag{6.1.33}$$

需注意的是，Γ^k_{ij} 不是张量分量，因为当坐标系由 $\{q^i\}$ 转换

为$\{q^{i'}\}$时，有

$$\Gamma^{l'}_{i'j'}=\frac{\partial^2 q^p}{\partial q^{i'}\partial q^{j'}}\frac{\partial q^{l'}}{\partial q^p}+A^{\rho}_{i'}A^{k}_{j'}B^{l'}_{r}\Gamma^{r}_{\rho k}\qquad(6.1.34)$$

不服从张量分量的转换关系（因$\frac{\partial^2 q^p}{\partial q^{i'}\partial q^{j'}}\frac{\partial q^{l'}}{\partial q^p}$一般不为零）。式中

$$A^{i}_{i'}=\frac{\partial q^i}{\partial q^{i'}},\quad B^{i'}_{i}=\frac{\partial q^{i'}}{\partial q^i}$$

这由式（6.1.9）、（6.1.23）和（6.1.27）即可得到。

把定义在质点上的任意矢量$\boldsymbol{u}(t)$在瞬时协变基或逆变基上分解，有

$$\boldsymbol{u}(t)=u^i(t)\boldsymbol{g}_i(q^j(t))=u_i(t)\boldsymbol{g}^i(q^j(t))\qquad(6.1.35)$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u^i(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}_i(t)+u^i(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}_i(t)}{\mathrm{d}t}\qquad(6.1.36)$$

因

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}_i(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial q^j}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}t}=\Gamma^{k}_{ij}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}_k\qquad(6.1.37)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u^i(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}_i+u^k\Gamma^{i}_{kj}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}_i$$

$$=\left(\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}+\Gamma^{i}_{kj}u^k\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}t}\right)\boldsymbol{g}_i\qquad(6.1.38)$$

记

$$\frac{\mathrm{D}u^i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}+\Gamma^{i}_{kj}u^k\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}t}\qquad(6.1.39)$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{D}u^i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}_i\qquad(6.1.40)$$

$\frac{\mathrm{D}u^i}{\mathrm{d}t}$称为矢量分量$u^i$对参数$t$的全导数，亦称为绝对导数。

类似上面的推导，我们还可得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}^i=\left(\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}-u_k\dot{q}^j\Gamma^k_{ji}\right)\boldsymbol{g}^i \tag{6.1.41}$$

$\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{d}t}$称为分量 u_i 的绝对导数。

由式（6.1.39），有

$$\mathrm{D}u^i=\mathrm{d}u^i+\Gamma^i_{kj}u^k\mathrm{d}q^j \tag{6.1.42}$$

$\mathrm{D}u^i$ 称为矢量分量 u^i 的绝对微分，亦称为全微分。

将式（6.1.35）对 q^j 求偏导数，得

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial q^j}=\frac{\partial u^i}{\partial q^j}\boldsymbol{g}_i+u^i\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial q^j}$$

$$=\left(\frac{\partial u^i}{\partial q^j}+u^k\Gamma^i_{jk}\right)\boldsymbol{g}_i=\nabla_j u^i\boldsymbol{g}_i \tag{6.1.43}$$

其中 $$\nabla_j u^i=\frac{\partial u^i}{\partial q^j}+\Gamma^i_{jk}u^k$$

称为逆变分量 u^i 对坐标 q^j 的协变导数。

§6.2 基本动力学量和运动学量的张量表示

6.2.1 速度与加速度

1. 定常情形

设质点的位置由矢径 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q^i)$ 表示，即系统是定常的，其中 q^i 是广义坐标。取协变基矢量为

$$\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} \tag{6.2.1}$$

则[1,2]

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}\dot{q}^i=\dot{q}^i\boldsymbol{g}_i \tag{6.2.2}$$

由式（6.1.40）知

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{D}\dot{q}^i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}_i=(\ddot{q}^i+\Gamma^i_{kj}\dot{q}^k\dot{q}^j)\boldsymbol{g}_i \tag{6.2.3}$$

式（6.2.2）和（6.2.3）分别是质点的速度和加速度的张量表示。

2．非定常情形

对于非定常系统，质点的位置可以用矢径

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q^j,t) \tag{6.2.4}$$

表示，则

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}=\dot{q}^i\boldsymbol{g}_i+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \tag{6.2.5}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\ddot{q}^i\boldsymbol{g}_i+\dot{q}^i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}_i}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} \tag{6.2.6}$$

矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 是坐标 q^i 和时间 t 的函数，故

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial q^j}\dot{q}^j+\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial t}=\dot{q}^j\Gamma^k_{ij}\boldsymbol{g}_k+\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial t}$$

$$=\dot{q}^j\Gamma^k_{ij}\boldsymbol{g}_k+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t\partial q^i} \tag{6.2.7}$$

记
$$a_i=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}=\boldsymbol{g}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \tag{6.2.8}$$

$$A=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \tag{6.2.9}$$

由于对每一个时刻 t，$\boldsymbol{g}_i$（或 $\boldsymbol{g}^i$）是系统构形空间的基，而 $\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t\partial q^j}$，$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2}$ 是构形空间中的矢量，所以可将它们展开成 $\boldsymbol{g}_i$（或 $\boldsymbol{g}^i$）的线性式：

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t\partial q^j}=\Gamma^i_j\boldsymbol{g}_i=\Gamma_{j,k}\boldsymbol{g}^k \tag{6.2.10}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2}=\Gamma^i\boldsymbol{g}_i=\Gamma_j\boldsymbol{g}^j \tag{6.2.11}$$

由式（6.2.10）及 $\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j=\delta^j_i$，知

$$\Gamma_j^i = g^{ik}\Gamma_{j,k}, \quad \Gamma_{j,k} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t \partial q^j} \cdot \boldsymbol{g}_k \qquad (6.2.12)$$

命题 1 $$\Gamma_{j,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_k}{\partial q^j} - \frac{\partial a_j}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial t}\right) \qquad (6.2.13)$$

〔证明〕 将式（6.2.8）的两边对 q 求偏导数，有

$$\frac{\partial a_k}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t \partial q^j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^k} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q^j \partial q^k}$$

$$\frac{\partial a_j}{\partial q^k} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q^k \partial q^j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^j} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q^k \partial t}$$

由 $g_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^j}$，得

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^j} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q^k \partial t} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t \partial q^j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^k}$$

由以上三式，有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_k}{\partial q^j} - \frac{\partial a_j}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q^j \partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^k}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q^j \partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^k} = \Gamma_{j,k}$$

利用命题 1，可将 Γ_j^i 写成

$$\Gamma_j^i = \frac{1}{2} g^{ik}\left(\frac{\partial a_k}{\partial q^j} - \frac{\partial a_j}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial t}\right) \qquad (6.2.14)$$

由式（6.2.11），系数 Γ_j 为

$$\Gamma_j = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial^2 t} \cdot \boldsymbol{g}_j, \quad \Gamma^i = g^{ij}\Gamma_j \qquad (6.2.15)$$

命题 2 $$\Gamma_j = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial a_j}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial q^j}\right) \qquad (6.2.16)$$

〔证明〕 由式（6.2.8）和（6.2.9）知

$$\frac{\partial a_j}{\partial t} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q^j \partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^j}$$

$$\frac{\partial A}{\partial q^j}=2\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t\partial q^j}$$

将以上两式代入下式

$$\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial a_j}{\partial t}-\frac{\partial A}{\partial q^j}\right)=\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^j}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^j}=\Gamma_j$$

‖

利用命题 2，可以将系数 Γ^i 写成如下形式

$$\Gamma^i=\frac{1}{2}g^{ji}\left(2\frac{\partial a_j}{\partial t}-\frac{\partial A}{\partial q^j}\right) \tag{6.2.17}$$

由式（6.2.14）和（6.2.17），质点的加速度 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ 具有形式

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=(\ddot{q}^i+\Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k+2\Gamma^i_j\dot{q}^j+\Gamma^i)\boldsymbol{g}_i \tag{6.2.18}$$

式（6.2.5）和（6.2.18）分别是非定常情形下质点的速度和加速度的张量表达式。将它们与定常情形的速度和加速度表达式（6.2.2）、（6.2.3）相比较，由于时间 t 的出现，式(6.2.5)比式（6.2.2）多了 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}$ 一项；式（6.2.18）比式（6.2.3）多了两项，即

$$(2\Gamma^i_j\dot{q}^j+\Gamma^i)\boldsymbol{g}_i$$

6.2.2 动能和加速度能

1. 定常情形

如果系统由N个质点组成，每个质点的位置由 3 维欧氏空间中的矢径 $\boldsymbol{r}_i$ 确定，质量为 m_i，则系统动能为

$$T=\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i$$

系统的位形由 $3N$ 维欧氏空间中的矢径 $\boldsymbol{r}$ 表示。设

$$\boldsymbol{r}_i=x^1_i\boldsymbol{e}_1+x^2_i\boldsymbol{e}_2+x^3_i\boldsymbol{e}_3 \tag{6.2.19}$$

$$\boldsymbol{r}=y^j\boldsymbol{e}'_j \tag{6.2.20}$$

其中 $\boldsymbol{e}'_j$ 是 $\boldsymbol{R}^{3N}$中的标准正交基；$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的标准正交

基；y^i 如下选取

$$y^{3i}=\frac{x_i^1}{\sqrt{m_i}},\quad y^{3i+1}=\frac{x_i^2}{\sqrt{m_i}},\quad y^{3i+2}=\frac{x_i^3}{\sqrt{m_i}} \tag{6.2.21}$$

则系统动能 T 可以用矢径 $\boldsymbol{r}$ 表示为

$$T=\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \tag{6.2.22}$$

设系统的位形由 n 个广义坐标 q^1，…，q^n 确定。利用式（6.2.5），上式亦有形式

$$T=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{1}{2}\dot{q}^i\boldsymbol{g}_i\cdot\dot{q}^j\boldsymbol{g}_j=\frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j \tag{6.2.23}$$

系统的加速度能 S 为[3][7,8]

$$S=\frac{1}{2}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_i$$

考虑到式（6.2.19）、（6.2.20）和（.6.2.22），上式亦可用矢径 $\boldsymbol{r}$ 表示成

$$S=\frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}$$

故由式（6.2.3）知，加速度能可表示为

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{1}{2}(\ddot{q}^i+\Gamma^i_{kj}\dot{q}^k\dot{q}^j)\boldsymbol{g}_i\cdot(\ddot{q}^l+\Gamma^l_{mn}\dot{q}^m\dot{q}^n)\boldsymbol{g}_l\\
&=\frac{1}{2}g_{il}(\ddot{q}^i\ddot{q}^l+\Gamma^i_{kj}\ddot{q}^l\dot{q}^k\dot{q}^j+\Gamma^l_{mn}\ddot{q}^i\dot{q}^m\dot{q}^n+\Gamma^i_{kj}\Gamma^l_{mn}\dot{q}^k\dot{q}^j\dot{q}^m\dot{q}^n)\\
&=g_{il}\Big(\frac{1}{2}\ddot{q}^i\ddot{q}^l+g^{mi}\Gamma_{kj,m}\ddot{q}^l\dot{q}^k\dot{q}^j+\frac{1}{2}g^{ir}\Gamma_{kj,r}\dot{q}^k\dot{q}^j\\
&\qquad\times g^{pl}\Gamma_{mn,p}\dot{q}^m\dot{q}^n\Big)\\
&=\frac{1}{2}g_{il}\ddot{q}^i\ddot{q}^l+\Gamma_{kj,i}\ddot{q}^i\dot{q}^k\dot{q}^j+\frac{1}{2}\Gamma_{kj,l}\Gamma^l_{mn}\dot{q}^k\dot{q}^j\dot{q}^m\dot{q}^n
\end{aligned} \tag{6.2.24}$$

再利用式（6.2.3），最后得

$$S=\frac{1}{2}g_{ij}\frac{\mathrm{D}\dot{q}^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{D}\dot{q}^j}{\mathrm{d}t} \tag{6.2.25}$$

式（6.2.23）是系统动能的张量表示式，而式（6.2.24）和（6.

2.25）是加速度能的张量表示式。

2. 非定常情形

系统的动能T可用系统的矢径，即$3N$维欧氏空间中的$\boldsymbol{r}$表示成

$$T=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$$

设系统的位形由n个广义坐标q^1，…，q^n确定，则由非定常情形系统速度的表达式（6.2.5）知

$$T=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{1}{2}\left(g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j+2\dot{q}^i\boldsymbol{g}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}\right)\quad(6.2.26)$$

利用式（6.2.8）和（6.2.9），上式可写成

$$T=\frac{1}{2}(g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j+2a_i\dot{q}^i+A)\quad(6.2.27)$$

上式即是非定常系统的动能表达式。

系统的加速度能为

$$S=\frac{1}{2}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}$$

将非定常情形下系统加速度的表达式（6.2.18）代入上式，得

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}\\&=\frac{1}{2}(\ddot{q}^i+\Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k+2\Gamma^i_j\dot{q}^j+\Gamma^i)\boldsymbol{g}_i\cdot(\ddot{q}^l+\Gamma^l_{mp}\dot{q}^m\dot{q}^p\\&\qquad+2\Gamma^l_m\dot{q}^m+\Gamma^l)\boldsymbol{g}_l\\&=\frac{1}{2}g_{il}(\ddot{q}^i\ddot{q}^l+2\Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k\ddot{q}^l+4\Gamma^i_j\dot{q}^j\ddot{q}^l+2\Gamma^i\ddot{q}^l+S')\end{aligned}$$

(6.2.28)

其中S'为不含$\ddot{q}^i$的项。

§6.3 定常系统的运动方程

设系统由N个质点组成，第i个质点M_i的质量为m_i，直角

坐标为(x_i^1, x_i^2, x_i^3)。取[4]

$$y^{3i-2}=\frac{x_i^1}{\sqrt{m_i}},\quad y^{3i-1}=\frac{x_i^2}{\sqrt{m_i}},\quad y^{3i}=\frac{x_i^3}{\sqrt{m_i}}$$

$$(i=1,\cdots,N) \tag{6.3.1}$$

则 3 N 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^{3N}$ 中的一个矢径 $\boldsymbol{r}$（点）代表系统的某一位形。设$(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{3N})$是 $\boldsymbol{R}^{3N}$ 的标准正交基，则矢径 $\boldsymbol{r}$ 可表示成

$$\boldsymbol{r}=y^j\boldsymbol{e}_j \tag{6.3.2}$$

设系统的位形由 n 个广义坐标 q^1，…，q^n 确定，即矢径 $\boldsymbol{r}$ 可表示成如下形式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q^j) \tag{6.3.3}$$

取[1,2]

$$\boldsymbol{g}_j=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q^j} \tag{6.3.4}$$

则度量张量❶

$$g_{ij}=\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q^j}$$

$$=\frac{\partial y^k}{\partial q^i}\frac{\partial y^k}{\partial q^j} \tag{6.3.5}$$

取

$$ds^2=d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=dy^j dy^j \tag{6.3.6}$$

ds^2 称为系统的度量[1]。显然

$$ds^2=dy^j dy^j=\frac{\partial y^j}{\partial q^i}\frac{\partial y^j}{\partial q^k}dq^i dq^k$$

---

❶ 对于任一函数 $f=f(q^j)$，因为

$$\frac{\partial f}{\partial q^{j'}}=\frac{\partial q^j}{\partial q^{j'}}\frac{\partial f}{\partial q^j}$$

$$\frac{\partial f}{\partial q^{j'}}\frac{\partial f}{\partial q^{i'}}=\frac{\partial q^j}{\partial q^{j'}}\frac{\partial q^i}{\partial q^{i'}}\frac{\partial f}{\partial q^j}\frac{\partial f}{\partial q^i}$$

所以 $\frac{\partial f}{\partial q^j}$、$\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial q^j}$ 是张量分量。

$$= g_{ik}\mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^k = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^k}\mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^k \tag{6.3.7}$$

6.3.1 Schouten-Vranceanu 方程

1. 完整情形

记

$$v^r = \frac{\mathrm{d}q^r}{\mathrm{d}t},\quad f^r = \frac{\mathrm{D}v^r}{\mathrm{d}t} = \ddot{q}^r + \Gamma^r_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j \tag{6.3.8}$$

$$f_r = \frac{\mathrm{D}v_r}{\mathrm{d}t} = g_{rs}\frac{\mathrm{D}v^s}{\mathrm{d}t} = g_{rs}f^s \tag{6.3.9}$$

式中 r、$s=1, \cdots, n$，则系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m_i\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_i \tag{6.3.10}$$

其中 $\boldsymbol{r}_i$ 为第 i 个质点 M_i 在 3 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中的矢径，它确定 M_i 的位置。取变换（6.3.1），则

$$T = \frac{1}{2}\dot{y}^j\dot{y}^j = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \tag{6.3.11}$$

因 $\dot{y}^j = \frac{\partial y^j}{\partial q^r}\dot{q}^r$，故

$$T = \frac{1}{2}\frac{\partial y^j}{\partial q^r}\frac{\partial y^j}{\partial q^s}\dot{q}^r\dot{q}^s = \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^r}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^s}\dot{q}^r\dot{q}^s$$

$$= \frac{1}{2}g_{rs}\dot{q}^r\dot{q}^s \tag{6.3.12}$$

比较式（6.3.12）与（6.3.7），知

$$\mathrm{d}s^2 = 2T\mathrm{d}t^2 \tag{6.3.13}$$

命题 1 在前述记号下，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = f_i \tag{6.3.14}$$

〔证明〕 由式（6.3.12），有

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = g_{ij}\dot{q}^j$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^k\dot{q}^j + g_{ij}\ddot{q}^j \tag{6.3.15}$$

而
$$\frac{\partial T}{\partial q^i} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{rs}}{\partial q^i}\dot{q}^r\dot{q}^s$$

故
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^k\dot{q}^j + g_{ij}\ddot{q}^j - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{rs}}{\partial q^i}\dot{q}^r\dot{q}^s$$

$$= g_{ij}\ddot{q}^j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}\right)\dot{q}^k\dot{q}^j$$

$$= g_{ij}\ddot{q}^j + \Gamma_{kj,i}\dot{q}^k\dot{q}^j \tag{6.3.16}$$

因 $\Gamma_{kj,i} = g_{il}\Gamma^l_{kj}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = g_{il}(\ddot{q}^l + \Gamma^l_{kj}\dot{q}^k\dot{q}^j)$$

$$= g_{il}f^l = f_i \tag{6.3.17}$$ ‖

由命题 1，我们可以得到完整系统的与 Lagrange 方程等价的运动方程——Schouten-Vranceanu 方程[4]

$$f^i = Q^i,\quad Q^i = g^{ij}Q_j \tag{6.3.18}$$

式中 Q^i、Q_j 分别是广义力的逆变与协变分量。

例 1 极坐标系中单位质点运动的加速度。记 $v_\rho = \dot{\rho}$ 为径向速度，$v_\theta = \rho\dot{\theta}$ 为横向速度；a_ρ 为径向加速度，a_θ 为横向加速度，则

$$a_\rho \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_\rho,\quad a_\theta \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_\theta \tag{a}$$

质点动能

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) \tag{b}$$

取广义坐标

$$q^1 = \rho,\quad q^2 = \theta \tag{c}$$

则 $$T=\frac{1}{2}[(\dot{q}^1)^2+(q^1)^2(\dot{q}^2)^2]$$

比较上式与式（6.3.12），得

$$g_{11}=1,\quad g_{12}=g_{21}=0,\quad g_{22}=(q^1)^2 \tag{d}$$

写成矩阵形式即为

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (q^1)^2\end{pmatrix} \tag{e}$$

(g_{ij})的逆矩阵，可由 $g_{ik}g^{kj}=\delta_i^j$ 求出，为

$$(g^{ik})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (q^1)^{-2}\end{pmatrix} \tag{f}$$

由式（6.1.30）可得

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma_{11,1}=\Gamma_{11,2}=\Gamma_{12,1}=\Gamma_{22,2}=\Gamma_{21,1}=0\\&\Gamma_{22,1}=-q^1,\quad \Gamma_{12,2}=\Gamma_{21,2}=q^1\end{aligned}\right\} \tag{g}$$

将式（g）、（f）代入式（6.1.32）中，有

$$\Gamma_{11}^1=\Gamma_{11}^2=\Gamma_{21}^1=\Gamma_{12}^1=\Gamma_{22}^2=0$$

$$\Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2=\frac{1}{q^1},\qquad \Gamma_{22}^1=-q^1$$

于是

$$f^1=\frac{\mathrm{D}v^1}{\mathrm{d}t}=\ddot{q}^1+\Gamma_{jk}^1v^jv^k=\ddot{q}^1-q^1(\dot{q}^2)^2$$

$$f^2=\frac{\mathrm{D}v^2}{\mathrm{d}t}=\ddot{q}^2+\Gamma_{jk}^2v^jv^k=\ddot{q}^2-\frac{2}{q^1}\dot{q}^1\dot{q}^2$$

将式（c）代入，得

$$a_\rho=f^1=\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2,\quad a_\theta=\rho f^2=\rho\ddot{\theta}+2\dot{\rho}\dot{\theta} \tag{h}$$

上式与用别的方法得到的结果一致。 ‖

2. 非完整情形

设系统受有 g 个一阶线性非完整约束

$$\varphi_{(\alpha)i}\mathrm{d}q^i=0,\qquad (\alpha=\varepsilon+1,\cdots,n;\ \varepsilon=n-g) \tag{6.3.19}$$

记

$$\varphi_{(\alpha)}^i=\delta_\beta^i\varphi_{(\alpha)\beta} \tag{6.3.20}$$

设 $l_{(a)i}$ 是齐次方程组

$$\varphi^i_{(a)}x_i=0 \tag{6.3.21}$$

的 $n-g$ 个线性无关的解，即是基础解系；$(l^i_{(b)})$是满足如下条件的矩阵

$$l^i_{(a)}l_{(a)j}=\delta^i_j=\begin{cases}1, & i=j,\\0, & i\neq j\end{cases} \tag{6.3.22}$$

$$l^i_{(b)}l_{(a)i}=\delta^b_a=\begin{cases}1, & a=b\\0, & a\neq b\end{cases} \tag{6.3.23}$$

引进记号

$$A^i_a=l^i_{(a)},\quad B^i_a=l_{(a)i} \tag{6.3.24}$$

设函数 $l^i_{(\alpha)}$ 为满足下式的函数

$$l^i_{(\alpha)}\,\mathrm{d}q^i=0 \tag{6.3.25}$$

$(l_{(\beta)i})$为满足下述条件的矩阵

$$l^i_{(\alpha)}l_{(\beta)i}=\delta^\beta_\alpha=\begin{cases}1, & \alpha=\beta\\0, & \alpha\neq\beta\end{cases} \tag{6.3.26}$$

一阶线性非完整系统带乘子的 Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial T}{\partial q^i}=Q_i+R_i \tag{6.3.27}$$

其中 Q_i 为广义力，R_i 为理想约束反力，且

$$R_i=\lambda_a\varphi_{(a)i} \tag{6.3.28}$$

式中 λ_a 为Lagrange 乘子。由式(6.3.28)、(6.3.25)和(6.3.19)知，存在 $u_{(\alpha)}$，使得

$$R^i=g^{ij}R_j=u_{(\alpha)}l^i_{(\alpha)} \tag{6.3.29}$$

由命题 1，得

$$\frac{\mathrm{D}v^i}{\mathrm{d}t}=R^i+Q^i \tag{6.3.30}$$

其中 $$Q=g^{ij}Q_j$$

将式（6.3.30）乘以 B^a_i 且对 i 求和，有

$$B^a_i\frac{\mathrm{D}v^i}{\mathrm{d}t}=B^a_iR^i+B^a_iQ^i \tag{6.3.31}$$

注意到式（6.3.29）、（6.3.24）和（6.3.19），得

$$B^a_i R^i = 0 \tag{6.3.32}$$

$$\begin{aligned} B^a_i \frac{\mathrm{D}v^i}{\mathrm{d}t} &= B^a_i\left(\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{ks} v^k v^s\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B^a_i v^i) + \Gamma^i_{ks} v^k v^s B^a_i - v^i \frac{\mathrm{d}B^a_i}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}v^a}{\mathrm{d}t} + B^a_i A^k_b A^s_c \Gamma^i_{ks} v^b v^c - \frac{\partial B^a_i}{\partial q^k} A^i_c A^k_b v^b v^c \\ &= \frac{\mathrm{d}v^a}{\mathrm{d}t} + \Gamma^a_{bc} v^b v^c \end{aligned} \tag{6.3.33}$$

其中

$$\Gamma^a_{bc} = B^a_i A^k_b A^s_c \Gamma^i_{ks} - \frac{\partial B^a_i}{\partial q^k} A^i_c A^k_b \tag{6.3.34}$$

$$v^a = \frac{\mathrm{d}q^a}{\mathrm{d}t} = B^a_i v^i = B^a_i \frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} \tag{6.3.35}$$

$$v^i = A^i_a v^a \tag{6.3.36}$$

关系（6.3.36）说明，所有的广义速度 v^i 可以用独立的广义速度 v^a 表出。

将式（6.3.32）～(6.3.36）代入式(6.4.31)，由 $B^a_i Q^i = Q^a$，得

$$\frac{\mathrm{d}v^a}{\mathrm{d}t} + \Gamma^a_{bc} v^b v^c = Q^a \quad 或 \quad \frac{\mathrm{D}v^a}{\mathrm{d}t} = Q^a \tag{6.3.37}$$

方程（6.3.37）称为一阶线性非完整力学系统的广义 Schouten-Vranceanu 方程。

6.3.2 Boltzmann-Hamel 方程

1. 完整情形

Boltzmann-Hamel 方程在分析力学中占有十分重要的地位，它是由 Boltzmann 在 1902 年建立，而后由 Hamel 加以推广的。

设指标 σ、ρ、τ、$\varkappa$、ν 以及 i、j、k、…都是由 1 到 n。取准速度[3,4] ω^σ 为

$$\omega^\sigma = \varphi^\sigma_i v^i \tag{6.3.38}$$

其中系数 φ^σ_i 仅是广义坐标 q 的函数，满足

$$\det(\varphi^\sigma_i) \neq 0 \tag{6.3.39}$$

引入记号

$$\dot{\pi}^\sigma = \omega^\sigma \tag{6.3.40}$$

π^σ 就是准坐标，一般说来作为坐标的函数它是不存在的，而只是一种记号；$\dot{\pi}^\sigma$ 也并不是 π^σ 对时间的导数，而只是在整体上作为一种记号[3,8]。

根据式（6.3.40）可以把式（6.3.38）写成

$$d\pi^\sigma = \varphi^\sigma_i dq^i \tag{6.3.41}$$

量 $d\pi^\sigma$ 称为准坐标的微分。式（6.3.39）的成立允许由式（6.3.38）解出 v^i，得用 ω^σ 表示 v^i 的关系式

$$v^i = \tilde{\varphi}^i_\sigma \omega^\sigma \tag{6.3.42}$$

其中 $\tilde{\varphi}^i_\sigma$ 仅是 q^i 的函数，$(\tilde{\varphi}^i_\sigma)$ 是 (φ^σ_i) 的逆矩阵，即

$$\varphi^\sigma_i \tilde{\varphi}^i_\rho = \delta^\sigma_\rho, \quad \varphi^\sigma_i \tilde{\varphi}^j_\sigma = \delta^j_i \tag{6.3.43}$$

式（6.3.42）亦可写成

$$dq^i = \tilde{\varphi}^i_\sigma d\pi^\sigma \tag{6.3.44}$$

则可定义广义坐标对准坐标的导数为[3,8]

$$\frac{\partial q^i}{\partial \pi^\sigma} = \tilde{\varphi}^i_\sigma \tag{6.3.45}$$

显然，如果系数 φ^σ_i 满足

$$\frac{\partial \varphi^\sigma_k}{\partial q^r} = \frac{\partial \varphi^\sigma_r}{\partial q^k}, \quad (\sigma, r, k = 1, \cdots, n) \tag{6.3.46}$$

那么式（6.3.38）的选取，是使系统的描述由一组广义坐标变为另一组广义坐标。此时，准坐标 π^σ 实际上是系统的一组广义坐标，式（6.3.44）和下面的式（6.3.47）都是自然的结果。

定义微分算子如下

$$\frac{\partial}{\partial \pi^{\sigma}} = \tilde{\varphi}^{i}_{\sigma} \frac{\partial}{\partial q^{i}}, \qquad \frac{\partial}{\partial q^{i}} = \varphi^{\sigma}_{i} \frac{\partial}{\partial \pi^{\sigma}} \tag{6.3.47}$$

当广义坐标的选取由 q^i 改变为 $\bar{q}^i$ 时，设

$$\mathrm{d}\pi^{\sigma} = \bar{\varphi}^{\sigma}_{k} \mathrm{d}\bar{q}^{k} \tag{6.3.48}$$

则由

$$\mathrm{d}\bar{q}^{k} = \frac{\partial \bar{q}^{k}}{\partial q^{i}} \mathrm{d}q^{i}, \quad \mathrm{d}q^{i} = \frac{\partial q^{i}}{\partial \bar{q}^{k}} \mathrm{d}\bar{q}^{k}$$

可得到

$$\bar{\varphi}^{\sigma}_{k} = \varphi^{\sigma}_{i} \frac{\partial q^{i}}{\partial \bar{q}^{k}} \tag{6.3.49}$$

设另取一组准坐标 $\bar{\pi}^{\rho}$，且

$$\mathrm{d}\pi^{\sigma} = \psi^{\sigma}_{\rho} \mathrm{d}\bar{\pi}^{\rho}, \text{ 即 } \quad \mathrm{d}\bar{\pi}^{\rho} = \bar{\psi}^{\rho}_{\sigma} \mathrm{d}\pi^{\sigma} \tag{6.3.50}$$

式中(ψ^{σ}_{ρ})和 $(\bar{\psi}^{\rho}_{\sigma})$互为逆矩阵，即

$$\bar{\psi}^{\rho}_{\sigma} \psi^{\sigma}_{\tau} = \delta^{\rho}_{\tau}, \quad \bar{\psi}^{\rho}_{\sigma} \psi^{\tau}_{\rho} = \delta^{\tau}_{\sigma} \tag{6.3.51}$$

又设

$$\mathrm{d}\bar{\pi}^{\rho} = \bar{\varphi}^{\rho}_{i} \mathrm{d}q^{i} \tag{6.3.52}$$

由式（6.3.50），还有

$$\mathrm{d}\bar{\pi}^{\rho} = \bar{\psi}^{\rho}_{\sigma} \varphi^{\sigma}_{i} \mathrm{d}q^{i} \tag{6.3.53}$$

比较以上两式，得

$$\varphi^{\rho}_{i} = \bar{\psi}^{\rho}_{\sigma} \varphi^{\sigma}_{i} \tag{6.3.54}$$

如果记

$$\bar{\psi}^{\rho}_{\sigma} = \frac{\partial \bar{\pi}^{\rho}}{\partial \pi^{\sigma}} \tag{6.3.55}$$

则

$$\bar{\varphi}^{\rho}_{i} = \varphi^{\sigma}_{i} \frac{\partial \bar{\pi}^{\rho}}{\partial \pi^{\sigma}} \tag{6.3.56}$$

式（6.3.49）和（6.3.46）实际上给出了坐标（广义坐标或准坐标）变换下 φ^{σ}_{i} 的变化。

利用式（6.3.45）和（6.3.7）知，$\mathrm{d}s^2$ 可以表示成

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}q^{i}\mathrm{d}q^{j} = \tilde{g}_{\sigma\rho}\mathrm{d}\pi^{\sigma}\mathrm{d}\pi^{\rho} \tag{6.3.57}$$

其中

$$\tilde{g}_{\sigma\rho}=\tilde{\varphi}^{i}_{\sigma}\tilde{\varphi}^{j}_{\rho}g_{ij} \tag{6.3.58}$$

称为关于准坐标 π^{σ} 的度量张量，其逆变分量为

$$\tilde{g}^{\sigma\rho}=\varphi^{\sigma}_{i}\varphi^{\rho}_{j}g^{ij},\quad \tilde{g}^{\sigma\rho}\tilde{g}_{\sigma\tau}=\delta^{\rho}_{\tau} \tag{6.3.59}$$

记

$$A_i=g_{ik}A^k,\quad \tilde{A}_{\rho}=\tilde{\varphi}^{i}_{\rho}A_i,\quad \tilde{A}^{\rho}=\varphi^{\rho}_{i}A^i \tag{6.3.60}$$

则
$$\tilde{A}_{\rho}=\tilde{\varphi}^{i}_{\rho}A_i=\tilde{\varphi}^{i}_{\rho}g_{ik}A^k$$

$$=\tilde{\varphi}^{i}_{\rho}g_{ik}\tilde{\varphi}^{k}_{\sigma}\tilde{A}^{\sigma}=\tilde{g}_{\sigma\rho}\tilde{A}^{\sigma} \tag{6.3.61}$$

命题 2

$$\tilde{f}^{\sigma}=\varphi^{\sigma}_{i}f^{i} \tag{6.3.62}$$

其中

$$f^i=\frac{\mathrm{D}v^i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t}+\Gamma^{i}_{jk}v^jv^k \tag{6.3.63}$$

$$\tilde{f}^{\sigma}=\frac{\mathrm{d}\omega^{\sigma}}{\mathrm{d}t}+\Lambda^{\sigma}_{\rho\tau}\omega^{\rho}\omega^{\tau} \tag{6.3.64}$$

$$\Lambda^{\sigma}_{\rho\tau}=\tilde{\Gamma}^{\sigma}_{\tau\rho}+\tilde{g}^{\sigma\chi}\tilde{g}_{\nu\tau}\gamma^{\nu}_{\chi\rho} \tag{6.3.65}$$

$$\gamma^{\nu}_{\chi\rho}=\varphi^{i}_{\chi}\varphi^{p}_{\nu}\left(\frac{\partial\varphi^{\rho}_{i}}{\partial q^{p}}-\frac{\partial\varphi^{\rho}_{p}}{\partial q^{i}}\right) \tag{6.3.66}$$

$$\Gamma^{\sigma}_{\tau\rho}=\tilde{g}^{\chi\sigma}\tilde{\Gamma}_{\tau\rho,\chi} \tag{6.3.67}$$

$$\Gamma_{\tau\rho,\chi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{g}_{\chi\tau}}{\partial\pi^{\rho}}+\frac{\partial\tilde{g}_{\rho\chi}}{\partial\pi^{\tau}}-\frac{\partial\tilde{g}_{\tau\rho}}{\partial\pi^{\chi}}\right) \tag{6.3.68}$$

〔证明〕 因为 $v^i=\tilde{\varphi}^{i}_{\sigma}\omega^{\sigma}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v^i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{\varphi}^{i}_{\sigma}\omega^{\sigma})=\frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}^{i}_{\sigma}}{\mathrm{d}t}\omega^{\sigma}+\tilde{\varphi}^{i}_{\sigma}\frac{\mathrm{d}\omega^{\sigma}}{\mathrm{d}t} \tag{6.3.69}$$

假设 $\tilde{\varphi}^{i}_{\sigma}$ 仅是 q 的函数，则

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}^{i}_{\sigma}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\tilde{\varphi}^{i}_{\sigma}}{\partial q^k}\dot{q}^k=\frac{\partial\tilde{\varphi}^{i}_{\sigma}}{\partial q^k}\tilde{\varphi}^{k}_{\rho}\omega^{\rho} \tag{6.3.70}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t}=\tilde{\varphi}^{i}_{\sigma}\frac{\mathrm{d}\omega^{\sigma}}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\tilde{\varphi}^{i}_{\sigma}}{\partial q^k}\tilde{\varphi}^{k}_{\rho}\omega^{\rho}\omega^{\sigma} \tag{6.3.71}$$

从而

$$\varphi^\sigma_i f^i = \varphi^\sigma_i\left(\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{sk} v^s v^k\right)$$

$$= \varphi^\sigma_i\left(\tilde{\varphi}^i_\rho \frac{\mathrm{d}\omega^\rho}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \tilde{\varphi}^i_\rho}{\partial q^k}\tilde{\varphi}^k_\tau \omega^\tau \omega^\rho\right) + \varphi^\sigma_i \tilde{\varphi}^k_\tau \tilde{\varphi}^s_\rho \Gamma^i_{ks}\omega^\tau\omega^\rho$$

$$= \frac{\mathrm{d}\omega^\sigma}{\mathrm{d}t} + \left[\Gamma^i_{ks}\varphi^\sigma_i \tilde{\varphi}^k_\tau \tilde{\varphi}^s_\rho + \varphi^\sigma_i \tilde{\varphi}^k_\tau \frac{\partial \tilde{\varphi}^i_\rho}{\partial q^k}\right]\omega^\tau\omega^\rho \qquad (6.3.72)$$

由 $\varphi^\sigma_i \tilde{\varphi}^i_\rho = \delta^\sigma_\rho$，可得

$$\varphi^\sigma_i \frac{\partial \tilde{\varphi}^i_\rho}{\partial q^k} = -\tilde{\varphi}^i_\rho \frac{\partial \varphi^\sigma_i}{\partial q^k} \qquad (6.3.73)$$

比较式（6.3.72）和（6.3.64）两式，并利用上式，有

$$\Lambda^\sigma_{\rho\tau} = \Gamma^i_{sk}\varphi^\sigma_i \tilde{\varphi}^k_\tau \tilde{\varphi}^s_\rho - \tilde{\varphi}^k_\tau \tilde{\varphi}^i_\rho \frac{\partial \varphi^\sigma_i}{\partial q^k} \qquad (6.3.74)$$

由式（6.3.58）知，$g_{ij} = \varphi^\sigma_i \varphi^\rho_j \tilde{g}_{\sigma\rho}$，故

$$\Gamma^i_{sk} = \frac{1}{2} g^{ip}\varphi^\chi_p \varphi^\tau_k \varphi^\rho_s\left(\frac{\partial \tilde{g}_{\chi\tau}}{\partial \pi^\rho} + \frac{\partial \tilde{g}_{\rho\chi}}{\partial \pi^\tau} - \frac{\partial \tilde{g}_{\tau\rho}}{\partial \pi^\chi}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} g^{ip}\left[\frac{\partial(\varphi^\chi_p \varphi^\tau_k)}{\partial q^s}\tilde{g}_{\chi\tau} + \frac{\partial(\varphi^\rho_s \varphi^\chi_p)}{\partial q^k}\tilde{g}_{\rho\chi}\right.$$

$$\left. - \frac{\partial(\varphi^\tau_k \varphi^\rho_s)}{\partial q^p}\tilde{g}_{\tau\rho}\right] \qquad (6.3.75)$$

上式前一项经化简后为 $\tilde{\varphi}^i_\sigma \varphi^\tau_k \varphi^\rho_s \Gamma^\sigma_{\tau\rho}$，而后一项为[4]

$$\frac{1}{2} g^{ip}\tilde{g}_{\rho\tau}\left[\varphi^\tau_k\left(\frac{\partial \varphi^\rho_p}{\partial q^s} - \frac{\partial \varphi^\rho_s}{\partial q^p}\right) + \varphi^\rho_s\left(\frac{\partial \varphi^\tau_p}{\partial q^k} - \frac{\partial \varphi^\tau_k}{\partial q^p}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\varphi^\rho_p \frac{\partial \varphi^\tau_k}{\partial q^s} + \varphi^\tau_p \frac{\partial \varphi^\rho_s}{\partial q^k}\right)\right]$$

$$= \tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\sigma\chi}\tilde{\varphi}^i_\sigma \varphi^\tau_k \varphi^\nu_s \gamma^\rho_{\chi\nu} + \frac{1}{2} g^{ip}\tilde{g}_{\rho\tau}\left(\varphi^\rho_p \frac{\partial \varphi^\tau_k}{\partial q^s} + \varphi^\tau_p \frac{\partial \varphi^\rho_s}{\partial q^k}\right)$$

(6.3.76)

其中

$$\gamma^{\rho}_{\chi\nu}=\tilde{\varphi}^{p}_{\chi}\tilde{\varphi}^{l}_{\nu}\left(\frac{\partial\varphi^{\rho}_{p}}{\partial q^{l}}-\frac{\partial\varphi^{\rho}_{l}}{\partial q^{p}}\right) \tag{6.3.77}$$

显然，如果准坐标的选取满足关系式(6.3.46)，则 $\gamma^{\rho}_{\chi\nu}=0$。一般说来，式（6.3.46）并不满足。

式（6.3.76）右边后一项可如下化简

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\tilde{\varphi}^{s}_{\chi}\tilde{\varphi}^{k}_{\sigma}\tilde{g}^{\chi\sigma}\left(\tilde{g}_{\rho\tau}\varphi^{\rho}_{p}\frac{\partial\varphi^{\tau}_{k}}{\partial q^{s}}+\tilde{g}_{\rho\tau}\varphi^{\tau}_{p}\frac{\partial\varphi^{\rho}_{s}}{\partial q^{k}}\right)\\
&=\frac{1}{2}\tilde{\varphi}^{s}_{\chi}\tilde{\varphi}^{k}_{\sigma}\tilde{g}^{\chi\sigma}\left(\tilde{g}_{\rho\tau}\varphi^{\tau}_{p}\frac{\partial\varphi^{\rho}_{k}}{\partial q^{s}}+\tilde{g}_{\rho\tau}\varphi^{\tau}_{p}\frac{\partial\varphi^{\rho}_{s}}{\partial q^{k}}\right)\\
&=\frac{1}{2}\tilde{\varphi}^{k}_{\sigma}\tilde{g}^{\tau\sigma}\tilde{g}_{\rho\tau}\left(\frac{\partial\varphi^{\rho}_{k}}{\partial q^{s}}+\frac{\partial\varphi^{\rho}_{s}}{\partial q^{k}}\right)\\
&=\frac{1}{2}\tilde{\varphi}^{k}_{\rho}\left(\frac{\partial\varphi^{\rho}_{k}}{\partial q^{s}}+\frac{\partial\varphi^{\rho}_{s}}{\partial q^{k}}\right)
\end{aligned} \tag{6.3.78}$$

将式（6.3.75）～（6.3.78）代入式（6.3.74）中，得

$$\Lambda^{\sigma}_{\rho\tau}=\Gamma^{\sigma}_{\rho\tau}+\tilde{g}^{\sigma\chi}\tilde{g}_{\nu\tau}\gamma^{\nu}_{\chi\rho}$$ ‖

命题得证。

张量形式的 Boltzmann-Hamel 方程可以通过以下两种方法得到。

（1）直接推导。由文献〔3〕，有❶

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^{i}}-\frac{\partial T}{\partial q^{i}}=\varphi^{\sigma}_{i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^{*}}{\partial\omega^{\sigma}}-\frac{\partial T^{*}}{\partial\pi^{\sigma}}+\frac{\partial T^{*}}{\partial\omega^{\nu}}\omega^{\tau}\gamma^{\nu}_{\sigma\tau}\right) \tag{6.3.79}$$

其中

$$\begin{aligned}
T^{*}(q^{i},\omega^{\sigma})&=T(q^{i},\dot{q}^{i}(q^{j},\omega^{\sigma}))\\
&=\frac{1}{2}\tilde{g}_{\sigma\tau}\omega^{\sigma}\omega^{\tau}
\end{aligned} \tag{6.3.80}$$

由式（6.3.79）和方程

❶ 式（6.3.79）可以由式（6.3.80）和（6.3.47）直接推出。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial T}{\partial q^i}=Q_i \tag{6.3.81}$$

进一步可得❶[3,7,4]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \omega^\nu}-\frac{\partial T^*}{\partial \pi^\nu}+\frac{\partial T^*}{\partial \omega^\sigma}\omega^\tau\gamma^\sigma_{\nu\tau}=\Pi_\nu \tag{6.3.82}$$

式中 $\Pi_\nu=\tilde{\varphi}^i_\nu Q_i$

为相应于准坐标 π^ν 的广义力的协变分量。

将式（6.3.80）代入式（6.3.81），有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \omega^\nu}-\frac{\partial T^*}{\partial \pi^\nu}+\frac{\partial T^*}{\partial \omega^\sigma}\omega^\tau\gamma^\sigma_{\nu\tau}=\tilde{g}_{\sigma\nu}\dot{\omega}^\sigma+\frac{\partial \tilde{g}_{\sigma\nu}}{\partial \pi^\rho}\omega^\rho\omega^\sigma$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{g}_{\sigma\rho}}{\partial \pi^\nu}\omega^\rho\omega^\sigma+\tilde{g}_{\sigma\rho}\omega^\rho\omega^\tau\gamma^\sigma_{\nu\tau}$$

$$=g_{\sigma\nu}\dot{\omega}^\sigma+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{g}_{\sigma\nu}}{\partial \pi^\rho}+\frac{\partial \tilde{g}_{\rho\nu}}{\partial \pi^\sigma}-\frac{\partial \tilde{g}_{\sigma\rho}}{\partial \pi^\nu}\right)\omega^\rho\omega^\sigma+\tilde{g}_{\sigma\rho}\omega^\rho\omega^\tau\gamma^\sigma_{\nu\tau}$$

由式（6.3.9）和上式，有

$$g_{\sigma\nu}\dot{\omega}^\sigma+(\Gamma_{\sigma\rho,\nu}+\tilde{g}_{\tau\rho}\gamma^\tau_{\nu\sigma})\omega^\rho\omega^\sigma=\Pi_\nu \tag{6.3.83}$$

即

$$\tilde{f}^\kappa=\dot{\omega}^\kappa+(\Gamma^\kappa_{\sigma\rho}+\tilde{g}_{\tau\rho}\tilde{g}^{\nu\kappa}\gamma^\tau_{\nu\sigma})\omega^\rho\omega^\sigma=\Pi^\kappa \tag{6.3.84}$$

式中 $\Pi^\kappa=\tilde{g}^{\kappa\nu}\Pi_\nu$

为相应于准坐标 π^ν 的广义力的逆变分量。

方程（6.3.82）、（6.3.83）和（6.3.84）统称为完整系统的Boltzmann-Hamel 方程，式(6.3.82)是其动能型，式(6.3.83)和（6.3.84）是其张量型。

（2）利用命题2。由式（6.3.61）和（6.3.16）有

$$\tilde{f}^\sigma=\varphi^\sigma_i f^i=\varphi^\sigma_i Q^i=\varphi^\sigma_i g^{ij}Q_j \tag{6.3.85}$$

利用式（6.3.59），上式可写成

$$\tilde{f}^\sigma=\varphi^\sigma_i\tilde{\varphi}^i_\nu\tilde{\varphi}^j_\rho\tilde{g}^{\sigma\rho}Q_j=\tilde{g}^{\sigma\rho}\Pi_\rho=\Pi^\sigma \tag{6.3.86}$$

---

❶ 利用$\varphi^\sigma_i\tilde{\varphi}^i_\nu=\delta^\sigma_\nu$即可得出。

由式（6.3.86）和（6.3.83），可得下述命题。

命题 3 $\tilde{f}^{\kappa}=\tilde{g}^{\kappa\sigma}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial\omega^{\sigma}}-\frac{\partial T^*}{\partial\pi^{\sigma}}+\frac{\partial T^*}{\partial\omega^{\nu}}\omega^{\tau}\gamma^{\nu}_{\sigma\tau}\right)$

$$(6.3.87)$$

2. 非完整情形

设系统受有 g 个理想线性非完整约束

$$\varphi^{(\alpha)}_i\mathrm{d}q^i=0,\qquad(\alpha=\epsilon+1,\cdots,n;\ \epsilon=n-g)\quad(6.3.88)$$

则系统的运动方程为[3]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^i}-\frac{\partial T}{\partial q^i}=Q_i+R_i\qquad(6.3.89)$$

利用式（6.3.78），由上式和 $\varphi^{\sigma}_i\tilde{\varphi}^i_{\nu}=\delta^{\sigma}_{\nu}$，系统的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial\omega^{\nu}}-\frac{\partial T^*}{\partial\pi^{\nu}}+\frac{\partial T^*}{\partial\omega^{\sigma}}\omega^{\tau}\gamma^{\sigma}_{\nu\tau}=\Pi_{\nu}+\tilde{R}_{\nu}\qquad(6.3.90)$$

式中 $\tilde{R}_{\nu}=\tilde{\varphi}^i_{\nu}R_i,\quad R_i=\lambda_{(\alpha)}\varphi^{(\alpha)}_i$

R_i 为相应于 q^i 的广义约束反力；$\tilde{R}_{\nu}$ 为相应于准坐标 π^{ν} 的广义约束反力。显然，它们满足

$$R_i\mathrm{d}q^i=\tilde{R}_{\nu}\mathrm{d}\pi^{\nu}=0\qquad(6.3.91)$$

假设准速度如下选取

$$\dot{\pi}^a=\varphi^a_i\dot{q}^i,\quad\dot{\pi}^{\alpha}=\varphi^{(\alpha)}_i\dot{q}^i,\qquad(a=1,\cdots,\epsilon=n-g)$$

$$(6.3.92)$$

且

$$\Delta=\begin{vmatrix}\varphi^1_1&\varphi^1_2&\cdots&\varphi^1_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\varphi^n_1&\cdots&\cdots&\varphi^n_n\end{vmatrix}\neq0$$

则式（6.3.91）变成

$$\tilde{R}_a\mathrm{d}\pi^a=0\qquad(6.3.93)$$

根据 $\mathrm{d}\pi^a$ 的独立性，有 $\tilde{R}_a=0$。方程（6.3.90）成为[4]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial\omega^a}-\frac{\partial T^*}{\partial\pi^a}+\frac{\partial T^*}{\partial\omega^{\sigma}}\omega^b\gamma^{\sigma}_{ab}=\Pi_a\qquad(6.3.94)$$

利用命题 3 即有

$$f^a=\frac{\mathrm{d}\omega^a}{\mathrm{d}t}+\Lambda^a_{cb}\omega^c\omega^b=\Pi^a+\tilde{R}^a$$

$$\tilde{R}^a=\tilde{g}^{a\alpha}\tilde{R}_\alpha \tag{6.3.95}$$

及

$$\tilde{g}_{ac}\dot{\omega}^a+(\Gamma_{ab,c}+\tilde{g}_{\tau a}\gamma^\tau_{cb})\omega^a\omega^b=\Pi_c \tag{6.3.96}$$

式中 a、b、$c=1,\cdots,\epsilon$；$\alpha=\epsilon+1,\cdots,n$；$\tau=1,\cdots,n$。此外，还有 g 个方程

$$f^\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega^\alpha}{\mathrm{d}t}+\Lambda^\alpha_{cb}\omega^c\omega^b=\Pi^\alpha+\tilde{R}^\alpha$$

$$\tilde{R}^\alpha=\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{R}_\beta \tag{6.3.97}$$

由 $\omega^\alpha=0$，有

$$R^\alpha=\Lambda^\alpha_{cb}\omega^b\omega^c-\Pi^\alpha \tag{6.3.98}$$

根据上式可以求相应于 π^α 的约束反力 $\tilde{R}^\alpha$。方程(6.3.94)～(6.3.97)统称为一阶线性理想非完整系统的Boltzmann-Hamel方程，其中式（6.3.94)是其动能型的，式(6.3.95)～(6.3.97)是张量型的。

6.3.3 Appell 方程

1．完整情形

由式（6.2.24）知，系统的加速度能为[7]

$$S=\frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{1}{2}g_{il}\ddot{q}^i\ddot{q}^l+\Gamma_{kj,i}\ddot{q}^i\dot{q}^k\dot{q}^j$$

$$+\frac{1}{2}\Gamma_{kj,l}\Gamma^l_{mp}\dot{q}^k\dot{q}^j\dot{q}^m\dot{q}^p \tag{6.3.99}$$

由式（6.3.8）和（6.2.25）知，S 还可表示为

$$S=\frac{1}{2}g_{ij}f^if^j \tag{6.3.100}$$

命题 4　$$\frac{\partial S}{\partial\dot{v}^i}=Q_i \tag{6.3.101}$$

〔证明〕　$$\frac{\partial S}{\partial\dot{v}^i}=g_{il}\ddot{q}^l+\Gamma_{kj,i}\dot{q}^k\dot{q}^j$$

$$=g_{il}(\ddot{q}^l+\Gamma^l_{kj}\dot{q}^k\dot{q}^j)=g_{il}f^l=f_i$$

由命题 1 知，$f_i=Q_i$，故

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{v}^i}=Q_i \qquad \|$$

由命题 2 及式（6.3.100），知

$$S=\frac{1}{2}g_{ij}f^if^j=\frac{1}{2}g_{ij}\,\tilde{\varphi}^i_\sigma\bar{f}^\sigma\,\tilde{\varphi}^j_\nu\bar{f}^\nu$$

记为

$$\tilde{S}=\frac{1}{2}\tilde{g}_{\sigma\nu}\bar{f}^\sigma\bar{f}^\nu \qquad (6.3.102)$$

命题 5 $$\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\dot{\omega}^\sigma}=\Pi_\sigma \qquad (6.3.103)$$

〔证明〕 由式（6.3.84），有

$$\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\dot{\omega}^\sigma}=\tilde{g}_{\sigma\nu}\bar{f}^\nu$$

由 Boltzmann-Hamel 方程（6.3.86），有

$$\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\dot{\omega}^\sigma}=\tilde{g}_{\sigma\nu}\bar{f}^\nu=\tilde{g}_{\sigma\nu}\Pi^\nu=\Pi_\sigma \qquad \|$$

2. 非完整情形

设系统受有形如（6.3.19）的非完整约束，记

$$g_{ab}=A^i_aA^j_bg_{ij}$$

其中（A^i_a）由式（6.3.24）定义。记 $S^*(\dot{v}^a,v^b,q)$ 为由 $S(\dot{v}^i,v^j,q)$ 中消去 $\dot{v}^\alpha,v^\alpha$ 后得到的函数，则由式（6.3.33）知

$$S^*=\frac{1}{2}B^a_iB^b_jg_{ab}f^if^j$$

$$=g_{ab}\left(\frac{1}{2}\dot{v}^a\dot{v}^b+\Gamma^b_{cd}\dot{v}^av^cv^d\right)+S(v^c) \qquad (6.3.104)$$

式中 $S(v^c)$ 为不含 $\dot{v}^a$ 的项。

命题 6 $$\frac{\partial S^*}{\partial\dot{v}^a}=Q_a \qquad (6.3.105)$$

〔证明〕 由式（6.3.104），得

$$\frac{\partial S^*}{\partial \dot{v}^a}=g_{ab}(\dot{v}^b+\Gamma^b_{cd}v^cv^d)$$

由式（6.3.37）知，$\dot{v}^b+\Gamma^b_{cd}v^cv^d=Q^b$，故

$$\frac{\partial S^*}{\partial \dot{v}^a}=g_{ab}Q^b=Q_a$$ ‖

如果准速度如式（6.3.92）选取，则加速度能

$$\tilde{S}^*=\frac{1}{2}\tilde{g}_{\sigma\nu}\tilde{f}^\sigma\tilde{f}^\nu=\frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\dot{\omega}^a\dot{\omega}^b+g_{a\sigma}\Lambda^\sigma_{cb}\dot{\omega}^a\omega^b\omega^c+S' \tag{6.3.106}$$

式中 S' 为不含 $\dot{\omega}$ 的项。

命题 7 $\frac{\partial \tilde{S}^*}{\partial \dot{\omega}^a}=\Pi_a$ （6.3.107）

〔证明〕 由式(6.3.106)、(6.3.95)和(6.3.96)，知

$$\frac{\partial \tilde{S}^*}{\partial \dot{\omega}^a}=\tilde{g}_{ab}\dot{\omega}^b+\tilde{g}_{a\sigma}\Lambda^\sigma_{cb}\omega^b\omega^c$$

$$=\tilde{g}_{a\sigma}(\Pi^\sigma+\tilde{R}^\sigma)=\Pi_a$$ ‖

例 2 试描述匀质圆球在一般力作用下沿粗糙水平面的纯滚动。

为确定球的运动，我们取五个广义坐标：球心 O 的坐标 (x,y) 及三个 Euler 角 ψ、θ、φ。由于纯滚动，系统受有三个非完整约束

$$\begin{aligned}\dot{x}+a(\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta-\dot{\theta}\sin\psi)=0\\ \dot{y}+a(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\psi)=0\end{aligned} \tag{a}$$

圆球的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{5}ma^2(\dot{\psi}^2+\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2+2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta) \tag{b}$$

根据式（6.3.92），取准速度如下

$$\begin{aligned}\omega^1&=\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\\ \omega^2&=\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi\\ \omega^3&=\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta\\ \omega^4&=\dot{x}+a(\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta-\dot{\theta}\sin\psi)\end{aligned} \tag{c}$$

$$\omega^5 = \dot{y} + a(\dot{\varphi}\sin\psi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\psi)$$

其中 ω^1、ω^2、ω^3 为球的角速度在与固定坐标系相平行的坐标轴上的投影。

由式（c）可以解出广义速度

$$\dot{\theta} = \omega^1\cos\psi + \omega^2\sin\psi$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}(\omega^1\sin\psi - \omega^2\cos\psi) \tag{d}$$

$$\dot{\psi} = \omega^3 - \text{ctg}\theta(\omega^1\sin\psi - \omega^2\cos\psi)$$

$$\dot{x} = \omega^4 + a\omega^2, \quad \dot{y} = \omega^5 - a\omega^1$$

将式(d)代入动能表达式(b)，得动能的准速度表示式为[3]

$$T^* = \frac{1}{2}m\left\{\frac{7}{5}a^2[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2] + \frac{2}{5}a^2(\omega^3)^2 + 2a\omega^2\omega^4 - 2a\omega^1\omega^5 + (\omega^4)^2 + (\omega^5)^2\right\} \tag{e}$$

故

$$\tilde{g}_{11} = \frac{7}{5}ma^2, \quad \tilde{g}_{15} = \tilde{g}_{51} = -a, \quad \tilde{g}_{22} = \frac{7}{5}ma^2$$

$$\tilde{g}_{33} = \frac{2}{5}ma^2, \quad \tilde{g}_{24} = \tilde{g}_{42} = ma, \quad \tilde{g}_{44} = \tilde{g}_{55} = 1 \tag{f}$$

Boltzmann 记号 γ^r_{ab} 为[3]

$$\gamma^1_{23} = -\gamma^1_{32} = -1, \quad \gamma^2_{31} = -\gamma^2_{13} = -1, \quad \gamma^3_{12} = -\gamma^3_{21} = -1$$

$$\gamma^4_{13} = -\gamma^4_{31} = -a, \quad \gamma^5_{23} = -\gamma^5_{32} = -a \tag{g}$$

相应于准坐标 π^1, π^2, π^3 的广义力的协变分量为

$$\Pi_1 = \tilde{m}^0_1 - a\tilde{V}_2, \quad \Pi_2 = \tilde{m}^0_2 + a\tilde{V}_1, \quad \Pi_3 = \tilde{m}^0_3 \tag{h}$$

其中 $\tilde{m}^0_1$、$\tilde{m}^0_2$、$\tilde{m}^0_3$ 为作用在圆球上的力偶 $\tilde{m}^0$ 在空间固定坐标系的轴上的投影；$\tilde{V}_1$、$\tilde{V}_2$ 为作用在圆球上的力 $\tilde{V}$ 在 x、y 轴上的投影。

我们利用 Boltzmann-Hamel 方程的张量型（6.3.96）

$$\tilde{g}_{ac}\dot{\omega}^a + (\Gamma_{ab,c} + \tilde{g}_{rc}\gamma^r_{cb})\omega^a\omega^b = \Pi_c \tag{i}$$

式中，a、b、$c = 1,2,3$。建立圆球的运动方程式。

将式（f）中的 $\tilde{g}_{\sigma\rho}$ 代入命题 2 中求 $\Gamma_{ab,c}$ 的公式中，得

$$\Gamma_{ab,c}=0 \tag{j}$$

将式(j)、(g)、(h)代入方程(i)，整理可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{7}{5}ma^2\dot{\omega}^1=\Pi_1=\tilde{m}_1^0-a\tilde{V}_2\\
&\frac{7}{5}ma^2\dot{\omega}^2=\Pi_2=\tilde{m}_2^0+a\tilde{V}_1\\
&\frac{2}{5}ma^2\dot{\omega}^3=\Pi_3=\tilde{m}_3^0
\end{aligned} \tag{k}
$$

上式与文献〔3〕中所得结果一致。

下面用 Appell 方程命题 7 来解这个问题。由式（6.3.106）得

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}^*&=\frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\dot{\omega}^a\dot{\omega}^b+\tilde{g}_{a\sigma}(\Gamma^{\sigma}_{cb}+\tilde{g}^{\sigma\varkappa}\tilde{g}_{\nu b}\gamma^{\nu}_{\varkappa c})\dot{\omega}^a\omega^b\omega^c+S'\\
&=\frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\dot{\omega}^a\dot{\omega}^b+(\Gamma_{cb,a}+\tilde{g}_{\nu b}\gamma^{\nu}_{ac})\dot{\omega}^a\omega^b\omega^c+S'
\end{aligned}
$$

式中 S' 为不含 $\dot{\omega}^a$ 的项。将式(f)、(g)、(j) 代入上式，有

$$\tilde{S}^*=\frac{1}{2}\left[\frac{7}{5}ma^2(\dot{\omega}^1)^2+\frac{7}{5}ma^2(\dot{\omega}^2)^2+\frac{2}{5}ma^2(\dot{\omega}^3)^2\right]+S'$$

由 Appell 方程命题 7，知

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\tilde{S}^*}{\partial\dot{\omega}^1}=\frac{7}{5}ma^2\dot{\omega}^1=\Pi_1=\tilde{m}_1^0-a\tilde{V}_2\\
&\frac{\partial\tilde{S}^*}{\partial\dot{\omega}^2}=\frac{7}{5}ma^2\dot{\omega}^2=\Pi_2=\tilde{m}_2^0+a\tilde{V}_1\\
&\frac{\partial\tilde{S}^*}{\partial\dot{\omega}^3}=\frac{2}{5}ma^2\dot{\omega}^3=\Pi_3=\tilde{m}_3^0
\end{aligned} \tag{l}
$$

方程（l）即是方程(k)。 ‖

§6.4 非定常系统的运动方程

在这一节，我们将上一节的思想从定常系统推广到非定常系统。

6.4.1 Добронравов 方程

Добронравов 在 1970 年将其对定常系统的思想推广到非定常系统，得到了具有不变性的运动方程[4]。这个方程的特点有二：一是对包含时间在内的坐标变换群的不变性；二是方程中的每一项都有明确的几何意义。

1. 完整情形

为了解决时间 t 的出现而带来的困难，我们引进非定常几何的概念，如形变空间中的点，它的量度，类似于 Riemann 位形空间中的定常系统，由依赖于时间的动能来确定。

定义 1 称上述的形变空间理论为非定常几何；称张量Φ为强张量，如果它的分量在运动学变换

$$q^i = q^i(q^{i'}, t) \tag{6.4.1}$$

下，如同在几何变换

$$q^i = q^i(q^{i'}) \tag{6.4.2}$$

下一样变换。

非定常几何中的所有张量对于包括时间在内的坐标变换群（6.4.1）应该是不变的，即都应是强张量。

一阶强张量就是强矢量，它的分量在变换（6.4.1）下如此变换

$$V^i = \frac{\partial q^i}{\partial q^{j'}} V^{j'} \tag{6.4.3}$$

显然，dq^i 不是强矢量，这由下式可以看出

$$\mathrm{d}q^i=\frac{\partial q^i}{\partial q^{j'}}\mathrm{d}q^{j'}+\frac{\partial q^i}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{6.4.4}$$

命题1 若**V**是强张量，则**V**对 $\dot{q}^i$ 的偏导数也是强张量。

〔证明〕 我们以强矢量为例，余者类推。

若**V**是强矢量，根据定义，有

$$V^i=\frac{\partial q^i}{\partial q^{j'}}V^{j'}$$

将上式对 $\dot{q}^k$ 求导，由于$\frac{\partial q^i}{\partial q^{j'}}$不含 $\dot{q}^k$，有

$$\frac{\partial V^i}{\partial \dot{q}^k}=\frac{\partial q^i}{\partial q^{j'}}\frac{\partial V^{j'}}{\partial \dot{q}^k} \tag{6.4.5}$$

即$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \dot{q}^k}$是强矢量。

利用命题 1 可以建立起非定常几何的结构。

非定常几何的度量由系统动能确定：

$$\mathrm{d}s^2=2T\mathrm{d}t^2=g_{ij}\mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^j+2a_i\mathrm{d}q_i\mathrm{d}t+A\mathrm{d}t^2 \tag{6.4.6}$$

其中 a_i，A由式（6.2.8）和（6.2.9）定义。

由于 $\mathrm{d}s^2$ 作为力学量相对于坐标变换群（6.4.1)是不变量，根据命题 1，我们可以构造强矢量如下：

$$v_i=g_{ik}\dot{q}^k+a_i \tag{6.4.7}$$

如果再将 v_i 对 $\dot{q}^k$ 求导，可以得到强协变张量 g_{ik}。

设 v_i 是$\boldsymbol{v}$的分量，则$\boldsymbol{v}$的逆变分量为

$$\begin{aligned}v^i&=g^{ij}v_j=g^{ij}(g_{jk}\dot{q}^k+a_j)\\&=\dot{q}^i+a^i\end{aligned} \tag{6.4.8}$$

其中 $$a^i=g^{ij}a_j$$

定义无限小强矢量如下：

$$\delta q^i=v^i\mathrm{d}t=\mathrm{d}q^i+a^i\mathrm{d}t \tag{6.4.9}$$

δq^i 称为绝对元位移。

非定常几何的度量在不变量下有如下的形式

$$ds^2 = g_{ij}\delta q^i \delta q^j + (A - a_i a^i)dt^2 \qquad (6.4.10)$$

这可由式（6.4.9）和（6.4.6）直接推得。

因为对任意强矢量 $\boldsymbol{u} = u^i \boldsymbol{g}_i$，有

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{du^i}{dt}\boldsymbol{g}_i + u^i \frac{d\boldsymbol{g}_i}{dt} = \frac{du^i}{dt}\boldsymbol{g}_i + u^i\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial t}\right)$$

$$= \left(\frac{du^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}u^j\dot{q}^k + \Gamma^i_j u^j\right)\boldsymbol{g}_i \qquad (6.4.11)$$

其中 Γ^i_{jk} 是第二类 Christoffel 符号，Γ^i_j 由式（6.2.12）定义。故可引入下面的定义。

定义 2 类似于 Riemann 几何中绝对微分的概念(6.1.41)，在非定常几何中定义强协变微分如下：

$$\delta u^i = du^i + \Gamma^i_{jk}u^j dq^k + \Gamma^i_j u^j dt \qquad (6.4.12)$$

式中 Γ^i_{jk} 为第二类 Christoffel 符号，由式（6.1.32）定义；Γ^i_j 由下式定义

$$\Gamma^i_j = g^{ih}\Gamma_{h,j}, \quad \Gamma_{h,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{hj}}{\partial t} + \frac{\partial a_h}{\partial q^j} - \frac{\partial a_j}{\partial q^h}\right) \qquad (6.4.13)$$

将无限小强协变微分（6.4.9）代入到式（6.4.12）中，得

$$\delta u^i = \left(\frac{\partial u^i}{\partial q^k} + \Gamma^i_{hk}u^h\right)\delta q^k + \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} + \Gamma^i_h u^h - a^k \frac{\partial u^i}{\partial q^k} - \Gamma^i_{hk}u^h a^k\right)dt \qquad (6.4.14)$$

定义 3 关系(6.4.14)中 δq^k 前的系数称为对 q^k 的强导数，记作 $\nabla_k u^i$，即❶

$$\nabla_k u^i = \frac{\partial u^i}{\partial q^k} + \Gamma^i_{hk}u^h \qquad (6.4.15)$$

式（6.1.14）中 dt 前的系数称作对 t 的强导数，记作 $\nabla_t u^i$，即❷

$$\nabla_t u^i = \frac{\partial u^i}{\partial t} + \Gamma^i_h u^h - a^k \frac{\partial u^i}{\partial q^k} - \Gamma^i_{hk}u^h a^k \qquad (6.4.16)$$

根据定义 3，可以将任何张量的强微分表示成

---

❶、❷ 类似于式（6.1.43）。

$$\delta\mathbf{V}=\nabla_k\mathbf{V}\delta q^k+\nabla_t\mathbf{V}\mathrm{d}t \tag{6.4.17}$$

非定常空间的特性是它的线元随时间而改变。

设$\mathrm{d}t\neq0$，$\bar{\delta}q^i=0$，即$\bar{\mathrm{d}}q^i=-a^i\mathrm{d}t$，计算标量函数 $\psi=\bar{\delta}(g_{ik}\delta q^i\delta q^k)$，则有[4]

$$\psi=\bar{\delta}(g_{ik}\delta q^i\delta q^k)=\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}-a^j\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}-g_{ij}\frac{\partial a^j}{\partial q^k}-g_{kj}\frac{\partial a^j}{\partial q^i}\right)\delta q^i\delta q^k\mathrm{d}t \tag{6.4.18}$$

ψ 指出了空间间隔随时间的延伸。记

$$W_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}-a^j\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}-g_{ij}\frac{\partial a^j}{\partial q^k}-g_{kj}\frac{\partial a^j}{\partial q^i}\right) \tag{6.4.19}$$

定义 4　称由 W_{ik} 定义的张量为非定常空间的延伸张量$\mathbf{W}$。

延伸张量是非定常空间特有的，它是表征非定常几何的一个指标。

定义 5　在非定常空间中，满足

$$\mathrm{d}\bar{\mathrm{d}}q=\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}q,\ \mathrm{d}\bar{\mathrm{d}}t=\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}t \tag{6.4.20}$$

的两个位移 $\delta,\bar{\delta}$ 称为可交换的。

延伸张量$\mathbf{W}$亦可通过如下途径得到[5]：计算

$$\delta\bar{\delta}q^i-\bar{\delta}\delta q^i=W_h^{\cdot i}\ (\bar{\delta}q^h\mathrm{d}t-\delta q^h\bar{\mathrm{d}}t) \tag{6.4.21}$$

其中δ、$\bar{\delta}$ 为可交换的。由上式求出的 $W_h^{\cdot i}$ 为延伸张量的混合分量，即

$$W_h^{\cdot i}=g^{ki}W_{hk},\ W_{ik}=g_{hk}W_i^{\cdot h} \tag{6.4.22}$$

命题 2　对于完整系统，存在如下运动微分方程：

$$\frac{\delta v_i}{\mathrm{d}t}+W_i^{\cdot j}v_j=S_i+Q_i\ 或\ \frac{\delta v^i}{\mathrm{d}t}+W_j^{\cdot i}v^j=S^i+Q^i \tag{6.4.23}$$

其中 δv^i 由式（6.4.12）定义，Q_i 是广义力的协变分量，而

$$\frac{\delta v_i}{\mathrm{d}t}=g_{ij}\frac{\delta v^j}{\mathrm{d}t},\ S_i=\frac{1}{2}\frac{\partial A'}{\partial q^i},\ A'=A-a_ia^i \tag{6.4.24}$$

〔证明〕 用 Hamilton 原理来证，因为它是由对任何包含时间的坐标变换均不变的形式给出：[3,4,7]

$$\int_{t_0}^{t_1}(\bar{\delta}T+Q_i\bar{\delta}q^i)\mathrm{d}t=0 \qquad (6.4.25)$$

式中，$\bar{\delta}$ 是强协变等时变分；δ 为强变分。下面先求出动能的变分$\bar{\delta}T$，我们有

$$\bar{\delta}T=\bar{\delta}\left(\frac{1}{2}v_iv^i+\frac{1}{2}A'\right)=v_i\bar{\delta}v^i+\frac{1}{2}\bar{\delta}A'$$

将上式代入式（6.4.25）中，对由右边的第一项生成的项进行变换、化简，得

$$v_i\bar{\delta}v^i\mathrm{d}t=v_i\bar{\delta}\delta q^i=\delta(v_i\bar{\delta}q^i)-\delta v_i\bar{\delta}q^i-v_iW_j{}^i\bar{\delta}q^j\mathrm{d}t$$

由于对力学系统

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta(v_i\bar{\delta}q^i)=0$$

于是

$$\int_{t_0}^{t_1}\bar{\delta}T\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\left\{-\left(\frac{\delta v_i}{\mathrm{d}t}+W_i{}^jv_j\right)\bar{\delta}q^i+\frac{1}{2}\bar{\delta}A'\right\}\mathrm{d}t \qquad (6.4.26)$$

而

$$\bar{\delta}A'=\frac{\partial A'}{\partial q^i}\bar{\delta}q^i=2S_i\bar{\delta}q^i$$

从而，Hamilton 原理（6.4.25）可以表示成

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{-\left(\frac{\delta v_i}{\mathrm{d}t}+W_i{}^jv_j\right)+S_i+Q_i\right\}\bar{\delta}q^i\mathrm{d}t=0 \qquad (6.4.27)$$

其中

$$S_i=\frac{1}{2}\frac{\partial A'}{\partial q^i}$$

由于$\bar{\delta}q^i$是任意的，根据泛函理论知，式（6.4.27）成立的充要条件是大括号里的量等于零，即系统具有不变形式的运动方程

$$\frac{\delta v_i}{\mathrm{d}t}+W_i{}^jv_j=S_i+Q_i$$

上式亦可写成（用 g^{ik} 乘上式，且对 i 求和）

$$\frac{\delta v^i}{\mathrm{d}t}+W_j{}^iv^j=S^i+Q^i$$

‖

方程（6.4.23）称为完整情形的 Доброправов 方程。

2．非完整情形

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q^1,\cdots,q^n$ 确定，且受有 r 个理想线性非完整非定常约束

$$a_i^\rho \mathrm{d}q^i + \bar{a}^\rho \mathrm{d}t = 0, \qquad (\rho = 1,\cdots,r) \tag{6.4.28}$$

由于非完整约束是对系统速度的限制，因此，约束(6.4.28)的存在意味着所有点的速度已不能是任意的了，它们由 $m=n-r$ 个独立的广义速度给出。假设 $\dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^m$ 是独立的广义速度，那么所有的广义速度可以表示如下

$$\dot{q}^i = b_\alpha^i \dot{q}^\alpha + b^i, (i=1,\cdots,n;\ \alpha=1,\cdots,m) \tag{6.4.29}$$

上式亦可写成

$$\mathrm{d}q^i = b_\alpha^i \mathrm{d}q^\alpha + b^i \mathrm{d}t \tag{6.4.30}$$

方程（6.4.30）每一时刻在空间每一点上给出一个 m 维曲面，它具有牵连速度 b^i。这一运动着的曲面称为非定常非完整几何。

非定常非完整几何的坐标变换一般可以用下式描述

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}q^i = C_k^i \mathrm{d}q^k + C^i \mathrm{d}t, \qquad (i、k=1,\cdots,n) \\ \text{或} \quad &\mathrm{d}q^\alpha = \hat{C}_\beta^\alpha \mathrm{d}q^\beta + \hat{C}^\alpha \mathrm{d}t, \qquad (\alpha、\beta=1,\cdots,m) \end{aligned} \tag{6.4.31}$$

非定常非完整几何的所有量在坐标变换（6.4.31）下是不变的，它的度量，同非定常几何一样，可用系统动能确定

$$\mathrm{d}s^2 = 2T\mathrm{d}t^2 = g_{ik}\mathrm{d}q^i \mathrm{d}q^k + 2a_i \mathrm{d}q^i \mathrm{d}t + A\mathrm{d}t^2 \tag{6.4.32}$$

非定常非完整空间中的虚位移（$\mathrm{d}t=0$）由

$$\mathrm{d}q^i = b_\alpha^i \mathrm{d}q^\alpha \tag{6.4.33}$$

给出。所有虚位移的总合构成一个 m 维流形$(\underline{X})$，称为虚位移流形，或虚流形。

对任意矢量 u^i，记$\underline{u}^i$ 为它在虚位移流形（$\underline{X}$）上的投影。如果$\underline{u}^i = b_\alpha^i u^\alpha$，$i=1,\cdots,n;\ \alpha=1,\cdots,m$，则显然〔由式(6.4.33)〕矢量$\underline{u}^i \in (\underline{X})$。$b_\alpha^i$ 称为虚流形（$\underline{X}$）的联系张量。

假设从式（6.4.30）可以解出 $\mathrm{d}q^\alpha$，即有表达式

$$\mathrm{d}q^{\alpha}=\tilde{b}_{i}^{\alpha}\mathrm{d}q^{i}+\tilde{b}^{\alpha}\mathrm{d}t \tag{6.4.34}$$

其中矩阵（$\tilde{b}_{i}^{\alpha}$）、（$\tilde{b}^{\alpha}$）满足

$$\tilde{b}_{i}^{\alpha}b_{\beta}^{i}=\delta_{\beta}^{\alpha},\quad \tilde{b}_{i}^{\alpha}b_{\alpha}^{j}=\delta_{i}^{j},\quad b_{\alpha}^{i}\tilde{b}^{\alpha}+b^{i}=0 \tag{6.4.35}$$

将式（6.4.30）代入式（6.4.32），得度量 $\mathrm{d}s^2$ 在非完整坐标下的表达式

$$\mathrm{d}s^{2}=\tilde{g}_{\alpha\beta}\mathrm{d}q^{\alpha}\mathrm{d}q^{\beta}+2\tilde{a}_{\alpha}\mathrm{d}q^{\alpha}+\tilde{A} \tag{6.4.36}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{g}_{\alpha\beta}=g_{ij}b_{\alpha}^{i}b_{\beta}^{j},\quad \tilde{a}_{\alpha}=g_{ij}b_{\alpha}^{i}b^{j}+a_{i}b_{\alpha}^{i}\\&\tilde{A}=g_{ij}b^{i}b^{j}+2a_{i}b^{i}+A\end{aligned}\right\} \tag{6.4.37}$$

与完整情形类似，由度量 $\mathrm{d}s^2$ 可以导出属于虚位移流形（$\underline{X}$）的强矢量

$$\underline{v}_{\alpha}=\tilde{g}_{\alpha\beta}\dot{q}^{\beta}+\tilde{a}_{\alpha} \tag{6.4.38}$$

引进张量 $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ 的逆变分量 $\tilde{g}^{\sigma\rho}$

$$\tilde{g}^{\sigma\rho}=g^{ij}\tilde{b}_{i}^{\sigma}\tilde{b}_{j}^{\rho} \tag{6.4.39}$$

容易验证，由上式定义的 $\tilde{g}^{\sigma\rho}$ 满足 $\tilde{g}_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\beta\gamma}=\delta_{\alpha}^{\gamma}$，亦即 $\tilde{g}^{\sigma\rho}$ 确是度量张量的逆变分量。用 $\tilde{g}^{\alpha\sigma}$ 乘式（6.4.38），且对 α 求和，得强矢量 $\underline{\boldsymbol{v}}$ 的逆变分量〔其协变分量由式（6.4.38）给出〕

$$\underline{v}^{\sigma}=\dot{q}^{\sigma}+\tilde{a}^{\sigma},\quad \tilde{a}^{\sigma}=\tilde{g}^{\alpha\sigma}\tilde{a}_{\alpha} \tag{6.4.40}$$

强矢量 $\underline{\boldsymbol{v}}$ 称为绝对虚速度。

式（6.4.38）和（6.4.40）可以改写成如下形式

$$\left.\begin{aligned}&\underline{\delta q}_{\alpha}=\underline{v}_{\alpha}\mathrm{d}t=\tilde{g}_{\alpha\beta}\mathrm{d}q^{\beta}+\tilde{a}_{\alpha}\mathrm{d}t\\&\underline{\delta q}^{\alpha}=\underline{v}^{\alpha}\mathrm{d}t=\mathrm{d}q^{\alpha}+\tilde{a}^{\alpha}\mathrm{d}t\end{aligned}\right. \tag{6.4.41}$$

矢量 $\underline{\delta q}_{\alpha}$ 属于虚流形（$\underline{X}$），称为绝对虚位移。

由式（6.4.9）、（6.4.30）和（6.4.41）知，非定常非完整几何的绝对元位移有形

$$\begin{aligned}\delta q^{i}&=b_{\alpha}^{i}\mathrm{d}q^{\alpha}+(a^{i}+b^{i})\mathrm{d}t\\&=b_{\alpha}^{i}\underline{\delta q}^{\alpha}+(a^{i}+b^{i}-b_{\alpha}^{i}\tilde{a}^{\alpha})\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6.4.42}$$

下面我们证明上式右边 $\mathrm{d}t$ 前的系数为零。因

$$b_{\alpha}^{i}\tilde{a}^{\alpha}=b_{\alpha}^{i}\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{a}_{\beta}$$

将式（6.4.39）和（6.4.37）代入上式，并利用式（6.4.35），得

$$b_\alpha^i \tilde{a}^\alpha = b_\alpha^i g^{rs} \tilde{b}_r^\alpha \tilde{b}_s^\beta (g_{mk} b_\beta^m b^k + a_m b_\beta^m)$$

$$= g^{im} g_{mk} b^k + g^{im} a_m = b^i + a^i$$

故

$$-b_\alpha^i \tilde{a}^\alpha + a^i + b^i = 0 \qquad (6.4.43)$$

即

$$\delta q^i = b_\alpha^i \underset{-}{\delta} q^\alpha \qquad (6.4.44)$$

利用上式，将度量变换为不变形式

$$ds^2 = \underset{-}{\delta} q_\alpha \underset{-}{\delta} q^\alpha + (\tilde{A} - \tilde{a}^\alpha \tilde{a}_\alpha) dt^2 \qquad (6.4.45)$$

设δ、$\bar{\delta}$是两个可交换的位移，与完整情形类似，我们通过计算

$$\bar{\delta} \underset{-}{\delta} q^\alpha - \delta \underset{-}{\bar{\delta}} q^\alpha = \widetilde{W}_{\dot{\beta}}{}^{\alpha} (\underset{-}{\delta} q^\beta \bar{d}t - \underset{-}{\bar{\delta}} q^\beta dt) \qquad (6.4.46)$$

来求非定常非完整空间的延伸张量$\widetilde{\mathbf{W}}$。

命题3 由式（6.4.46）定义的延伸张量$\widetilde{\mathbf{W}}$的混合分量

$$\widetilde{W}_{\dot{\beta}}{}^{\alpha} = W_{\dot{j}}{}^{i} b_i^\alpha b_\beta^j + \tilde{b}_i^\alpha \frac{\delta b_\beta^i}{dt} \qquad (6.4.47)$$

〔证明〕 因为

$$\delta q^i = \underset{-}{\delta} q^i = b_\alpha^i \underset{-}{\delta} q^\alpha$$

将上式微分，得

$$\bar{\delta} \delta q^i = \bar{\delta} b_\alpha^i \underset{-}{\delta} q^\alpha + b_\alpha^i \bar{\delta} \underset{-}{\delta} q^\alpha \qquad (6.4.48)$$

将上式在虚流形（$\underset{-}{X}$）上投影，有

$$\tilde{b}_i^\beta \bar{\delta} \delta q^i = \tilde{b}_i^\beta (\bar{\delta} b_\alpha^i \underset{-}{\delta} q^\alpha + b_\alpha^i \bar{\delta} \underset{-}{\delta} q^\alpha) \qquad (6.4.49)$$

通过同样的计算可得

$$\tilde{b}_i^\beta \delta \bar{\delta} q^i = \tilde{b}_i^\beta (\delta b_\alpha^i \underset{-}{\bar{\delta}} q^\alpha + b_\alpha^i \delta \underset{-}{\bar{\delta}} q^\alpha) \qquad (6.4.50)$$

将式（6.4.49）减去式（6.4.50），有

$$\tilde{b}_i^\beta (\bar{\delta} \delta q^i - \delta \bar{\delta} q^i) = (\bar{\delta} \underset{-}{\delta} q^\beta - \delta \underset{-}{\bar{\delta}} q^\beta)$$

$$+ \tilde{b}_i^\beta (\bar{\delta} b_\alpha^i \underset{-}{\delta} q^\alpha - \delta b_\alpha^i \underset{-}{\bar{\delta}} q^\alpha)$$

利用式（6.4.20），上式亦即

$$(\bar{\bar{\delta}}\delta q^{\beta}-\delta\bar{\bar{\delta}}q^{\beta})=\tilde{b}_i^{\beta}W_j{}^{i}(\delta q^j\bar{d}t-\bar{\delta}q^j dt)$$

$$+\tilde{b}_i^{\beta}(\bar{\delta}\delta b_a^i\underline{\delta}q^a-\delta b_a^i\bar{\underline{\delta}}q^a) \qquad (6.4.51)$$

因 $\tilde{b}_i^{\beta}(\bar{\delta}b_a^i\underline{\delta}q^a-\delta b_a^i\bar{\underline{\delta}}q^a)=\tilde{b}_i^{\beta}\{[(\nabla_k b_a^i)\bar{\delta}q^k+(\nabla_t b_a^i)\bar{d}t]\underline{\delta}q^a$

$$-[(\nabla_k b_a^i)\delta q^k+(\nabla_t b_a^i)dt]\bar{\underline{\delta}}q^a\}$$

$$=[(\nabla_t b_a^i)\tilde{b}_i^{\beta}+(\nabla_k b_a^i)\tilde{b}_i^{\beta}b_\sigma^k\underline{v}^{\sigma}](\underline{\delta}q^a\bar{d}t-\bar{\underline{\delta}}q^a dt)$$

将上式及式（6.4.44）代入式（6.4.51），可得

$$\bar{\delta}\delta q^{\beta}-\delta\bar{\delta}q^{\beta}=\tilde{W}_a{}^{\beta}(\underline{\delta}q^a\bar{d}t-\bar{\underline{\delta}}q^a dt) \qquad (6.4.52)$$

式中

$$\tilde{W}_a{}^{\beta}=W_j{}^{i}\tilde{b}_i^{\beta}b_a^j+\tilde{b}_i^{\beta}\nabla_t b_a^i+\tilde{b}_i^{\beta}b_\sigma^k\underline{v}^{\sigma}\nabla_k b_a^i$$

$$=W_j{}^{i}\tilde{b}_i^{\beta}b_a^j+\tilde{b}_i^{\beta}\frac{\delta b_a^i}{dt}$$

‖

理想非完整力学系统的运动方程即可通过 Hamilton 原理（6.4.25）推出，亦可由 Routh 型方程[4]

$$\frac{\delta v^i}{dt}+W_j{}^{i}v^j=S^i+Q^i+R^i \qquad (6.4.53)$$

推出，式中 R^i 是垂直于虚流形（$\underline{X}$）的约束反力。系统所受的非完整约束可用下式表示

$$v^i=\underline{v}^i=b_a^i\underline{v}^a \qquad (6.4.54)$$

将上式代入式（6.4.53）中，得

$$b_a^i\frac{\delta\underline{v}^a}{dt}+\underline{v}^a\frac{\delta b_a^i}{dt}+W_j{}^{i}v^j=S^i+Q^i+R^i$$

将上式在虚流形（$\underline{X}$）上投影，即以 $\tilde{b}_i^{\beta}$ 乘以上式，对 i 求和，得[4]

$$\frac{\delta\underline{v}^{\beta}}{dt}+\tilde{W}_a{}^{\beta}\underline{v}^a=\tilde{S}^{\beta}+\tilde{Q}^{\beta} \qquad (6.4.55)$$

其中

$$\tilde{S}^a=\tilde{b}_i^a S^i,\quad \tilde{Q}^a=\tilde{b}_i^a Q^i \qquad (6.4.56)$$

方程(6.4.55)就是非完整力学系统的Добронравов 方程，

它与约束方程（6.4.54）组成一个封闭的方程组。当系统是完整时，方程（6.4.55）蜕化成方程（6.4.23）。

6.4.2 Добронравов方程与分析力学中其它方程的等价性

1．完整情形

命题4 对任何一个完整力学系统，Добронравов方程（6.4.23）与第二类Lagrange方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial T}{\partial q^i}=Q_i \qquad (6.4.57)$$

等价。

〔证明〕 任何一个力学系统，其动能总可以表成[3,7]

$$T=\frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j+a_i\dot{q}^i+\frac{1}{2}A \qquad (6.4.58)$$

将上式代入Lagrange方程（6.4.57）中，展开得微分方程组

$$g_{ij}\ddot{q}^j+\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^k\dot{q}^j+\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\dot{q}^j+\frac{\partial a_i}{\partial q^k}\dot{q}^k+\frac{\partial a_i}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}\dot{q}^k\dot{q}^j$$
$$-\frac{\partial a_j}{\partial q^i}\dot{q}^j-\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial q^i}=Q_i \qquad (6.4.59)$$

由命题2和定义2知

$$\delta v_i=g_{ik}\delta v^k=g_{ik}(\mathrm{d}v^k+\Gamma^k_{rs}v^r\mathrm{d}q^s+\Gamma^k_{r}v^r\mathrm{d}t)$$

即Добронравов方程（6.4.23）左边的第一项可以写成

$$\frac{\delta v_i}{\mathrm{d}t}=g_{ik}\left(\frac{\mathrm{d}v^k}{\mathrm{d}t}+\Gamma^k_{rs}v^r\dot{q}^s+\Gamma^k_{r}v^r\right)$$

$$=g_{ik}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{q}^k+a^k)+g_{ik}\Gamma^k_{rs}v^r\dot{q}^s+g_{ik}\Gamma^k_{r}v^r$$

$$=g_{ik}\left(\ddot{q}^k+\frac{\partial a^k}{\partial q^j}\dot{q}^j+\frac{\partial a^k}{\partial t}\right)+\Gamma_{rs,i}v^r\dot{q}^s+\Gamma_{i,r}v^r$$

$$=g_{ik}\ddot{q}^k+g_{ik}\frac{\partial a^k}{\partial q^j}\dot{q}^j+g_{ik}\frac{\partial a^k}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial q^s}+\frac{\partial g_{is}}{\partial q^r}\right.$$

$$-\frac{\partial g_{rs}}{\partial q^i}\Big)(\dot{q}^r+a^r)\dot{q}^s+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{is}}{\partial t}+\frac{\partial a_i}{\partial q^s}-\frac{\partial a_s}{\partial q^i}\Big)(\dot{q}^s+a^s)$$

因 $W_i^{\ j}=g^{kj}W_{ik}$，故 $W_i^{\ j}v_j=W_{ik}g^{kj}v_j=W_{ik}v^k$。将上述各式及 S_i 的定义式（6.4.24）代入 Добронравов 方程（6.4.23）中，展开得

$$\begin{aligned}
&g_{ik}\ddot{q}^k+g_{ik}\frac{\partial a^k}{\partial q^j}\dot{q}^j+g_{ik}\frac{\partial a^k}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ir}}{\partial q^s}\dot{q}^r\dot{q}^s+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{is}}{\partial q^r}\dot{q}^r\dot{q}^s\\
&\quad-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{rs}}{\partial q^i}\dot{q}^r\dot{q}^s+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ir}}{\partial q^s}\dot{q}^s a^r+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{is}}{\partial q^r}\dot{q}^s a^r\\
&\quad-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{rs}}{\partial q^i}\dot{q}^s a^r+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{is}}{\partial t}\dot{q}^s+\frac{1}{2}\frac{\partial a_i}{\partial q^s}\dot{q}^s-\frac{1}{2}\frac{\partial a_s}{\partial q^i}\dot{q}^s\\
&\quad+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{is}}{\partial t}a^s+\frac{1}{2}\frac{\partial a_i}{\partial q^s}a^s-\frac{1}{2}\frac{\partial a_s}{\partial q^i}a^s+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}\dot{q}^k\\
&\quad-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^k a^j-\frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^k\frac{\partial a^j}{\partial q^k}-\frac{1}{2}g_{kj}\dot{q}^k\frac{\partial a^j}{\partial q^i}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}a^k\\
&\quad-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}a^k a^j-\frac{1}{2}g_{ij}a^k\frac{\partial a^j}{\partial q^k}-\frac{1}{2}g_{kj}a^k\frac{\partial a^j}{\partial q^i}\\
&\quad+\frac{1}{2}a_k\frac{\partial a^k}{\partial q^i}+\frac{1}{2}a^k\frac{\partial a_k}{\partial q^i}=Q_i+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial q^i}
\end{aligned}\qquad(6.4.60)$$

因为

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ir}}{\partial q^s}\dot{q}^r\dot{q}^s+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{is}}{\partial q^r}\dot{q}^r\dot{q}^s=\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^k\dot{q}^j$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{is}}{\partial t}\dot{q}^s+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}\dot{q}^k=\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\dot{q}^j$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial a_i}{\partial q^s}\dot{q}^s+g_{ik}\frac{\partial a^k}{\partial q^j}\dot{q}^j-\frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^k\frac{\partial a^j}{\partial q^k}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ir}}{\partial q^s}\dot{q}^s a^r\\
=&\frac{1}{2}\frac{\partial a_i}{\partial q^k}\dot{q}^k+\frac{\dot{q}^k}{2}\frac{\partial}{\partial q^k}(g_{ij}a^j)
\end{aligned}$$

$$=\frac{\partial a_i}{\partial q^k}\dot{q}^k$$

$$g_{ik}\frac{\partial a^k}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ir}}{\partial t}a^r+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}a^k=\frac{\partial(g_{ik}a^k)}{\partial t}=\frac{\partial a_i}{\partial t}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial a_r}{\partial q^i}\dot{q}^r+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{rs}}{\partial q^i}\dot{q}^s a^r+\frac{1}{2}g_{kj}\dot{q}^k\frac{\partial a^j}{\partial q^i}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial a_r}{\partial q^i}\dot{q}^r+\frac{\dot{q}^s}{2}\frac{\partial}{\partial q^i}(g_{rs}a^r)$$

$$=\frac{\partial a_j}{\partial q^i}\dot{q}^j$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{is}}{\partial q^r}\dot{q}^s a^r-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^k a^j=0$$

$$\frac{1}{2}a_k\frac{\partial a^k}{\partial q^i}-\frac{1}{2}g_{kj}a^k\frac{\partial a^j}{\partial q^i}=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial a_i}{\partial q^r}a^r-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}a^k a^j-\frac{1}{2}g_{ij}a^k\frac{\partial a^j}{\partial q^k}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial a_i}{\partial q^r}a^r-\frac{a^k}{2}\frac{\partial}{\partial q^k}(g_{ij}a^j)=0$$

将以上各式代入式（6.4.60），且与式（6.4.59）对照，即可得知式（6.4.57）与 Добронравов 方程（6.4.23）等价。 ‖

2．非完整情形

命题 5 对任何力学系统，Добронравов 方程（6.4.55）与分析力学的其它 Maggi 型方程等价。

〔证明〕 Maggi 型方程（6.4.55）可以等价地写成

$$\tilde{b}_i^{\beta}\left(\frac{\delta v^i}{dt}+W_j{}^i v^j\right)=(S^i+Q^i)\tilde{b}_i^{\beta}$$

将上式两边同乘 $\tilde{g}_{\alpha\beta}$，对下标 β 求和，由

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}=g_{rs}b_\alpha^r b_\beta^s,\quad b_\beta^i\tilde{b}_i^\beta=\delta_i^i$$

得

$$g_{ri}b_\alpha^r\frac{\delta v^i}{\mathrm{d}t}+g_{ri}b_\alpha^r W_j{}^i v^j=S_r b_\alpha^r+Q_r b_\alpha^r$$

进一步整理得

$$b_\alpha^r\left(g_{ri}\frac{\delta v^i}{\mathrm{d}t}+W_{rj}v^j-S_r-Q_r\right)=0$$

上式括号中的项，前已证明，与$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial T}{\partial q^i}$等价，故 Добронравов 方程（6.4.55）与下式等价

$$b_\alpha^r\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r}-\frac{\partial T}{\partial q^r}\right)=0$$

由文献〔3，7〕知，任何 Maggi 型方程，例如 Чаплыгин 方程，都可等价地写成上式。亦即方程（6.4.55）与分析力学的其它 Maggi 型方程等价。 ‖

6.4.3 Boltzmann-Hamel 方程

$n+1$ 维形式体系应用于非定常系统的几何化[4]是这一小节所要描述的方法。时间 t 作为补充的第 $n+1$ 维坐标；所有被研究的对象都属于某一个 $n+1$ 维空间 X_{n+1}，它的度量由系统的动能确定，有

$$\mathrm{d}s^2=2T\mathrm{d}t^2=g_{ij}\mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^j+2a_i\mathrm{d}q^i\mathrm{d}t+A\mathrm{d}t^2 \qquad (6.4.61)$$

这是这一方法的核心。

由式（6.2.18）知，系统的加速度有形

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=(\ddot{q}^i+\Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k+2\Gamma^i_j\dot{q}^j+\Gamma^i)\boldsymbol{g}_i$$

由 $\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}$ 得系统的运动方程为

$$f^i=\ddot{q}^i+\Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k+2\Gamma^i_j\dot{q}^j+\Gamma^i=Q^i+R^i \qquad (6.4.62)$$

式中 Q^i 是广义力，R^i 是广义约束反力，系数 Γ^i_{jk}、Γ^i_j、Γ^i 是 Christoffel符号，分别由式（6.1.32）、（6.2.13）和（6.2.16）定义。

取准速度如下

$$\omega^s=\varphi^s_k\dot{q}^k+\varphi^s,\qquad (k、s=1,\cdots,n)\quad(6.4.63)$$

其中系数 φ^s_k、φ^s 是广义坐标 q^k 和时间 t 的函数，且满足

$$\det(\varphi^s_k)\neq 0\qquad(6.4.64)$$

上式的成立允许我们将广义速度 $\dot{q}^k$ 用准速度表出

$$\dot{q}^k=\widetilde{\varphi}^k_s\omega^s+\widetilde{\varphi}^k\qquad(6.4.65)$$

式中

$$\varphi^s_k\widetilde{\varphi}^k_j=\delta^s_j,\quad \widetilde{\varphi}^k_s\varphi^s_j=\delta^k_j,\quad \varphi^s_k\widetilde{\varphi}^k+\varphi^s=0\qquad(6.4.66)$$

亦即矩阵 (φ^s_k) 与矩阵 $(\widetilde{\varphi}^k_s)$ 互逆。$\widetilde{\varphi}^k_s$、$\widetilde{\varphi}^k$ 亦是广义坐标 q^k 和时间 t 的函数。

定义 5 引进微分记号

$$\frac{\partial}{\partial\pi^s}=\widetilde{\varphi}^i_s\frac{\partial}{\partial q^i},\quad \frac{\widetilde{\partial}}{\partial t}=\widetilde{\varphi}^i\frac{\partial}{\partial q^i}+\frac{\partial}{\partial t}\qquad(6.4.67)$$

利用定义 5，任意函数 $\varphi(q,t)$ 的全微分具有表达式

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\varphi&=\frac{\partial\varphi}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}t\\
&=\frac{\partial\varphi}{\partial q^i}\widetilde{\varphi}^i_s\mathrm{d}\pi^s+\frac{\partial\varphi}{\partial q^i}\widetilde{\varphi}^i\mathrm{d}t+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}t\\
&=\frac{\partial\varphi}{\partial\pi^s}\mathrm{d}\pi^s+\frac{\widetilde{\partial}\varphi}{\partial t}\mathrm{d}t
\end{aligned}\qquad(6.4.68)$$

利用式（6.4.65）可以将系统的动能用准速度表示，为[3,7]

$$T^*=\frac{1}{2}\widetilde{g}_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta+\widetilde{a}_\alpha\omega^\alpha+\frac{1}{2}\widetilde{A}\qquad(6.4.69)$$

式中，α、$\beta=1,\cdots,n$；$\widetilde{g}_{\alpha\beta}=g_{ij}\widetilde{\varphi}^i_\alpha\widetilde{\varphi}^j_\beta$ 为准坐标下的度量张量；而

$$\widetilde{a}_\alpha=g_{ij}\widetilde{\varphi}^i_\alpha\widetilde{\varphi}^j+a_i\widetilde{\varphi}^i_\alpha$$
$$\widetilde{A}=A+2a_i\widetilde{\varphi}^i+g_{ij}\widetilde{\varphi}^i\widetilde{\varphi}^j$$

命题 6 记准坐标下的广义加速度为 $\widetilde{f}^\sigma$，则

$$\widetilde{f}^\sigma=\varphi^\sigma_i f^i\qquad(6.4.70)$$

$$\widetilde{f}^\sigma=\dot{\omega}^\sigma+\Lambda^\sigma_{\beta\gamma}\omega^\beta\omega^\gamma+2\Lambda^\sigma_\beta\omega^\beta+\Lambda^\sigma\qquad(6.4.71)$$

联系系数

$$\Lambda^{\sigma}_{\beta\gamma}=\widetilde{\Gamma}^{\sigma}_{\beta\gamma}+\frac{1}{2}\tilde{g}^{\sigma\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha}_{\nu\gamma}+\frac{1}{2}\tilde{g}^{\sigma\nu}\tilde{g}_{\alpha\gamma}\gamma^{\alpha}_{\nu\beta}-\frac{1}{2}\gamma^{\sigma}_{\beta\gamma} \tag{6.4.72}$$

$$\Lambda^{\sigma}_{\beta}=\widetilde{\Gamma}^{\sigma}_{\beta}+\frac{1}{2}\tilde{a}^{\nu}\gamma^{\sigma}_{\nu\beta}+\frac{1}{2}\tilde{g}^{\sigma\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha}_{\nu} \tag{6.4.73}$$

$$\Lambda^{\sigma}=\widetilde{\Gamma}_{\alpha}+\tilde{a}^{\nu}\gamma^{\sigma}_{\nu} \tag{6.4.74}$$

式中α、β、γ、σ、$\nu=1, \cdots, n$；$\widetilde{\Gamma}^{\sigma}_{\beta\nu}$，$\widetilde{\Gamma}^{\sigma}_{\beta}$，$\widetilde{\Gamma}^{\sigma}$ 分别为准坐标下的Christoffel符号；$\gamma^{\alpha}_{\beta\nu}$，$\gamma^{\alpha}_{\beta}$ 称为Ricci非完整系数，将在下面定义。

〔证明〕 将(6.4.71)、(6.4.62)和(6.4.65)代入(6.4.70)中，得

$$\begin{aligned}\dot{\omega}^{\sigma}+\Lambda^{\sigma}_{\beta\gamma}\omega^{\beta}\omega^{\gamma}+2\Lambda^{\sigma}_{\beta}\omega^{\beta}+\Lambda^{\sigma}=\varphi^{\sigma}_{i}\Big(&\tilde{\varphi}^{i}_{\alpha}\dot{\omega}^{\alpha}\\ &+\frac{\partial\tilde{\varphi}^{i}_{\alpha}}{\partial q^{k}}\tilde{\varphi}^{k}_{\beta}\omega^{\alpha}\omega^{\beta}+\frac{\partial\tilde{\varphi}^{i}_{\alpha}}{\partial q^{k}}\tilde{\varphi}^{k}\omega^{\alpha}+\frac{\partial\tilde{\varphi}^{i}}{\partial q^{k}}\tilde{\varphi}^{k}_{\beta}\omega^{\beta}+\frac{\partial\tilde{\varphi}^{i}_{\alpha}}{\partial t}\\ &+\frac{\partial\tilde{\varphi}^{i}}{\partial q^{k}}\varphi^{k}+\frac{\partial\tilde{\varphi}^{i}}{\partial t}\Big)+\varphi^{\sigma}_{i}\tilde{\varphi}^{i}_{\alpha}\tilde{\varphi}^{k}_{\gamma}\Gamma^{i}_{jk}\omega^{\alpha}\omega^{\gamma}+2\varphi^{\sigma}_{i}\tilde{\varphi}^{i}_{\alpha}\\ &\times\tilde{\varphi}^{k}\Gamma^{i}_{jk}\omega^{\alpha}-2\varphi^{\sigma}_{i}\tilde{\varphi}^{i}_{\alpha}\Gamma^{i}_{j}\omega^{\alpha}+\varphi^{\sigma}_{i}\Gamma^{i}_{jk}\tilde{\varphi}^{j}\tilde{\varphi}^{k}+2\varphi^{\sigma}_{i}\Gamma^{i}_{j}\tilde{\varphi}^{j}\\ &+\varphi^{\sigma}_{i}\Gamma^{i}\end{aligned} \tag{6.4.75}$$

由式(6.4.66)，知

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\tilde{\varphi}^{i}_{\alpha}}{\partial q^{k}}\varphi^{\sigma}_{i}=-\frac{\partial\varphi^{\sigma}_{i}}{\partial q^{k}}\tilde{\varphi}^{i}_{\alpha},\quad \frac{\partial\tilde{\varphi}^{i}_{\alpha}}{\partial t}\varphi^{\sigma}_{i}=-\frac{\partial\varphi^{\sigma}_{i}}{\partial t}\tilde{\varphi}^{i}_{\alpha}\\ &\frac{\partial\tilde{\varphi}^{i}}{\partial q^{k}}=-\Big(\tilde{\varphi}^{i}_{\alpha}\frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial q^{k}}+\varphi^{\alpha}\frac{\partial\tilde{\varphi}^{i}_{\alpha}}{\partial q^{k}}\Big)\\ &\frac{\partial\tilde{\varphi}^{i}}{\partial t}=-\Big(\tilde{\varphi}^{i}_{\alpha}\frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial t}+\varphi^{\alpha}\frac{\partial\tilde{\varphi}^{i}_{\alpha}}{\partial t}\Big)\end{aligned} \tag{6.4.76}$$

将上式代入式(6.4.75)，有表达式

$$\dot{\omega}^{\sigma}+\Lambda^{\sigma}_{\beta\gamma}\omega^{\beta}\omega^{\gamma}+2\Lambda^{\sigma}_{\beta}\omega^{\beta}+\Lambda^{\sigma}=\dot{\omega}^{\sigma}-\tilde{\varphi}^{i}_{\beta}\tilde{\varphi}^{k}_{\gamma}\frac{\partial\varphi^{\sigma}_{i}}{\partial q^{k}}\omega^{\gamma}\omega^{\beta}$$

$$-\tilde{\varphi}^i_\beta\tilde{\varphi}^k\frac{\partial\varphi^\sigma_i}{\partial q^k}\omega^\beta-\tilde{\varphi}^k_\beta\tilde{\varphi}^i\frac{\partial\varphi^\sigma_i}{\partial q^k}\omega^\beta-\tilde{\varphi}^i_\beta\frac{\partial\varphi^\sigma_i}{\partial t}\omega^\beta$$

$$-\tilde{\varphi}^i_\beta\frac{\partial\varphi^\sigma}{\partial q^i}\omega^\beta-\tilde{\varphi}^i\tilde{\varphi}^k\frac{\partial\varphi^\sigma_i}{\partial q^k}-\frac{\partial\varphi^\sigma}{\partial q^i}\tilde{\varphi}^i-\frac{\partial\varphi^\sigma}{\partial t}-\tilde{\varphi}^i\frac{\partial\varphi^\sigma_i}{\partial t}$$

$$+\varphi^\sigma_i\Gamma^i_{jk}\tilde{\varphi}^j_\beta\tilde{\varphi}^k_\gamma\omega^\beta\omega^\gamma+2\varphi^\sigma_i\tilde{\varphi}^j_\beta\tilde{\varphi}^k\Gamma^i_{jk}\omega^\beta+2\varphi^\sigma_i\tilde{\varphi}^j_\beta\Gamma^i_j\omega^\beta$$
$$+\varphi^\sigma_i\Gamma^i_{jk}\tilde{\varphi}^j\tilde{\varphi}^k+2\varphi^\sigma_i\Gamma^i_j\tilde{\varphi}^j+\varphi^\sigma_i\Gamma^i \tag{6.4.77}$$

比较上式两边相同项的系数，得联系系数表达式为

$$\Lambda^\sigma_{\beta\gamma}=\varphi^\sigma_i\tilde{\varphi}^j_\beta\tilde{\varphi}^k_\gamma\Gamma^i_{jk}-\tilde{\varphi}^i_\beta\tilde{\varphi}^k_\gamma\frac{\partial\varphi^\sigma_i}{\partial q^k}$$

$$\Lambda^\sigma_\beta=\varphi^\sigma_i\tilde{\varphi}^k_\beta\tilde{\varphi}^j\Gamma^i_{jk}+\varphi^\sigma_i\tilde{\varphi}^j_\beta\Gamma^i_j-\frac{1}{2}\tilde{\varphi}^i_\beta\tilde{\varphi}^k\frac{\partial\varphi^\sigma_i}{\partial q^k}$$

$$-\frac{1}{2}\tilde{\varphi}^i_\beta\frac{\partial\varphi^\sigma}{\partial q^i}-\frac{1}{2}\tilde{\varphi}^k_\beta\tilde{\varphi}^i\frac{\partial\varphi^\sigma_i}{\partial q^k}-\frac{1}{2}\tilde{\varphi}^i_\beta\frac{\partial\varphi^\sigma_i}{\partial t}$$

$$\Lambda^\sigma=\varphi^\sigma_i\Gamma^i_{jk}\tilde{\varphi}^j\tilde{\varphi}^k+2\varphi^\sigma_i\tilde{\varphi}^j\Gamma^i_j+\varphi^\sigma_i\Gamma^i-\tilde{\varphi}^i\tilde{\varphi}^k\frac{\partial\varphi^\sigma_i}{\partial q^k}$$

$$-\tilde{\varphi}^i\frac{\partial\varphi^\sigma}{\partial q^i}-\frac{\partial\varphi^\sigma}{\partial t}-\tilde{\varphi}^i\frac{\partial\varphi^\sigma_i}{\partial t} \tag{6.4.78}$$

引进准坐标下的 Christoffel 符号

$$\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma,\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial\pi^\gamma}+\frac{\partial\tilde{g}_{\gamma\alpha}}{\partial\pi^\beta}-\frac{\partial\tilde{g}_{\beta\gamma}}{\partial\pi^\alpha}\right),\quad\tilde{\Gamma}^\sigma_{\beta\gamma}=\tilde{g}^{\sigma\alpha}\Gamma_{\beta\gamma,\alpha}$$

$$\tilde{\Gamma}_{\beta,\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{a}_\alpha}{\partial\pi^\beta}-\frac{\partial\tilde{a}_\beta}{\partial\pi^\alpha}+\frac{\tilde{\partial}\tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial t}\right),\quad\tilde{\Gamma}^\sigma_\beta=\tilde{g}^{\sigma\alpha}\Gamma_{\beta,\alpha}$$

$$\tilde{\Gamma}_\alpha=\frac{1}{2}\left(2\frac{\tilde{\partial}\tilde{a}_\alpha}{\partial t}-\frac{\partial\tilde{A}}{\partial\pi^\alpha}\right),\quad\tilde{\Gamma}^\sigma=\tilde{g}^{\sigma\alpha}\tilde{\Gamma}_\alpha \tag{6.4.79}$$

及 Ricci 非完整系数

$$\gamma^\alpha_{\beta\varepsilon}=\varphi^\alpha_l\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}^l_\beta}{\partial q^i}\tilde{\varphi}^i_\varepsilon-\frac{\partial\tilde{\varphi}^l_\varepsilon}{\partial q^i}\tilde{\varphi}^i_\beta\right)$$

$$\gamma^\alpha_\beta=\left(\frac{\partial\varphi^\alpha_k}{\partial q^r}-\frac{\partial\varphi^\alpha_r}{\partial q^k}\right)\tilde{\varphi}^r\tilde{\varphi}^k_\beta+\left(\frac{\partial\varphi^\alpha_k}{\partial t}-\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial q^k}\right)\tilde{\varphi}^k_\beta \tag{6.4.80}$$

可以将联系系数写成与式（6.4.72)～(6.4.74）一样的表达式。‖

由命题 6 可以得出非定常系统在准坐标下的运动方程[4]

$$\dot{\omega}^\sigma + \Lambda^\sigma_{\beta\gamma}\omega^\beta\omega^\gamma + 2\Lambda^\sigma_\beta\omega^\beta + \Lambda^\sigma = \tilde{Q}^\sigma + \tilde{R}^\sigma \qquad (6.4.81)$$

式中

$$\tilde{Q}^\sigma = \varphi^\sigma_i Q^i,\quad \tilde{R}^\sigma = \varphi^\sigma_i R^i \qquad (6.4.82)$$

分别为准坐标下广义力和广义约束反力的协变分量。

因为$\tilde{\Gamma}^\sigma_{\beta\gamma}$关于下标 β、γ 对称，而 $\gamma^\alpha_{\nu\beta}$ 关于下标 ν、β 反对称，所以式（6.4.81）亦可写成

$$\dot{\omega}^\sigma + \tilde{\Lambda}^\sigma_{\beta\gamma}\omega^\beta\omega^\gamma + 2\Lambda^\sigma_\beta\omega^\beta + \Lambda^\sigma = \tilde{Q}^\sigma + \tilde{R}^\sigma \qquad (6.4.83)$$

其中

$$\tilde{\Lambda}^\sigma_{\beta\gamma} = \tilde{\Gamma}^\sigma_{\beta\gamma} + \tilde{g}^{\sigma\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta}\gamma^\alpha_{\nu\gamma} \qquad (6.4.84)$$

方程（6.4.81）和(6.4.83）的协变分量表示为

$$\tilde{g}_{\sigma\tau}\dot{\omega}^\sigma + \Lambda_{\beta\gamma,\tau}\omega^\beta\omega^\gamma + 2\Lambda_{\beta,\tau}\omega^\beta + \Lambda_\tau = \tilde{Q}_\tau + \tilde{R}_\tau \quad (6.4.85)$$

和

$$\tilde{g}_{\sigma\tau}\dot{\omega}^\sigma + (\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma,\tau} + \tilde{g}_{\alpha\beta}\gamma^\alpha_{\tau\gamma})\omega^\gamma\omega^\beta + 2\Lambda_{\beta,\tau}\omega^\beta + \Lambda_\tau = \tilde{Q}_\tau + \tilde{R}_\tau \qquad (6.4.86)$$

式中 $\tilde{Q}_\tau = \tilde{g}_{\sigma\tau}\tilde{Q}^\sigma = \tilde{\varphi}^j_\tau Q_j$, $\tilde{R}_\tau = \tilde{\varphi}^j_\tau R_j$

张量型方程（6.4.81)、(6.4.83)、(6.4.85）和（6.4.86）与 Boltzmann-Hamel 方程有密切的关系，这个关系由下述命题描述。

命题 7 张量型方程（6.4.81)～(6.4.86）可以由展开 Boltzmann-Hamel方程[3,7]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial\omega^\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial\pi^\alpha} + \frac{\partial T^*}{\partial\omega^\beta}\gamma^\beta_{\alpha\nu}\omega^\nu + \frac{\partial T^*}{\partial\omega^\beta}\gamma^\beta_\alpha = \tilde{Q}_\alpha + \tilde{R}_\alpha \qquad (6.4.87)$$

来得到。

〔证明〕 根据式（6.4.69）的动能表达式计算式（6.4.87）中各项，有

$$\frac{\partial T^*}{\partial\omega^\alpha}=\tilde{g}_{\alpha\beta}\omega^\beta+\tilde{a}_\alpha,\frac{\partial T^*}{\partial\pi^\alpha}=\frac{1}{2}\ \frac{\partial\tilde{g}_{\gamma\beta}}{\partial\pi^\alpha}\omega^\gamma\omega^\beta+\ \frac{\partial\tilde{a}_\gamma}{\partial\pi^\alpha}\omega^\gamma+\ \frac{1}{2}\ \frac{\partial\tilde{A}}{\partial\pi^\alpha}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \frac{\partial T^*}{\partial\omega^\alpha}=\tilde{g}_{\alpha\beta}\dot{\omega}^\beta+\ \frac{\partial\tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial\pi^\gamma}\omega^\beta\omega^\gamma+\ \frac{\tilde{\partial}\ \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial t}\omega^\beta+\ \frac{\partial\tilde{a}_\alpha}{\partial\pi^\gamma}\omega^\gamma+\ \frac{\tilde{\partial}\ \tilde{a}_\alpha}{\partial t}$$

将上述各式代入式（6.4.87）中，得

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}\dot{\omega}^\beta+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial\pi^\gamma}+\frac{\partial\tilde{g}_{\gamma\alpha}}{\partial\pi^\beta}-\frac{\partial\tilde{g}_{\nu\beta}}{\partial\pi^\alpha}\right)\omega^\gamma\omega^\beta+\tilde{g}_{\gamma\nu}\gamma^\nu_{\alpha\beta}\omega^\gamma\omega^\beta$$

$$+\left(\frac{\partial\tilde{a}_\alpha}{\partial\pi^\gamma}-\frac{\partial\tilde{a}_\gamma}{\partial\pi^\alpha}+\frac{\tilde{\partial}\ \tilde{g}_{\alpha\gamma}}{\partial t}\right)\omega^\gamma+\tilde{a}_\beta\gamma^\beta_{\gamma\alpha}\omega^\gamma+\tilde{g}_{\gamma\beta}\gamma^\beta_\alpha\omega^\gamma$$

$$+\left(\frac{\tilde{\partial}\ \tilde{a}_\alpha}{\partial t}-\frac{1}{2}\ \frac{\partial\tilde{A}}{\partial\pi^\alpha}\right)+\tilde{a}_\beta\gamma^\beta_\alpha=\tilde{Q}_\alpha+\tilde{R}_\alpha \qquad (6.4.88)$$

亦即

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}\dot{\omega}^\beta+(\Gamma_{\beta\gamma,\alpha}+\tilde{g}_{\gamma\nu}\gamma^\nu_{\alpha\beta})\omega^\gamma\omega^\beta+2\Lambda_{\beta,\alpha}\omega^\beta$$
$$+\Lambda_\alpha=\tilde{Q}_\alpha+\tilde{R}_\alpha$$

显然，上式与式（6.4.86）一致。 ‖

由于命题 7 的存在，方程（6.4.81）～(6.4.86）可称为张量型的 Boltzmann-Hamel方程；而式（6.4.87）可称为动能型的 Boltzmann-Hamel 方程。

对于理想非完整系统，设约束方程为

$$\psi^\varepsilon_i\dot{q}^i+\psi^\varepsilon=0, \qquad (i=1,\cdots,n;\varepsilon=g+1,\cdots,n) \qquad (6.4.89)$$

我们如下选取准速度

$$\omega^\alpha=\varphi^\alpha_k\dot{q}^k+\varphi^\alpha,\ (\alpha=1,\cdots,g;k=1,\cdots,n)$$
$$\omega^\varepsilon=\psi^\varepsilon_i\dot{q}^i+\psi^\varepsilon=0, \qquad (6.4.90)$$

则由于约束是理想的，而有 $\tilde{R}_\sigma\mathrm{d}\pi^\sigma=0$，$\sigma=1,\cdots,n$，因 $\mathrm{d}\pi^\varepsilon=0$，$\varepsilon=g+1,\cdots,n$，故 $\tilde{R}_\tau\mathrm{d}\pi^\tau=0$，$\tau=1,\cdots,g$。由于 $\mathrm{d}\pi^\tau$ 的相互独立性，可推出约束反力 $\tilde{R}_\tau=0$。此时，方程（6.4.86）中的求和指标 β、$\gamma=1,\cdots,g$ 即可。特别地

$$\tilde{g}_{\sigma\tau}\dot{\omega}^\sigma+(\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma,\tau}+\tilde{g}_{\alpha\beta}\gamma^\alpha_{\tau\gamma})\omega^\gamma\omega^\beta+2\Lambda_{\beta,\tau}\omega^\beta+\Lambda_\tau=\tilde{Q}_\tau,$$
$$(\sigma、\beta、\gamma、\tau=1,\cdots,g) \qquad (6.4.91)$$

6.4.4 应用

例 1 均匀重球在转动球上的运动。

我们讨论小球在以常角速度 Ω 绕铅垂直径转动的球上的运动，这个问题在研究具有球形的各种仪器零件、潜水艇的运动和宇宙飞船的镇定装置中具有实际意义。

取确定小球位置的 α 角和 β 角以及 Euler 角 ψ、θ、φ 为广义坐标，即

$$q^1=\alpha,\ q^2=\beta,\ q^3=\theta,\ q^4=\varphi,\ q^5=\psi \qquad (a)$$

小球沿球面无滑动滚动的条件可归结为两个独立的约束方程

$$-\gamma\dot{\alpha}\sin\beta\sin\alpha+\gamma\dot{\beta}\cos\beta\cos\alpha+a\omega_y\cos\beta-a\omega_z\sin\beta\sin\alpha$$
$$+\Omega R\sin\alpha\sin\beta=0$$
$$\gamma\dot{\alpha}\sin\beta\cos\alpha+\gamma\dot{\beta}\cos\beta\sin\alpha-a\omega_x\cos\beta+a\omega_z\sin\beta\cos\alpha$$
$$-\Omega R\sin\beta\cos\alpha=0$$

式中 R 为大球的半径；a 为小球的半径，$\gamma=R-a$；ω_x、ω_y、ω_z 为小球角速度在固定坐标系 $Oxyz$ 各轴上的投影。

依式（6.4.90）取准速度

$$\omega^1=\omega_x=\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$$
$$\omega^2=\omega_y=\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$$
$$\omega^3=\omega_z=\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta$$

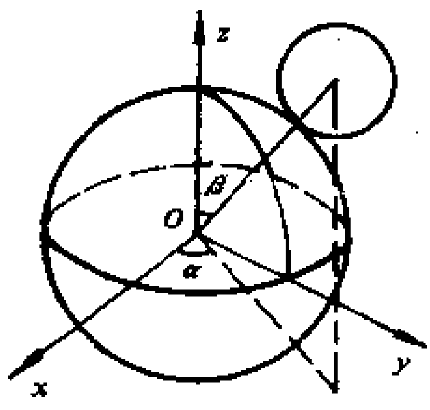


图 6.1

$$\omega^4 = -r\dot{\alpha}\sin\beta\sin\alpha + r\dot{\beta}\cos\beta\cos\alpha + a\omega_y\cos\beta$$
$$-a\omega_z\sin\beta\sin\alpha + \Omega R\sin\alpha\sin\beta = 0$$
$$\omega^5 = r\dot{\alpha}\sin\beta\cos\alpha + r\dot{\beta}\cos\beta\sin\alpha - a\omega_x\cos\beta$$
$$+a\omega_z\sin\beta\cos\alpha - \Omega R\sin\beta\cos\alpha = 0$$

（ b ）

系数矩阵（φ_k^r）即为（以S表示sin，C表示cos）

$$(\varphi_k^r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -rS_\alpha S_\beta & rC_\beta C_\alpha & aS_\psi C_\beta & -aS_\beta S_\alpha C_\theta - aS_\theta C_\psi C_\beta & -aS_\beta S_\alpha \\ rS_\beta C_\alpha & rC_\beta S_\alpha & -aC_\beta C_\psi & aS_\beta C_\alpha C_\theta - aC_\beta S_\psi S_\theta & aS_\beta C_\alpha \end{bmatrix}$$

式中下角α、β、ψ、θ表示函数S（即sin）和C（即cos）的自变量，如S_α表示$\sin\alpha$。

由式（b）解出$\dot{\alpha}$、$\dot{\beta}$、$\dot{\theta}$、$\dot{\varphi}$、$\dot{\psi}$为

$$\dot{\alpha} = \omega^1\frac{a}{r}\mathrm{ctg}\beta\cos\alpha + \omega^2\frac{a}{r}\mathrm{ctg}\beta\sin\alpha - \omega^3\frac{a}{r} - \frac{\omega^4}{r}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$
$$+\omega^5\frac{\cos\alpha}{r\sin\beta}$$

$$\dot{\beta} = \omega^1\frac{a}{r}\sin\alpha - \omega^2\frac{a}{r}\cos\alpha + \frac{\omega^4}{r}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} + \frac{\omega^5}{r}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$$

$$\dot{\theta} = \omega^1\cos\psi + \omega^2\sin\psi$$

$$\dot{\varphi} = \omega^1\frac{\sin\psi}{\sin\theta} - \omega^2\frac{\cos\psi}{\sin\theta}$$

$$\dot{\psi} = -\omega^1\sin\psi\,\mathrm{ctg}\theta + \omega^2\cos\psi\,\mathrm{ctg}\theta + \omega^3$$

（ c ）

根据式（c）可以写出系数矩阵（以S表示sin，C表示cos，T′表示ctg）

$$
[\tilde{\varphi}_a^l]=\begin{bmatrix}
\frac{a}{r}T'_\beta C_\alpha & \frac{a}{r}T'_\beta S_\alpha & -\frac{a}{r} & -\frac{S_\alpha}{rS_\beta} & \frac{C_\alpha}{rS_\beta} \\
\frac{a}{r}S_\alpha & -\frac{a}{r}C_\alpha & 0 & \frac{C_\alpha}{rC_\beta} & \frac{S_\alpha}{rC_\beta} \\
C_\psi & S_\psi & 0 & 0 & 0 \\
\frac{S_\psi}{S_\theta} & -\frac{C_\psi}{S_\theta} & 0 & 0 & 0 \\
-S_\psi T'_\theta & C_\psi T'_\theta & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

式中 T^t 表示 ctg，S、C 及下角的意义同前。

小球动能的广义速度表示式为（设小球质量 $m=1$）

$$
T=\frac{1}{2}(r^2\dot{\beta}^2+r^2\dot{\alpha}^2\sin^2\beta)+\frac{1}{2}k^2(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2) \qquad (d)
$$

将式（c）代入上式，得小球动能的准速度表示

$$
\begin{aligned}
T^*=&\frac{1}{2}\{(\omega^1)^2(a^2\sin^2\alpha+a^2\cos^2\alpha\cos^2\beta+k^2)+(\omega^2)^2(a^2\cos^2\alpha \\
&+a^2\cos^2\beta\sin^2\alpha+k^2)+(\omega^3)^2(a^2\sin^2\beta+k^2)+(\omega^4)^2 \\
&\times\left(\sin^2\alpha+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}\right)+(\omega^5)^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}+\cos^2\alpha\right)+2\omega^1\omega^2 \\
&\times(-a^2\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta)+2\omega^1\omega^3(-a^2\cos\alpha\cos\beta\sin\beta) \\
&+2\omega^1\omega^4\left(a\frac{\cos\alpha\sin\alpha\sin^2\beta}{\cos\beta}\right)+2\omega^1\omega^5 \\
&\times\left(a^2\cos^2\alpha\cos\beta+a\frac{\sin^2\alpha}{\cos\beta}\right)+2\omega^2\omega^5 \\
&\times\left(-a\frac{\sin^2\beta\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\beta}\right)+2\omega^2\omega^4\left(-a\cos\beta\sin^2\alpha\right. \\
&\left.-a\frac{\cos^2\alpha}{\cos\beta}\right)+2\omega^2\omega^3(-a^2\cos\beta\sin\beta\sin\alpha) \\
&+2\omega^3\omega^4a\sin\alpha\sin\beta-2\omega^3\omega^5a\sin\beta\cos\alpha \\
&-2\omega^4\omega^5\sin\alpha\cos\alpha+2\omega^1a\Omega R\cos\alpha\cos\beta\sin\beta \\
&+2\omega^2\Omega Ra\cos\beta\sin\alpha\sin\beta-2\omega^3a\Omega R\sin^2\beta
\end{aligned}
$$

$$-2\omega^4\Omega R\sin\alpha\sin\beta+2\omega^5\Omega R\cos\alpha\sin\beta+\Omega^2R^2\sin^2\beta\}$$

$$(e)$$

我们用式(6.4.91)来建立小球的运动方程。首先计算 Christoffel 记号$\tilde{\Gamma}_{\sigma\tau,\nu}$、$\tilde{\Gamma}_{\sigma,\tau}$、$\tilde{\Gamma}_{\sigma}$，它们分别按下式进行

$$\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma,\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial\pi^\gamma}+\frac{\partial\tilde{g}_{\gamma\alpha}}{\partial\pi^\beta}-\frac{\partial\tilde{g}_{\beta\gamma}}{\partial\pi^\alpha}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial q^i}\tilde{\varphi}^i_\gamma+\frac{\partial\tilde{g}_{\gamma\alpha}}{\partial q^i}\tilde{\varphi}^i_\beta-\frac{\partial\tilde{g}_{\beta\gamma}}{\partial q^i}\tilde{\varphi}^i_\alpha\right)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\beta,\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{a}_\alpha}{\partial\pi^\beta}-\frac{\partial\tilde{a}_\beta}{\partial\pi^\alpha}+\frac{\tilde{\partial}\tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial t}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{a}_\alpha}{\partial q^i}\tilde{\varphi}^i_\beta-\frac{\partial\tilde{a}_\beta}{\partial q^i}\tilde{\varphi}^i_\alpha+\frac{\partial\tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial q^i}\tilde{\varphi}^i+\frac{\partial\tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial t}\right)$$

$$\tilde{\Gamma}_\alpha=\frac{1}{2}\left(2\frac{\tilde{\partial}\tilde{a}_\alpha}{\partial t}-\frac{\partial\tilde{A}}{\partial\pi^\alpha}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial\tilde{a}_\alpha}{\partial q^i}\tilde{\varphi}^i+2\frac{\partial\tilde{a}_\alpha}{\partial t}-\frac{\partial\tilde{A}}{\partial q^i}\tilde{\varphi}^i_\alpha\right)$$

比较式（e）与（6.4.69）可以得到$\tilde{g}_{\alpha\beta}$、$\tilde{a}_\alpha$及$\tilde{A}$，将它们和$\tilde{\varphi}^i_\alpha$、$\tilde{\varphi}^i$代入上式，经计算得联系系数为

$$\tilde{\Gamma}_{11,1}=\tilde{\Gamma}_{22,2}=\tilde{\Gamma}_{33,3}=0,\ \tilde{\Gamma}_{12,1}=\tilde{\Gamma}_{21,1}=\frac{a^3}{r}\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$$

$$\tilde{\Gamma}_{13,1}=\tilde{\Gamma}_{31,1}=-\frac{a^3}{r}\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta$$

$$\tilde{\Gamma}_{22,1}=\frac{1}{2}\frac{a^3}{r}\sin\beta\cos\beta\sin\alpha$$

$$\tilde{\Gamma}_{23,1}=\tilde{\Gamma}_{32,1}=\frac{a^3}{r}(\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta)$$

$$\tilde{\Gamma}_{33,1}=-\frac{a^3}{2r}\sin\beta\cos\beta\sin\alpha$$

$$\tilde{\Gamma}_{11,2}=-\frac{a^3}{2r}\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$$

$$\tilde{\Gamma}_{12,2}=\tilde{\Gamma}_{21,2}=-\frac{a^3}{\gamma}\sin\beta\cos\beta\sin\alpha$$

$$\tilde{\Gamma}_{31,2}=\tilde{\Gamma}_{13,2}=\frac{a^3}{\gamma}(\sin^2\beta\cos^2\alpha-\cos^2\beta)$$

$$\tilde{\Gamma}_{23,2}=\tilde{\Gamma}_{32,2}=\frac{a^3}{\gamma}\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta$$

$$\tilde{\Gamma}_{33,2}=-\frac{1}{2}\frac{a^3}{\gamma}\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$$

$$\tilde{\Gamma}_{11,3}=\frac{1}{2}\frac{a^3}{\gamma}\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta$$

$$\tilde{\Gamma}_{12,3}=\tilde{\Gamma}_{21,3}=\frac{a^3}{\gamma}(\sin^2\alpha\sin^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta)$$

$$\tilde{\Gamma}_{13,3}=\tilde{\Gamma}_{31,3}=\frac{a^3}{\gamma}\sin\alpha\cos\beta\sin\beta$$

$$\tilde{\Gamma}_{22,3}=-\frac{a^3}{2\gamma}\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta$$

$$\tilde{\Gamma}_{32,3}=\tilde{\Gamma}_{23,3}=-\frac{a^3}{\gamma}\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$$

$$\tilde{\Gamma}_{1,1}=\frac{a^2R\Omega}{\gamma}\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta$$

$$\tilde{\Gamma}_{2,1}=\frac{a^2R\Omega}{\gamma}(\sin^2\alpha\sin^2\beta-\cos^2\beta)$$

$$\tilde{\Gamma}_{3,1}=\frac{a^2R\Omega}{\gamma}\sin\alpha\sin\beta\cos\beta$$

$$\tilde{\Gamma}_{1,2}=\frac{a^2R\Omega}{\gamma}(\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta)$$

$$\tilde{\Gamma}_{2,2}=-\tilde{\Gamma}_{1,1},\quad \tilde{\Gamma}_{3,2}=-\frac{2a^2R\Omega}{\gamma}\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$$

$$\widetilde{\Gamma}_{1,3}=0,\ \widetilde{\Gamma}_{2,3}=-\frac{a^2R\Omega}{\gamma}\cos\alpha\sin\beta\cos\beta,\ \widetilde{\Gamma}_{3,3}=0$$

$$\widetilde{\Gamma}_1=-\frac{aR^2\Omega^2}{\gamma}\sin\alpha\sin\beta\cos\beta$$

$$\widetilde{\Gamma}_2=\frac{aR^2\Omega^2}{\gamma}\cos\alpha\sin\beta\cos\beta,\ \widetilde{\Gamma}_3=0$$

下面再计算Ricci非完整系数。显然，$\gamma^{\alpha}_{\tau\tau}=0$。将系数（$\widetilde{\varphi}^{i}_{\alpha}$）和（$\varphi^{\alpha}_{i}$）代入式（6.4.80）中，得

$$\gamma^1_{32}=-\gamma^1_{23}=1,\ \gamma^4_{31}=-\gamma^4_{13}=-\left(a+\frac{a^2}{\gamma}\right)\cos\beta$$

$$\gamma^2_{31}=-\gamma^2_{13}=-1,\ \gamma^5_{21}=-\gamma^5_{12}=\left(a+\frac{a^2}{\gamma}\right)\sin\beta\cos\alpha$$

$$\gamma^3_{21}=-\gamma^3_{12}=1,\ \gamma^5_{32}=-\gamma^5_{23}=-\left(a+\frac{a^2}{\gamma}\right)\cos\beta$$

$$\gamma^4_{21}=-\gamma^4_{12}=-\left(a+\frac{a^2}{\gamma}\right)\sin\alpha\sin\beta$$

$$\gamma^4_{1}=\gamma^5_{2}=-\Omega R\frac{a}{\gamma}\cos\beta$$

将运动方程（6.4.91）展开，写成

$$\begin{aligned}&\tilde{g}_{\tau\beta}\dot{\omega}^{\beta}+(\widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma,\tau}+\tilde{g}_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha}_{\tau\gamma})\omega^{\gamma}\omega^{\beta}+2\widetilde{\Gamma}_{\beta,\tau}\omega^{\beta}\\&\quad+\tilde{a}_{\alpha}\gamma^{\alpha}_{\tau\beta}\omega^{\beta}+\tilde{g}_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha}_{\tau}\omega^{\beta}+\widetilde{\Gamma}_{\tau}+\tilde{a}_{\alpha}\gamma^{\alpha}_{\tau}=\widetilde{Q}_{\tau}\\&\qquad(\tau、\gamma、\beta=1,2,3;\alpha=1,\cdots,5)\end{aligned}\qquad(f)$$

广义坐标下的广义力为

$$Q_2=\gamma g\sin\beta,\ Q_1=Q_3=Q_4=Q_5=0$$

由式（6.4.86）可以求出准坐标下的广义力

$$\widetilde{Q}_1=ag\sin\alpha\sin\beta,\ \widetilde{Q}_2=-ag\cos\alpha\sin\beta,\ \widetilde{Q}_3=0$$

将上述各值代入式（f）中，整理得小球的运动方程为

$$(a^2\sin^2\alpha+a^2\cos^2\alpha\cos^2\beta+k^2)\dot{\omega}^1+a^2\dot{\omega}^2\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta$$

$$-a^2\dot{\omega}^3\cos\alpha\cos\beta\sin\beta + \frac{3a^3}{2r}[(\omega^2)^2\sin\alpha\sin\beta\cos\beta$$

$$-(\omega^3)^2\sin\alpha\sin\beta\cos\beta + 2\omega^1\omega^2\cos\alpha\sin\beta\cos\beta - 2\omega^1\omega^3\sin\alpha$$

$$\times\cos\alpha\sin^2\beta + 2\omega^2\omega^3(\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta)] + \frac{a^2\Omega R}{r}$$

$$\times[\omega^1\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta + \omega^2(2\sin^2\beta - \cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta)$$

$$-\omega^3\sin\alpha\sin\beta\cos\beta] - \frac{aR^2\Omega^2}{r}\sin\alpha\sin\beta\cos\beta = ag\sin\alpha\sin\beta$$

$$(g)$$

$$-a^2\dot{\omega}^1\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta + (a^2\cos^2\alpha + a^2\cos^2\beta\sin^2\alpha + k^2)\dot{\omega}^2$$

$$-a^2\dot{\omega}^3\cos\beta\sin\beta\sin\alpha + \frac{3a^3}{2r}[(\omega^1)^2(-\cos\alpha\sin\beta\cos\beta)$$

$$+(\omega^3)^2\cos\alpha\sin\beta\cos\beta - 2\omega^1\omega^2\sin\alpha\sin\beta\cos\beta + 2\omega^1\omega^3$$

$$\times(\sin^2\beta\cos^2\alpha - \cos^2\beta) + 2\omega^2\omega^3\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta]$$

$$+\frac{a^2R\Omega}{r}[\omega^1(\cos^2\beta - 2\sin^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta) + \omega^2(-\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\times\sin^2\beta) - 4\omega^3\cos\alpha\cos\beta\sin\beta] + \frac{aR^2\Omega^2}{r}\cos\alpha\cos\beta\sin\beta$$

$$= -ag\cos\alpha\sin\beta \qquad (h)$$

$$-a^2\dot{\omega}^1\cos\alpha\cos\beta\sin\beta - a^2\dot{\omega}^2\cos\beta\sin\beta\sin\alpha + (a^2\sin^2\beta + k^2)$$

$$\times\dot{\omega}^3 + \frac{3a^3}{2r}[(\omega^1)^2\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta - (\omega^2)^2\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta$$

$$+2\omega^1\omega^2(\sin^2\alpha\sin^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta) + 2\omega^1\omega^3\sin\alpha$$

$$\times\sin\beta\cos\beta + 2\omega^2\cos\alpha\sin\beta\cos\beta] = 0 \qquad (i)$$

从形式上看，张量型的Boltzmann-Hamel方程（6.4.91)比动能型的方程（6.4.87)复杂得多，但真正算起来方程(6.4.91)要比方程（6.4.87）方便一些。‖

§6.5 历 史 资 料

6.5.1 名家介绍

J. Synge (1897～) 英国数学家、物理学家。在数学、力学，特别是在广义相对论和场论等方面发表许多论文并出版多种专著，如《动力学中的张量方法》(1936)，《力学的变分原理》(1959)，《经典动力学》(1960)等。

Z. Horák (1898～) 捷克物理学家，主要工作在力学、非完整系统、Hamilton 原理等方面，主要论文有《关于流形概念的推广》(1927)，《绝对力学及其位形时空中的表达》(1934)等。他是非完整几何的奠基人之一。

G. Vranceanu (1900～) 罗马尼亚数学家、物理学家，在 1926～1936 年间发表许多有关非完整几何方面的论文，如《非完整流形的绝对微分学》(1926)，"非完整系统的运动方程"(1926)，"非完整空间的研究"(1934)等。他是非完整几何的奠基人之一。

В. В. Добронавов (1901～) 苏联力学家。莫斯科包曼工学院理论力学教授。从 1939 年起致力于非完整动力学研究。在分析力学的运动方程、张量方法、积分理论等方面发表了一系列论文，主要著作有《非完整系统力学基础》(1970)，《分析力学基础》(1976)等。

6.5.2 关于分析力学的张量方法

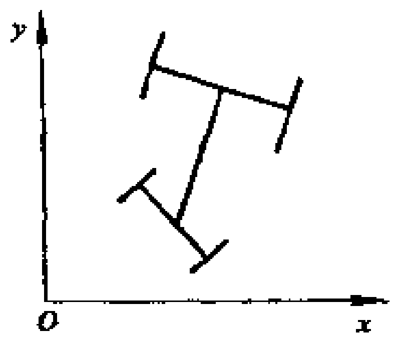
由于张量方法对非完整力学的应用而产生了几何学的一个新领域——非完整几何。在此领域中，本世纪 20 年代至 50 年代的工作是奠基性的，其中 Vranceanu, Horák, Synge, Вагнер, Wundheiler 等人的工作都很有名。这些工作包括将三维欧氏空

间中力学系统的运动当作多维 Riemann 空间中的质点运动来研究。

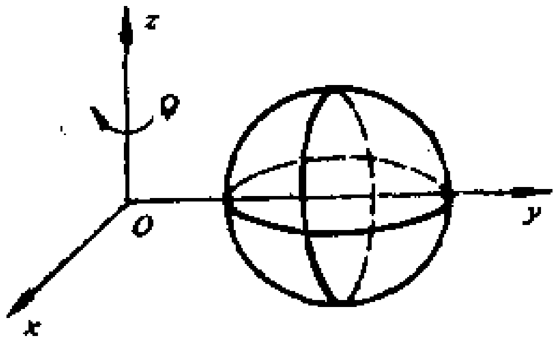
习 题

1 试描述质量为 m，半径为 a 的圆环在绝对粗糙的水平面上的滚动。

2 试建立四轮小车的运动微分方程。



题 2 图



题 3 图

3 如图所示，xOy 平面为水平面且以角速度 Ω 绕 Oz 轴转动。试描述匀质圆球在 xOy 面上的纯滚动。

4 试用张量的方法建立非定常系统的 Appell 方程（参考§6.3中定常系统 Appell 方程的推导）。

5 试证明式(6.4.16) 的成立。

6 试用 Hamilton 原理（6.4.25）推导方程(6.4.55)。

参考文献

〔1〕 郭仲衡.张量（理论和应用）.北京：科学出版社，1988.

〔2〕 黄克智等.张量分析.北京：清华大学出版社，1986.

〔3〕 梅凤翔.非完整系统力学基础.北京：北京工业学院出版社，1985.

〔4〕 Добронравов В В. Основы механики неголономных систем. М.:Высшая Школа, 1970.

〔5〕 段成尧.力学微分原理的 Riemann 型及动力学方程.力学与实践，1988.

〔6〕 Appell P. Traité de mécanique rationnelle, T. Ⅱ. Paris: Gauthier-Villars. 1953.
〔7〕 陈滨. 分析动力学. 北京：北京大学出版社，1987.
〔8〕 梅凤翔. 非完整动力学研究. 北京：北京工业学院出版社，1987.

第七章　分析力学的外微分描述

荷兰著名力学家 Koiter 说得好："为使力学得到进一步的发展，我们一定要逐步应用更加抽象和更加精密的数学"。根据几何思想建立起来的方法能为描述自然现象提供一套崭新、奇妙而又统一的工具。近代分析力学的代表作之一，法国学者Godbillon的著作就叫《微分几何和分析力学》(Géometrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, Paris, 1969)，可见分析力学与微分几何，特别是近代微分几何有着极为密切的联系。

任何力学现象都是在空间中发生的。经典力学的传统作法是选用欧氏空间，即在欧氏空间中建立力学系统的数学模型，并通过这个数学模型来达到研究力学系统的目的。如果要求力学系统的许多基本性质用与坐标选取无关的形式来表达，那么，我们就可以更清楚地理解这些性质。显然，力学系统在欧氏空间中建立的传统数学模型不满足这一要求。此外，随着科学技术的发展，人们的研究表明，力学系统的位形空间或相空间并不一定是欧氏空间而必是微分流形。正是由于以上两个方面的原因，Poincaré提出，用微分流形取代欧氏空间作为力学系统的相空间。这样，Lagrange 力学，Hamilton 力学以及非完整力学都可以用近代微分几何的语言来表达。Lagrange 方程用微分形式可以很简洁，很优美地建立起来。同样，没有微分形式就不能说明 Hamilton 力学。

在这一章里，我们介绍可微流形，外微分，Hamilton 力学的几何描述，Lagrange 力学的几何描述，以及非完整力学系统的微分几何理论等。

§7.1 可微流形

本节讨论拓扑空间，微分流形，切空间，子流形等概念，所有命题都没有给出证明，证明可参看有关专著[1~5]。

7.1.1 拓扑空间

1 拓扑空间

拓扑学的思想是要给出邻近性和连续性这些非常直观的概念的含义。

定义 1 如果$\mathscr{T}=\{U_i | i\in I\}$是非空集合$M$的一个子集族，满足下述公理

（1）空集$\phi\in\mathscr{T}$，$M\in\mathscr{T}$；

（2）$\mathscr{T}$中任意有限个集合的交属于$\mathscr{T}$；

（3）$\mathscr{T}$中任意多个集合的并属于$\mathscr{T}$，

则称M是具有拓扑结构$\mathscr{T}$的拓扑空间，记作（M，$\mathscr{T}$），$\mathscr{T}$的元素称为M的开集。

设$x\in U\subset M$是拓扑空间M中的一点，U是开集，若V是M的一个包含U的子集，则称V是点x的一个邻域。

例 1 取$\mathscr{T}=\{M,\ \phi\}$，则$\mathscr{T}$满足定义 1 中的三条公理，构成一个拓扑，称之为M的平凡拓扑。

例 2 取$\mathscr{T}=\{M$的所有子集$\}$，$\mathscr{T}$满足定义 1 中的三条公理，构成一个拓扑，称之为离散拓扑。

例 3 设M'是拓扑空间（M，$\mathscr{T}$）的一个非空子集。如果取

$$\mathscr{T}'=\{U_i\cap M' | U_i\in\mathscr{T},\ i\in I\} \tag{7.1.1}$$

即M'中的开集定义为M中开集与M'的交，则$\mathscr{T}'$满足定义 1 中的三条公理，这是因为

（1）$\phi=\phi\cap M'\in\mathscr{T}'$，$M'=M\cap M'\in\mathscr{T}'$；

（2）设$U_\alpha \in \mathscr{T}$，$\alpha \in J_1$，J_1为某一有限指标集，则

$$\bigcap_\alpha (U_\alpha \cap M') = \bigcap_\alpha (U_\alpha) \cap M' \in \mathscr{T}' \qquad (7.1.2)$$

（3）设$U_\beta \in \mathscr{T}$，$\beta \in J_2$，J_2为某一有限指标集，则

$$\bigcup_\beta (U_\beta \cap M') = (\bigcup_\beta U_\beta) \cap M' \in \mathscr{T}' \qquad (7.1.3)$$

故$\mathscr{T}'$定义M'中的一个拓扑，称之为相对拓扑，亦称为诱导拓扑。 ‖

定义 2 设$(M, \mathscr{T})$是拓扑空间，$\mathscr{B} \in \mathscr{T}$是$M$的一个集族，当且仅当$M$中的任何一个开集都是$\mathscr{B}$中元素的并，或对任一属于开集$U \in \mathscr{T}$的点$x$都存在$B \in \mathscr{B}$，使得$x \in B \subset U$，则称$\mathscr{B}$是$\mathscr{T}$的一个基。

如果拓扑$\mathscr{T}$的基$\mathscr{B}$是可数的，即$\mathscr{B}$中至多包含可列个集合，则称拓扑空间$(M, \mathscr{T})$满足第二可数基公理。$(M, \mathscr{T})$称为第二可数的。如果对拓扑空间$(M, \mathscr{T})$中任意不同的两点x_1，x_2，存在$U_1 \in \mathscr{T}$，$U_2 \in \mathscr{T}$，使得$x_1 \in U_1$，$x_2 \in U_2$，且$U_1 \cap U_2 = \phi$，则称$(M, \mathscr{T})$为Hausdorff空间。

2．连续映射，同胚

定义 3 设$(M_i, \mathscr{T}_i)$，$i=1, 2$，是两个拓扑空间，当且仅当对$f(x) \in M_2$的任一邻域V都存在x的一个邻域U，使得$f(U) \subset V$，我们称映射$f: M_1 \to M_2$在点$x \in M_1$是连续的。

如果对任何$x \in M_1$，f都连续，则称f在M_1上连续。

在定义3中，若$M_2 = \boldsymbol{R}$，则映射f成为定义在$(M_1, \mathscr{T}_1)$上的一个函数。高等数学中经常用到的函数$y = f(x_1, \cdots, x_n)$的连续性定义就是定义3的一个特例。

命题 1 设$(M_i, \mathscr{T}_i)$，$i=1,2$，是两个拓扑空间，$f: M_1 \to M_2$是一个映射，若$V \subset M_2$且其原像记作$f^{-1}(V) = \{x \in M_1 | f(x) \in V\}$，则下述条件等价

（1）f是连续的；

（2）V_1在M_2中是开的，则$f^{-1}(V_1)$在M_1中是开的；

（3）V_2在M_2中是闭的，则$f^{-1}(V_2)$在M_1中是闭的。

定义 4 设（M_i，$\mathscr{T}_i$），$i=1,2$，是两个拓扑空间，如果存在对射$f:M_1\to M_2$，使得f和f^{-1}都是连续的，则称两个拓扑空间是同胚的。这时f叫作一个同胚。

7.1.2 微分流形

1 拓扑流形

在拓扑空间中，由于拓扑结构的存在，可以讨论映射的连续性问题，但一般不能论及映射可微与否。因此，如果我们打算用分析的方法来研究几何问题，则研究的对象是空间，并且在这种空间上进行微分和积分运算是有意义的。这就是说，所研究的空间不仅应具备拓扑结构，还应具备一种支持微分运算的特殊结构，使得我们在这样的一个结构上能够定义可微映射，张量，微分形式等，这就是微分流形的基本思想。

我们知道，对$\boldsymbol{R}^m$上的函数可以讨论其可微性，而$\boldsymbol{R}^m$上函数可微性定义只涉及$\boldsymbol{R}^m$中每个点附近的欧氏空间结构。因此，那些局部如同$\boldsymbol{R}^m$的，亦即每个点处都有一个邻域同胚于$\boldsymbol{R}^m$中某个开子集的拓扑空间，有可能具备所要求的那种特殊结构。因为在这种空间的每个点附近，总可以通过同胚把定义在它上面的函数局部地表成$\boldsymbol{R}^m$中某个开子集上的函数。

为方便起见，在以后的叙述中，将拓扑空间（M，$\mathscr{T}$）简记作M。

定义 5 设M是一个第二可数的Hausdorff空间，若对M中的每一点均有一个同胚于m维欧氏空间$\boldsymbol{R}^m$开集的一个邻域，则称M为m维拓扑流形。

拓扑流形最简单的例子就是$\boldsymbol{R}^m$本身。m维拓扑流形的任一非空开子集也是一个m维拓扑流形。

2. 图和图册

定义 6 设M是一个m维拓扑流形，U是M的一个开子

集，$\varphi:U\subset M\to\varphi(U)\subset\boldsymbol{R}^m$ 是一个同胚，则称 $c=(U,\varphi)$ 是 M 上的一张图（或一个局部坐标系）。

对任意 $x\in U$，称 (U,φ) 为含 x 的图（或含 x 的局部坐标系）。对任一点 $y\in U$，$\varphi(y)=(u^1(y),\cdots,u^m(y))\in\boldsymbol{R}^m$ 的坐标称为 y 关于图 (U,φ) 的局部坐标。若记 $u^i:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}$ 为 $\boldsymbol{R}^m$ 上的第 i 个坐标函数，即 u^i 把 R^m 的每个点映射为它的第 i 个坐标，$i=1,\cdots,m$，由对应 $y\mapsto u^i(y)$ 定义 U 上的一个函数

$$x^i=u^i\circ\varphi:U\to R:y\mapsto u^i(y),\qquad(i=1,\cdots,m)$$

x^i 称为图 (U,φ) 的第 i 个坐标函数，通常称 $(x^1,\cdots,x^m)$ 为 U 上的一个局部坐标系。

对于拓扑流形 M，总可以把函数 $f:M\to\boldsymbol{R}$ 在每张图 (U,φ) 上局部地表示为 $\boldsymbol{R}^m$ 开子集上的函数 $f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\subset\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}$。我们希望能够把函数 $f:M\to\boldsymbol{R}$ 在任一点 $x\in U$ 的可微性定义为函数 $f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\boldsymbol{R}$ 在点 $\varphi(x)\in\varphi(U)$ 的可微性。但是，这在具备局部欧化结构和拓扑结构的拓扑流形上是不可能的，因为存在下面所提及的困难。

设 (U_1,φ_1) 和 (U_2,φ_2) 是 M 上含点 x 的两张图，则函数 f 在 $U_1\cap U_2$ 上就有两个局部表示

$$f\circ\varphi_1^{-1}:\varphi_1(U_1\cap U_2)\subset\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}\qquad(7.1.4)$$

$$f\circ\varphi_2^{-1}:\varphi_2(U_1\cap U_2)\subset\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}\qquad(7.1.5)$$

这时就可能出现 $f\circ\varphi_1^{-1}$ 在 $\varphi_1(x)$ 的可微性与 $f\circ\varphi_2^{-1}$ 在 $\varphi_2(x)$ 的可微性的不一致，当然也就不能把 f 的可微性用它的局部表示 $f\circ\varphi^{-1}$ 的可微性来定义。为解决上述困难，必须引进图的相容的概念。

定义 7 设 U_1 和 U_2 是 $\boldsymbol{R}^m$ 的两个开子集，如果对 $0\leqslant k\leqslant\infty$，映射 $f:U_1\to U_2$ 满足

（1）$f\in C^k(U_1,\boldsymbol{R}^m)$，即 f 的所有直到 k 阶的偏导数存在且连续；

（2）f 是一个双射；

（3）$f^{-1}\in C^k(U_2, \boldsymbol{R}^m)$，

则称 f 是一个C^k-微分同胚。

定义 8 设 $c_i=(U_i, \varphi_i)$，$i=1,2$，是 M 的两张图，如果它们满足

（1）$U_1\cap U_2=\Phi$；或者

（2）$U_1\cap U_2\neq\Phi$，且

$$\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}: \varphi_2(U_1\cap U_2)\subset\boldsymbol{R}^m\to\varphi_1(U_1\cap U_2)\subset\boldsymbol{R}^m \tag{7.1.6}$$

$$\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1\cap U_2)\subset\boldsymbol{R}^m\to\varphi_2(U_1\cap U_2)\subset\boldsymbol{R}^m \tag{7.1.7}$$

是C^k-微分同胚，则称 c_1 与 c_2 是 C^k-相容的。

对于任一点 $x\in M$，若 M 上所有含 x 的图 $(U_j, \varphi_j)_{j\in K}$ 彼此之间是 C^k-相容的（$k>0$），则函数 f 在点 x 的可微性，可用 f 在任何一张含 x 的图（U_j，φ_j）上的局部表示 $f\circ\varphi_j^{-1}$ 在点 $\varphi_j(x)$ 的可微性来定义，而不会出现如前所述的不一致，因为

$$f\circ\varphi_j^{-1}=(f\circ\varphi_i^{-1})\circ(\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}) \qquad \forall i,j\in K$$

定义 9 m 维拓扑流形 M 上的一个 C^k-图册 $\mathscr{U}$ 是指覆盖 M 的一族图 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in I}$：

$$\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha=M$$

并且族中的图两两都是 C^k-相容的。

定义 10 设 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{U}'$ 是 M 上的两个 C^k-图册，若满足（1）$\mathscr{U}\cup\mathscr{U}'$ 是一个 C^k-图册；（2）任意的 $c\in\mathscr{U}$ 及 $c'\in\mathscr{U}'$，c 与 c' 是 C^k-相容的，就称 $\mathscr{U}$ 与 $\mathscr{U}'$ 是 C^k-相容的。

M 上图册的 C^k-相容性是一个等价关系，这个关系定义 M 上的一个等价类。M 上每一个 C^k-相容图册等价类（$0\leqslant k\leqslant\infty$）中的所有图册的并构成 M 上的一个 C^k-极大图册 $\mathscr{A}$，即对于 M 上的任意一张图（V，φ_V），若它与属于 $\mathscr{A}$ 的每一张图是 C^k-相容的，则 $(V, \varphi_V)\in\mathscr{A}$。

3. 微分流形

定义11 所谓m维拓扑流形M上的一个C^k-微分结构是指在M上给定的一个C^k-极大图册$\mathscr{A}$. 若在M上给定一个C^k-微分结构，则拓扑流形M称为m维C^k-微分流形。

C^0-微分流形实际就是拓扑流形。显而易见，若$\mathscr{A}$是一个C^k-微分结构，则对任何正整数$s\leqslant k$，存在M上一个唯一的C^s-微分结构$\mathscr{A}^s$，使得$\mathscr{A}\subset\mathscr{A}^s$，即$k$越大结构越小。

C^∞-微分流形称为光滑流形。在后面的叙述中除特别指出外，所涉及的都是光滑流形。光滑流形又称为微分流形。m维微分流形M记作M^m。

微分流形M^m具有以下性质[1]：

（1）M^m是Hausdorff空间；

（2）M^m具有局部欧氏空间的性质；

（3）M^m是局部紧的，因而也是仿紧的；

（4）M^m的任一开子集U也是一个微分流形，它具有微分结构

$$\mathscr{A}_U=\{(U_\alpha\cap U,\varphi_\alpha|_{U_\alpha\cap U})\mid(U_\alpha,\varphi_\alpha)_{\alpha\in I}\in\mathscr{A}_M\}$$

（5）设N^n是一个微分流形，$(V_\beta,\ \psi_\beta)_{\beta\in J}$是其微分结构，则$M\times N$是一个$m+n$维的微分流形，且具有微分结构

$$(U_\alpha\times V_\beta,\ \varphi_\alpha\times\psi_\beta)_{\alpha\in I,\beta\in J} \tag{7.1.8}$$

其中$\varphi_\alpha\times\psi_\beta$定义如下

$$\varphi_\alpha\times\psi_\beta:U_\alpha\times V_\beta\to\varphi_\alpha(U_\alpha)\times\psi_\beta(V_\beta)\subset\boldsymbol{R}^m\times\boldsymbol{R}^n \tag{7.1.9}$$

例4 $\boldsymbol{R}^n$是n维微分流形。

取光滑图册（$\boldsymbol{R}^n$，id），这个图册仅包含一张图，它是$\boldsymbol{R}^n$的一个微分结构，称为$\boldsymbol{R}^n$上的标准微分结构。 ‖

例5 一维单位球面

$$S^1=\{(x^1,x^2)\in\boldsymbol{R}^2\mid(x^1)^2+(x^2)^2=1\}$$

取

$$U_1=\{(x^1,x^2)\in S^1|x^1>0\},\ \varphi_1(x^1,x^2)=x^2$$
$$U_2=\{(x^1,x^2)\in S^1|x^1<0\},\ \varphi_2(x^1,x^2)=x^2$$
$$U_3=\{(x^1,x^2)\in S^1|x^2>0\},\ \varphi_3(x^1,x^2)=x^1$$
$$U_4=\{(x^1,x^2)\in S^1|x^2<0\},\ \varphi_4(x^1,x^2)=x^1$$

容易看出，$\mathscr{A}=\{(U_i,\varphi_i),\ i=1,2,3,4\}$ 是 S^1 的一个图册，且在 $\varphi_j(U_i\cap U_j)$ 和 $\varphi_i(U_i\cap U_j)$ 上，$i\neq j$，$\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}$ 和 $\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}$ 都是 C^∞ 的，因而 $\mathscr{A}$ 是 S^1 的一个微分结构，从而 S^1 是一个微分流形。 ‖

7.1.3 切空间

1. 可微映射

在微分流形中，由于微分结构的存在，可微映射的概念是有意义的。

定义12 设 M^m 和 N^n 是两个微分流形，$\Phi:M^m\to N^n$ 是一个连续映射，如果对于 $x\in M^m$，存在 M^m 上含 x 的一张图 (U,φ) 和 N^n 上的一张图 (V,ψ)，满足 $\Phi(U)\subset V$，且使映射

$$\widetilde{\Phi}=\psi\circ\Phi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\subset\boldsymbol{R}^m\to\psi(V)\subset\boldsymbol{R}^n \qquad (7.1.10)$$

在点 $\varphi(x)\in\varphi(U)\subset\boldsymbol{R}^m$ 是 C^k 的，其中 $0\leqslant k\leqslant\infty$，则称映射 Φ 在点 x 是 C^k 的。如果 Φ 在 M 上的每一点都是 C^k 的，则称 Φ 是 C^k- 映射，记作 $\Phi\in C^k(M^m,N^n)$。

C^0- 映射 $\Phi:M^m\to N^n$ 就是从 M^m 到 N^n 的连续映射；C^∞- 映射 $\Phi:M^m\to N^n$ 称为可微映射，亦称为光滑映射。M^m 上的 C^k —函数 $f:M^m\to\boldsymbol{R}$ 是 M^m 上 C^k- 映射的特例（$N^n=\boldsymbol{R}$），C_0-函数就是连续函数，C^∞- 函数称为可微函数，亦称为光滑函数。

例 6 取与定义 6 一样的记号，则坐标函数 $x^i(i=1,\cdots,m)$ 是 U 上的可微函数。 ‖

定义13 设 $\gamma:[a,b]\to N^n$，$[a,b]\subset\boldsymbol{R}$。如果对某一 $\varepsilon>0$，γ 能延拓成 C^∞- 映射 $\overline{\gamma}:(a-\varepsilon,\ b+\varepsilon)\to N^n$，且 $\forall x\in[a,b]$，$\overline{\gamma}(x)=\gamma(x)$，则称 γ 是 N^n 的一条可微曲线。如果 $[a,\ b]$ 存在

一个剖分 $a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b$，使得 γ 在每个子区间上的限制 $\gamma|_{[a_{i-1},\ a_i]}$ （$i=1,\cdots,n$）都是一条可微曲线，则称 γ 在 $[a,b]$ 上是分段可微的。

可微曲线是可微映射的一个特例。

命题 2 当且仅当对任意 $f\in C_\infty(N,\boldsymbol{R})$，由下式

$$(\Phi^*f)(x)=(f\circ\Phi)(x),\quad \forall x\in M \qquad (7.1.11)$$

所定义的函数 $\Phi^*f:M^m\to\boldsymbol{R}$ 是 C^∞ 的，则映射 $\Phi:M^m\to N^n$ 是可微的。特别地，恒同映射 $id:M^m\to M^m$ 是可微映射。

由式（7.1.11）定义的映射

$$\Phi^*:C^\infty(N^n,\ \boldsymbol{R})\to C^\infty(M^m,\boldsymbol{R}) \qquad (7.1.12)$$

称为映射 $\Phi:M^m\to N^n$ 的对偶映射。

命题 3 设 M^m,N^n,L^l 都是微分流形，如果映射 $\Phi:M^m\to N^n$ 和映射 $\Psi:N^n\to L^l$ 都是可微映射，则 $\Theta=\Psi\circ\Phi:M^m\to L^l$ 也是可微映射，且 $\Theta^*=\Phi^*\circ\Psi^*$。

通过连续映射，可以建立拓扑空间之间的一个等价关系；同样，通过可微映射，可以建立微分流形之间的一个等价关系。

定义14 设 M^m 和 N^n 都是微分流形，若 $\Phi:M^m\to N^n$ 是一个对射，且 Φ 和 Φ^{-1} 都是可微的，则称 Φ 是一个从 M^m 到 N^n 的微分同胚。如果微分流形 M^m 和 N^n 之间存在一个微分同胚，就称 M^m 和 N^n 是微分同胚的，记作 $M^m\simeq N^n$。

关系“$\simeq$”是微分流形之间的一个等价关系。

2. 切矢量与切空间

流形上点的切空间是通常欧氏空间中光滑曲面上点的切平面的推广，而构成切空间的切矢量则是欧氏空间中方向导数概念的一种自然推广。

设 M^m 是微分流形，$P\in M^m$ 是一固定点。将所有在点 P 的某个邻域上的 C^∞ 函数记作 C_P^∞，所有在点 P 的邻域 U 上的 C^∞-函数记作 $C_P^\infty(U)$。定义 C_P^∞ 中元素的加法和乘法如下：设 $f\in C_P^\infty(U)$，$g\in C_P^\infty(V)$，则

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad \forall x\in U\cap V \tag{7.1.13}$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x),\quad \forall x\in U\cap V \tag{7.1.14}$$

$$(kf)(x)=kf(x),\quad \forall x\in U,\ \forall k\in \boldsymbol{R} \tag{7.1.15}$$

显然，$C_P^\infty(U)\subset C_P^\infty$，$fg$ 和 $f+g$ 属于 $C_P^\infty(U\cap V)$，而 $kf\in C_P^\infty(U)$。

定义15 设 $f,g\in C_P^\infty$，如果存在 P 的一个邻域 W，使得 $f|_W=g|_W$，则称 f 与 g 在 W 上一致，记作 $f\sim g$。

关系"$\sim$"是 C_P^∞ 中的等价关系。

定义16 微分流形 M^m 在点 x 的切矢量 X_x 是指满足下列性质的一个函数 $X_x:C_x^\infty\to\boldsymbol{R}$

（1）如果 $f,g\in C_x^\infty$，且 $f\sim g$，则有

$$X_x(f)=X_x(g) \tag{7.1.16}$$

（2）对任意的 $f,g\in C_x^\infty$ 及任意的 $\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}$，有

$$X_x(\alpha f+\beta g)=\alpha X_x(f)+\beta X_x(g) \tag{7.1.17}$$

（3）对任意的 $f,g\in C_x^\infty$，有

$$X_x(fg)=Xx(f)\cdot g(x)+f(x)\cdot X_x(g) \tag{7.1.18}$$

M^m 在点 $x\in M^m$ 处的全体切矢量组成的集合记作 T_xM^m。定义 T_xM^m 中的加法和数乘如下：设 X_x，$Y_x\in T_xM^m$，$k\in\boldsymbol{R}$，对任意的 $f\in C_x^\infty$，有

$$(X_x+Y_x)(f)=X_x(f)+Y_x(f) \tag{7.1.19}$$

$$(kX_x)\ (f)=kX_x(f) \tag{7.1.20}$$

显然，X_x+Y_x 和 kX_x 仍属于 T_xM^m，因而 T_xM^m 在上述运算下成为一个矢量空间，称之为切空间，仍记作 T_xM^m。

对任意 $x\in M^m$，取含 x 的一张图（U，φ），如果它的坐标函数为（$x^1,\cdots,x^m$），我们定义

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x:C_x^\infty\to\boldsymbol{R}\ \text{如下}\quad(i=1,\cdots,m)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x(f)=\left.\frac{\partial(f)}{\partial x^i}\right|_x=\left.\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u^i}\right|_{\varphi(x)}$$

$$\forall f \in C_x^\infty \tag{7.1.21}$$

其中 u^i 由定义 6 确定。容易验证，$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$ 是 M^m 在 x 处的切矢量。

命题 4 $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^m}\right|_x\right\}$ 是切空间 T_xM^m 的一个基，即对任意 $X_x \in T_xM^m$，有唯一表示

$$X_x = \sum a^i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x = \sum X_x(x^i) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \tag{7.1.22}$$

如果 $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1}\right|_x, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^m}\right|_x\right\}$ 是 T_xM^m 的另一个基，则有

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x = \sum \left.\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\right|_x \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\right|_x \tag{7.1.22 a}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\right|_x = \sum \left.\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\right|_x \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x \tag{7.1.22 b}$$

由命题 4 知，微分流形 M^m 在点 $x \in M^m$ 的切空间的维数也是 m。由式（7.1.21）可以看出，切矢量对函数的作用如同欧氏空间中求函数的方向导数。设 f 是定义在 $\boldsymbol{R}^m$ 上的函数，则 f 沿方向 $\boldsymbol{a}=(a^1, \cdots, a^m)$ 的导数为

$$\boldsymbol{a}(f) = \sum a^i \frac{\partial f}{\partial u^i} = \sum a^i \frac{\partial}{\partial u^i}(f) \tag{7.1.23}$$

因此，$X_x(f)$ 又称为函数 $f: M^m \to \boldsymbol{R}$ 在点 $x \in M^m$ 沿切矢量 X_x 的方向导数。

定义 17 设 $x \in M^m$，在 x 取一切矢量 X_x，令 x 与 X_x 对应，映射

$$X: x \mapsto X_x \tag{7.1.24}$$

称为 M^m 上的一个矢量场。相对于坐标函数 $(x^1, \cdots, x^m)$，X_x 可唯一地表成

$$X_x = \sum X_x(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x = \sum a^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x \qquad (7.1.25)$$

函数 $a^i(x)$ 称为相对于给定坐标系的分量。如果它们是 C^∞ 的，则称 X 是 C^∞-矢量场。M^m 上所有 C^∞-矢量场的集合记作 $\mathscr{X}(M^m)$。对于 $X\in\mathscr{X}(M^m)$ 和 $f\in C^\infty(M^m,\boldsymbol{R})$，函数 $X(f)$ 如下定义

$$X(f)(x) = X_x f,\quad \forall x\in M^m \qquad (7.1.26)$$

3．可微映射的微分

设 M^m 和 N^n 是微分流形，$\Phi: M^m\to N^n$ 是一个可微映射，$x\in M^m$，$X_x\in T_xM^m$，则由 Φ 诱导出一个线性映射

$$d\Phi(x) = \Phi_{*x}: T_xM^m\to T_{\Phi(x)}N^n: x_x \mapsto d\Phi(x)X_x = \Phi_{*x}X_x \qquad (7.1.27)$$

其中 Φ_{*x} 有如下定义：对任一 $f\in C^\infty(N^n,\boldsymbol{R})$

$$d\Phi(x)X_x(f) = \Phi_{*x}X_x(f) = X_x(f\circ\Phi) = X_x(\Phi^* f) \qquad (7.1.28)$$

定义18 映射 $\Phi_{*x} = d\Phi(x)$ 称为映射 Φ 在 $x\in M^m$ 的微分。

命题5 设 M^m，N^n，L^l 是微分流形，$x\in M^m$，则

（1）恒同映射 $id: M^m\to M^m$ 在 x 的微分是恒同映射 $id_{*x}: T_xM^m\to T_xM^m$；

（2）若映射 $\Phi_1: M^m\to N^n$ 和 $\Phi_2: N^n\to L^l$ 是可微映射，则映射 $\Phi_3 = \Phi_2\circ\Phi_1: M^m\to L^l$ 在 x 的微分是

$$(\Phi_3)_{*x} = (\Phi_2)_{*\Phi_1(x)}\circ(\Phi_1)_{*x} \qquad (7.1.29)$$

下面来求 Φ_{*x} 的局部坐标表示。

设 (U,φ) 是 $x\in M^m$ 的一张图，(V,ψ) 是 $\Phi(x)\in N^n$ 的一张图，且局部坐标函数为 $(x^1,\cdots,x^m)$ 和 $(y^1,\cdots,y^n)$，则对任意的 $X_x\in T_xM^m$，有

$$\Phi_{*x}(X_x) = \sum X_x(y^j\circ\Phi)\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_{\Phi(x)} \qquad (7.1.30)$$

取 $X_x=\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x$，则

$$\Phi_{*x}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x\right)=\sum\frac{\partial(y^j\circ\Phi)}{\partial x^i}\bigg|_x\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_{\Phi(x)}$$

$$=\sum A_i^j(x)\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_{\Phi(x)} \tag{7.1.31}$$

其中

$$A_i^j(x)=\frac{\partial(y^j\circ\Phi)}{\partial x^i}\bigg|_x \tag{7.1.32}$$

矩阵 $(A_i^j(x))$ 称为线性映射 Φ_{*x} 关于坐标函数$(x^i,i=1,\cdots,m)$ 和 $(y^j,j=1,\cdots,n)$ 的矩阵，也叫关于图 (U,φ) 和 (V,ψ) 映射 Φ 在点 x 的 Jacobi 矩阵。显然，矩阵 (7.1.32) 与图(U,φ) 和 (V,ψ) 有关，但它的秩并不随图的选取而改变，称为映射 Φ 在点 x 的秩，记作 $rk\Phi(x)$。

例 7 在可微曲线 $\gamma:(a,b)\subset\boldsymbol{R}\to M^m$ 上的切矢量。设 $t_0\in(a,b)$，(U,φ)是含 $\gamma(t_0)\in M^m$ 的一张图，其坐标函数为$(x^1,\cdots,x^m)$。由 γ 诱导出一个映射 $\gamma_{*t0}=d\gamma(t_0):T_{t0}(a,b)\to T_{\gamma(t0)}M^m$，因 $(a,b)\subset\boldsymbol{R}$ 上在 t_0 处的切矢量为$\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0}$，由式 (7.1.30) 知，$\gamma(t)$ 上在 $\gamma(t_0)$ 处的切矢量为

$$X_{\gamma,t0}=\sum\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0}(x^i\circ\gamma)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\gamma(t_0)}$$

$$=\sum\frac{d\gamma^i}{dt}\bigg|_{t_0}\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\gamma(t_0)}$$

$$=\sum\frac{dx^i}{dt}\bigg|_{t_0}\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\gamma(t_0)} \tag{7.1.33}$$

其中

$$\gamma^i=x^i\circ\gamma=\gamma^*x^i\in C_{t0}^\infty \tag{7.1.34}$$

可以证明，对任意的 $X\in T_xM^m$，存在一条过点 x 的可微曲线

$\nu:(a,b)\subset \boldsymbol{R}\to M^m$，使得 $\nu(t)$ 在 x 的切矢量就是 X。事实上，对任一 $X=\sum a^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}\in T_xM^m$，取曲线 $\nu:(a,b)\to M^m$，满足 $\nu(t_0)=x$，且使由式（7.1.34）定义的 ν^i 为

$$\nu^i=a^it,\qquad t\in(a,b),\ i=1,\cdots,m \tag{7.1.35}$$

上式意味着映射 $\nu:(a,b)\to M^m$ 为

$$\nu:(a,b)\to M^m:t\in(a,b)\mapsto\nu(t)=\varphi^{-1}(t\boldsymbol{a}) \tag{7.1.36}$$

其中

$$\boldsymbol{a}=(a^1,\cdots,a^m)\in\boldsymbol{R}^m \tag{7.1.37}$$

由式（7.1.10）知，映射 $\tilde{\nu}=\varphi\circ\nu:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^m:t\mapsto\boldsymbol{a}t$ 是 C^∞ 的，因而 ν 是一条可微曲线。将式（7.1.35）代入式（7.1.33），得 ν 在 x 的切矢量为

$$X_{\nu,t_0}=\sum a^i\frac{\partial}{\partial x^i}=X \tag{7.1.38}$$

例 8 M^m 上的可微函数 $f:M^m\to\boldsymbol{R}$ 是可微映射 $\Phi:M^m\to N^n$ 的特殊情形（$N^n=\boldsymbol{R}$）。对于任何 $x\in M^m$，映射 f 的微分 $\mathrm{d}f(x)$ 是线性映射

$$\mathrm{d}f(x):T_xM^m\to T_{f(x)}\boldsymbol{R} \tag{7.1.39}$$

设 t 是 $\boldsymbol{R}$ 上的坐标函数，则对于任何 $X_x\in T_xM^m$，因 $T_{f(x)}\boldsymbol{R}$ 由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{f(x)}$ 生成，故有 $\lambda\in\boldsymbol{R}$，使得

$$\mathrm{d}fX_x=\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{f(x)} \tag{7.1.40}$$

由式（7.1.30），有

$$\mathrm{d}f(x)X_x=X_x(t\circ f)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{f(x)}=X_x(f)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{f(x)} \tag{7.1.41}$$

通过自然同构

$$T_f(x)\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}:\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{f(x)}\mapsto\lambda \tag{7.1.42}$$

可以将 $T_{f(x)}\boldsymbol{R}$ 与$\boldsymbol{R}$视为同一，因而

$$\mathrm{d}f(x):T_xM^m\to\boldsymbol{R}:X_x\mapsto X_x(f) \tag{7.1.43}$$

即 $\mathrm{d}f(x)$ 是切空间 T_xM^m 上的线性泛函。T_xM^m 的对偶空间记作 $T_x^*M^m$，则 $\mathrm{d}f\in T_x^*M^m$。$T_x^*M^m$ 称为 M^m 在点 x 的余切空间。‖

微分 $\mathrm{d}f(x)$ 具有如下性质：

（1）$\mathrm{d}f(x)$ 不随图的选择而变化。对任一固定的 $X_x\in T_xM^m$，$X_x(f)$ 是一固定值，不随图的选择而变化。

（2）设 $x^1,\cdots,x^m$ 是含 x 的某一图的坐标函数，对任一 f：$M^m\to\boldsymbol{R}$，$\mathrm{d}f(x)$ 为 f 在点 x 的梯度，即有

$$\mathrm{d}f(x)=\sum\frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_x\mathrm{d}x^i \tag{7.1.44}$$

因而，$\{\mathrm{d}x^1,\cdots,\mathrm{d}x^m\}$ 是 $T_x^*M^m$ 的一个与$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}\right\}$对偶的基。

（3）$\forall f,g\in C^\infty(M^m,\boldsymbol{R})$，$\forall\lambda\in\boldsymbol{R}$，有

$$\mathrm{d}(f+g)(x)=\mathrm{d}f(x)+\mathrm{d}g(x) \tag{7.1.45}$$

$$\mathrm{d}(\lambda f)(x)=\lambda\mathrm{d}f(x) \tag{7.1.46}$$

$$\mathrm{d}(fg)(x)=g(x)\mathrm{d}f(x)+f(x)\mathrm{d}g(x) \tag{7.1.47}$$

7.1.4 子流形

1. 反函数定理

在欧氏空间中，有个熟知的结论——反函数定理。

命题 6 设 W 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的一个开集，$f:W\to\boldsymbol{R}^m$ 是可微映射，$u_0\in W$。如果 f 的 Jacobi 行列式

$$\det\left(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}\right)\bigg|_{u_0}\neq 0 \tag{7.1.48}$$

则存在含 u_0 的邻域 $U\subset W$，使得 f 在 U 上的限制是一个对射，并且 $V=f(U)$ 是点 $f(u_0)$ 在 $\boldsymbol{R}^m$ 上的一个邻域，在 V 上 f 有可微逆映射

$$g=f^{-1}:V\subset \boldsymbol{R}^m\to U\subset W \qquad (7.1.49)$$

命题6说明，映射 f 在某一点的秩，决定它在这点的一个邻域上的性质。借助局部坐标系，立即可将命题6推广到微分流形。

命题7 设 M 和 N 是两个 m 维的微分流形，$\Phi:M\to N$ 是一个可微映射，则 $\forall x\in M$，$d\Phi(x):T_xM\to T_{\Phi(x)}N$ 是一个线性同构的充分必要条件是：Φ 为 x 处的局部微分同胚。

值得注意的是，命题7只是一个局部性的结果。只有当 Φ 是一个一对一的可微映射时，才能由 $d\Phi(x)$ 在 $x\in M$ 上的每一点处都是一个线性同构推出 $\Phi:M\to N$ 是一个微分同胚。否则，既使 $d\Phi(x)$ 在 M 上的每一点处是一个线性同构，也不能得出 $\Phi:M\to N$ 是一个微分同胚的结论。

2. 浸入

定义19 设 M^m 和 N^n 是两个微分流形，$\Phi:M^m\to N^n$ 是一个可微映射，$x\in M^m$。如果 $m\leqslant n$，且 $\mathrm{rk}\Phi(x)=m$，即 $d\Phi(x):T_xM^m\to T_{\Phi(x)}N^n$ 是单射，则称 Φ 在点 x 是一个浸入。如果在 M^m 上的每一点 Φ 都是一个浸入，则称 Φ 是一个浸入，(Φ,M^m) 是 N^n 的一个浸入子流形。一对一的浸入称为嵌入。如果 Φ 是嵌入，则称 (Φ,M^m) 是 N^n 的一个嵌入子流形。如果 Φ 是嵌入，$\Phi:M^m\to\Phi(M^m)\subset N^n$ 是同胚，且 $\Phi(M^m)$ 具有作为 N^n 的子空间的拓扑，则称 Φ 是一个正则嵌入，(Φ,M^m) 是 N^n 的一个 m 维正则子流形。

命题8 设 M^m 和 N^n 是微分流形，$x\in M^m$，若 $\Phi:M^m\to N^n$ 是 x 处的一个浸入，则对 M^m 含 x 的任意一张图 (U,φ)，存在 N^n 含 $\Phi(x)$ 的一张图 (V,ψ)，使得局部表示

$$\tilde{\Phi}=\psi\circ\Phi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V) \qquad (7.1.50)$$

具有形式

$$\tilde{\Phi}(u^1,\cdots,u^m)=(u^1,\cdots,u^m,0,\cdots,0) \qquad (7.1.51)$$

推论 若 $\Phi:M^m\to N^n$ 是在 $x\in M^m$ 处的浸入，则存在 M^m 含

x 的邻域 U，使得 Φ 在 U 上的限制是一对一的。

由上述可以看出，浸入是局部一对一的，而嵌入是整体一对一的，它们的区别在于像集 $\Phi(M^m)$ 是否有自交点。

由定义 19 知，(Φ,M^m) 是正则子流形$\Longrightarrow(\Phi,M^m)$ 是嵌入子流形$\Longrightarrow(\Phi,M^m)$ 是浸入子流形，但其逆推不成立。

例 9 $\Phi:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ 由下式定义

$$t\mapsto\left(2\cos\left(t-\frac{1}{2}\pi\right),\ \sin2\left(t-\frac{1}{2}\pi\right)\right) \tag{7.1.52}$$

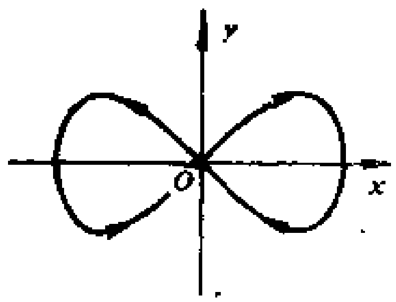


图 7.1

则 $(\Phi,\boldsymbol{R})$ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 的浸入子流形，但不是嵌入子流形。如图7.1所示。‖

由命题 8 可得出下面命题。

命题 9 $\Phi:M^m\to\Phi(M^m)\subset N^n$ 是一个 m 维正则嵌入的必要充分条件是：$\forall x\in M^m$，都有 N^n 含 $\Phi(x)$ 的图 (U,φ)，使得

(1) $\varphi(\Phi(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的原点，

即
$$\varphi(\Phi(x))=(0,\cdots,0) \tag{7.1.53}$$

(2)
$$\varphi(U\cap\Phi(M^m))=\{(u^1,\cdots,u^n)\in\varphi(U)\mid u^{m+1}=\cdots=u^n=0\} \tag{7.1.54}$$

命题10 如果 $\Phi:M^m\to\Phi(M^m)\subset N^n$ 是一个正则嵌入，则 $\Phi:M^m\to\Phi(M^m)$ 是一个微分同胚。

3. 淹没

定义20 设 M^m 和 N^n 是两个微分流形，$\Phi:M^m\to N^n$ 是可微映射，$x\in M^m$。如果 $m\geqslant n$，且 $\operatorname{rk}\Phi(x)=n$，即 $d\Phi(x):T_xM^m\to T_{\Phi(x)}N^n$ 是满射，则称 Φ 在 $x\in M^m$ 处是淹没。如果 Φ 在 M^m 上的每一点都是淹没，则称 Φ 是淹没。

例10 投影映射

$$\pi:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^n:(u^1,\cdots,u^m)\to(u^1,\cdots,u^n) \tag{7.1.55}$$

是一个淹没，称为典型淹没。‖

命题11 设M^m和N^n是微分流形，$x\in M^m$。若$\Phi: M^m \to N^n$是在x处的淹没，则对N^n含$\Phi(x)$的任一张图(V,ψ)，存在M^m含x的一张图(U,φ)，使得Φ的局部表示

$$\tilde{\Phi}=\psi\circ\Phi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V) \tag{7.1.56}$$

具有形式

$$\tilde{\Phi}(u^1,\cdots,u^m)=(u^1,\cdots,u^n) \tag{7.1.57}$$

定义21 设$\Phi: M^m\to N^n$是可微映射，$x\in M^m$。

（1）若$\mathrm{rk}\Phi(x)<n$，则x称为Φ的一个临界点；否则，称为Φ的正则点；

（2）设$y\in N^n$，如果$y\notin\Phi(M^m)$或当$y\in\Phi(M^m)$时，每个$x'\in\Phi^{-1}(y)$都是Φ的正则点，则称y是Φ的正则值；否则，称为Φ的临界值。

在欧氏空间中，常常要研究可微函数的零点集，即下述方程组

$$f^1(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n)=0,\cdots,f^n(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n)=0 \tag{7.1.58}$$

在什么条件下可以表示为$y^i=g^i(x^1,\cdots,x^m)$，$i=1,\cdots,n$，关于这方面的一个重要结论就是隐函数定理。通过局部坐标系，可以将这个定理推广到微分流形上。

命题12 设M^m和N^n是两个微分流形，$\Phi: M^m\to N^n$是可微映射，$y\in N^n$。如果y是Φ的正则值，且$\Phi^{-1}(y)\neq\phi$，则$\Phi^{-1}(y)$是M^m的一个m-n维正则子流形，并且对每个$x\in\Phi^{-1}(y)$，有

$$T_x(\Phi^{-1}(y))=\mathrm{Ker}\Phi_{*x} \tag{7.1.59}$$

例11 设$\Phi:\boldsymbol{R}^{n+1}\to\boldsymbol{R}$由下式定义

$$\Phi(u^1,\cdots,u^{n+1})=\sum_{i=1}^{n+1}(u^i)^2 \tag{7.1.60}$$

显然，除点$(0,\cdots,0)$之外，Φ是一个淹没，即非零实数都是Φ的正则值。因此，$S^n=\Phi^{-1}(1)$是$\boldsymbol{R}^{n+1}$的n维正则子流形。 ‖

§7.2 外微分

本节讨论张量丛，微分形式，微分形式的运算，Frobenius 定理，微分形式的积分。

7.2.1 张量丛

张量丛是欧氏空间中直积空间概念的推广，也是积流形概念的推广，它是在物理学的强烈刺激下产生的。例如，若用 x 表示质点的位置，$\boldsymbol{v}$ 表示质点在点 x 处的有向速度，则 $(x, \boldsymbol{v})$ 表示相空间中的一点，而由下面可以看出相空间实际上就是一种特殊的张量丛——切丛（余切丛）。

设 M^m 是微分流形，T_x 和 T_x^* 分别是流形 M^m 在点 $x\in M^m$ 的切空间和余切空间，则在 $\forall x\in M^m$ 处有 (r,s) 型张量空间[3,4]

$$T^r_s(x)=\underbrace{T_x\otimes\cdots\otimes T_x}_{r\text{个}}\otimes\underbrace{T_x^*\otimes\cdots\otimes T_x^*}_{s\text{个}} \tag{7.2.1}$$

$T^r_s(x)$ 是 m^{r+s} 维的矢量空间，令

$$T^r_s=\bigcup_{x\in M^m}T^r_s(x) \tag{7.2.2}$$

令 π：$T^r_s\to M^m$ 是由下式定义的映射

$$\pi(X^r_s(x))=x,\quad \forall X^r_s(x)\in T^r_s(x),\quad \forall x\in M^m \tag{7.2.3}$$

则 π 称为自然投影，它是由 T^r_s 到 M^m 的满映射。

可以证明，通过 π，M^m 上的流形结构（拓扑结构和微分结构）可以自然地导出 T^r_s 上的一个流形结构，使得 T^r_s 成为一个微分流形，并且 $\pi:T^r_s\to M^m$ 是一个淹没。

设 S_r 为由自然数 $\{1,\cdots,r\}$ 构成的置换群，V 是任一矢量空间，V^* 是 V 的对偶空间。记 $\Lambda^r(V)$ 为 $T^r(V)=V\otimes\cdots\otimes V$（共

r 个）中全体 r 阶反对称张量组成的集合，$\Lambda^{s*}(V)$ 为 $T_s(V)=V^*\otimes\cdots\otimes V^*$（共 s 个）中全体 s 阶反对称张量组成的集合，即

$$X=\mathrm{sgn}\sigma\cdot X,\quad \forall\sigma\in S_r,\quad \forall X\in\Lambda^r(V)$$

$$X^*=\mathrm{sgn}\sigma\cdot X^*,\quad \forall\sigma\in S_s,\quad \forall X^*\in\Lambda^{s*}(V)$$

式中

$$\mathrm{sgn}\sigma=\begin{cases}1, & \sigma\text{ 为偶置换}\\ -1, & \sigma\text{ 为奇置换}\end{cases}$$

显然，$\Lambda^r(V)$ 和 $\Lambda^{s*}(V)$ 分别是 $T^r(V)$ 和 $T_s(V)$ 的线性子空间。

定义 1 流形 T^r_s 称为流形 M^m 上的（r, s）型张量从。自然投影 π 称为从投影。$\forall x\in M^m$，$T^r_s(x)$ 称为从 T^r_s 在点 x 的纤维。当 $r=1$，$s=0$ 时

$$TM^m\equiv T^1_0=\bigcup_{x\in M^m}T_xM^m \tag{7.2.4}$$

TM^m 称为 M^m 的切从。当 $r=0$，$s=1$ 时

$$T^*M^m\equiv T^0_1=\bigcup_{x\in M^m}T^*_xM^m \tag{7.2.5}$$

T^*M^m 称为 M^m 的余切从。令

$$\Lambda^r(M^m)=\bigcup_{x\in M^m}\Lambda^r(T_xM^m) \tag{7.2.6}$$

$$\Lambda^{s*}(M^m)=\bigcup_{x\in M^m}\Lambda^{s*}(T_xM^m) \tag{7.2.7}$$

$\Lambda^r(M^m)$ 称为流形 M^m 上的 r 阶外矢量从，$\Lambda^{s*}(M^m)$ 称 M^m 的 s 阶外形式从。显然，1阶外矢量从即是切从，1 阶外形式从即是余切从。

7.2.2 微分形式

1. 微分形式的定义

定义 2 设 $f:M^m\to T^r_s$ 是可微映射，如果

$$\pi\circ f=id:M^m\longrightarrow M^m \tag{7.2.8}$$

即 $\forall x\in M^m$，$f(x)\in T^r_s(x)$，则称 f 是张量从 T^r_s 的一个可微截面，或称为 M^m 上的（r，s）型光滑张量场。

显然，切丛 TM^m 的可微截面就是 M^m 上的光滑矢量场。

微分流形 M^m 上的微分形式既可在几何上看成 M^m 上某个张量丛的可微截面，又可在代数上看成由 $\mathscr{X}(M^m)\times\cdots\times\mathscr{X}(M^m)$ 到 $C^\infty(M^m)$ 的一个多重线性反对称映射。

定义 3 外形式丛的可微截面

$$\omega: M^m \longrightarrow \Lambda^{s*}(M^m): x \longmapsto (x, \omega_x) \qquad (7.2.9)$$

称为 M^m 上的 *s* 次微分形式，简称 *s*－形式，其中 $\omega_x = \omega(x) \in \Lambda^{s*}(T_xM^m)$。

M^m 上所有 *s*－形式构成的集合记作 $F^s(M^m)$，并记

$$F(M^m) = \sum_{s=0}^{\infty} F^s(M^m)$$

令 $\mathscr{X}(M^m)$ 为 M^m 上 C^∞－矢量场的 C^∞－加法群，亦即对任意的 X、$Y \in \mathscr{X}^\infty(M^m)$，$\lambda \in \boldsymbol{R}$，有

（1）$\lambda X: x \longmapsto (\lambda X)(x) = \lambda X(x)$

（2）$X+Y: x \longmapsto (X+Y)(x) = X(x)+Y(x)$

（3）对任意 $f \in C^\infty(M^m)$，有

$$fX: x \longmapsto (fX)(x) = fX(x)$$

则 M^m 上的任何一个 *s* 次微分形式 ω 都可以定义一个从 $\underbrace{\mathscr{X}(M^m)\times\cdots\times\mathscr{X}(M^m)}_{s\text{个}}$ 到 $C^\infty(M^m)$ 的 $C^\infty(M^m)-S$ 重线性反对称映射，即：设 $X_1,\cdots,X_s$ 是 M^m 的 C^∞－矢量场，$\omega(X_1,\cdots,X_s)$ 有意义，则 *s*－形式 ω 定义一个映射

$$\omega: \overbrace{\mathscr{X}(M^m)\times\cdots\times\mathscr{X}(M^m)}^{s\text{个}} \to C^\infty(M^m) \qquad (7.2.10)$$

$$(X_1,\cdots,X_s) \longmapsto \omega(X_1,\cdots,X_s) \in C^\infty(M^m) \qquad (7.2.11)$$

对于任意的 $x \in M^m$，有

$$\omega(X_1,\cdots,X_s)(x) = \omega_x(X_1(x),\cdots,X_s(x)) \qquad (7.2.12)$$

并且

（1）$\forall f$、$g \in C^\infty(M^m)$，X、$Y \in \mathscr{X}(M^m)$，有

$$\omega(X_1,\cdots,X_{i-1},fX+gY,X_{i+1},\cdots,X_r)$$
$$=f\omega(X_1,\cdots,X_{i-1},X,X_{i+1},\cdots,X_r)$$
$$+g\omega(X_1,\cdots,X_{i-1},Y,X_{i+1},\cdots,X_r) \tag{7.2.13}$$

（2） $$\omega(X_1,\cdots,X_{j-1},X_j,\cdots,X_r)$$
$$=-\omega(X_1,\cdots,X_j,X_{j-1},\cdots,X_r) \tag{7.2.14}$$

反过来，任何由式（7.2.10）～（7.2.14）定义的 $C^\infty(M^m)$-多重线性反对称映射都定义了一个 M^m 上的微分形式。

2. 外积

定义 4 对每个 $p\geqslant 0$，$q\geqslant 0$，存在一个称为外积的运算：
$$\wedge:F^p(M^m)\times F^q(M^m)\longrightarrow F^{p+q}(M^m) \tag{7.2.15}$$
$$(\omega,\ \eta)\longmapsto\omega\wedge\eta \tag{7.2.16}$$

$\omega\wedge\eta$ 由下式定义
$$\omega\wedge\eta: x\longmapsto(\omega\wedge\eta)(x)=\omega(x)\wedge\eta(x)$$
$$=\omega_x\wedge\eta_x\in\Lambda^{(p+q)*}(M^m) \tag{7.2.17}$$

对于 $X_1,\ \cdots,\ X_{p+q}\in\mathscr{X}(M^m)$，
$$(\omega\wedge\eta)(X_1,\ \cdots,\ X_{p+q})(x)=\sum_{\sigma\in s_{p+q}}(\mathrm{sign}\,\sigma)\omega_x(X_{\sigma(1)}(x),\cdots,$$
$$X_{\sigma(p)}(x))\cdot\eta_x(X_{\sigma(p+1)},\ \cdots,\ X_{\sigma(p+q)}) \tag{7.2.18}$$

其中 s_{p+q} 是满足 $\sigma(1)<\cdots<\sigma(p)$ 和 $\sigma(p+1)<\cdots<\sigma(p+q)$ 的置换构成的子集，$\mathrm{sign}\,\sigma$ 是置换 $\sigma\in s_{p+q}$ 的符号。

外积是一种与坐标的选取无关的运算，由外积的定义可推出它的下述性质：

（1） $$\omega\wedge(\eta+\theta)=\omega\wedge\eta+\omega\wedge\theta \tag{7.2.19}$$
$$(\eta+\theta)\wedge\omega=\eta\wedge\omega+\theta\wedge\omega \tag{7.2.20}$$

其中 η 和 θ 是同次的微分形式。

（2） $$\omega\wedge(\eta\wedge\theta)=(\omega\wedge\eta)\wedge\theta \tag{7.2.21}$$

（3）对 $f\in C^\infty(M^m)$，有
$$f(\omega\wedge\eta)=f\omega\wedge\eta=\omega\wedge f\eta \tag{7.2.22}$$

（4）对$\omega\in F^p(M^m)$，$\eta\in F^q(M^m)$，有

$$\omega\wedge\eta=(-1)^{pq}\eta\wedge\omega \tag{7.2.23}$$

命题 1　（1）设ω_i为M^m上的1-形式，$X_i\in\mathscr{X}(M^m)$为M^m上的C^∞-矢量场，$i=1,\cdots,p$，则

$$(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p)(X_1,\cdots,X_p)=\det[\omega_i(X_j)] \tag{7.2.24}$$

（2）M^m上的任何p-形式均可分解为C_m^p个p单式之和，而每个p单式是p个1-形式的外积：

$$\omega=\sum_{1\leqslant i_k\leqslant m}\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_p} \tag{7.2.25}$$

3. 微分形式的标准型

$\forall x\in M^m$，设(U,φ)是含x的一张图，$\{x^1,\cdots,x^m\}$是局部坐标函数。因为$\{dx^1,\cdots,dx^m\}$是$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}\right\}$的对偶基：

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\delta_j^i,\qquad (i,j=1,\cdots,m) \tag{7.2.26}$$

于是在每个$x\in U$处$\{dx^1,\cdots,dx^m\}$构成$T_1^0(x)$的一个基，从而

$$\{dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}\mid i_1<\cdots<i_s\} \tag{7.2.27}$$

在$\forall x\in U$处构成s次外形式空间$\Lambda^s(T_xM^m)$的一个基，进而

$$\dim\Lambda^{s*}(T_xM^m)=\begin{cases}\binom{m}{s}, & 0\leqslant s\leqslant m\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{7.2.28}$$

命题 2　M^m上的任意一个s-形式ω在U上的限制可表为

$$\omega|_U=\sum_{i_1<\cdots<i_s}a_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s} \tag{7.2.29}$$

或

$$\omega|_U=\frac{1}{s!}\sum_{i_1,\cdots,i_s}a_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s} \tag{7.2.30}$$

特别地，1-形式ω可唯一地表示为

$$\omega|_U=\sum_{i=1}^m a_i dx^i \tag{7.2.31}$$

7.2.3 微分形式的运算

本小节引进关于微分形式的三种运算：外导数、内积、Lie导数。与外积运算一样，它们和局部坐标系的选取无关。

1. 外导数

外导数是欧氏空间中微分算子概念在微分流形上的推广。

命题 3 设 M^m 是微分流形，则存在一个唯一的映射 d：$F^p(M^m)\to F^{p+1}(M^m)$，使得

（1）$$d(\omega+\eta)=d\omega+d\eta \tag{7.2.32}$$

（2）$$d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^{\deg\omega}\omega\wedge d\eta \tag{7.2.33}$$

（3）若 $f\in C^\infty(M^m)$ 是 M^m 上的可微函数，则 df 恰好是 f 的微分；

（4）$$d(d\omega)=0 \tag{7.2.34}$$

映射 d 称为外导数。

例 1 设 $\boldsymbol{R}^3$ 中的笛卡儿坐标系是 (x_1, x_2, x_3)。

（1）若 f 是 $\boldsymbol{R}^3$ 上的可微函数，则

$$df=\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i=\sum f_i dx_i$$

矢量 $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$ 是函数 f 的梯度 grad f。

（2）设 $\omega=a_1dx_1+a_2dx_2+a_3dx_3$

则
$$\begin{aligned}d\omega&=da_1\wedge dx_1+da_2\wedge dx_2+da_3\wedge dx_3\\&=\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)dx_1\wedge dx_2+\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)dx_2\wedge dx_3\\&\quad+\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)dx_3\wedge dx_1\end{aligned} \tag{7.2.35}$$

矢量 (a_1, a_2, a_3) 记为 $\boldsymbol{a}$，则矢量

$$\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}, \frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)$$

是矢量场 $\boldsymbol{a}$ 的旋度 curl $\boldsymbol{a}$。

（3）设 $\eta = b_1 dx_2 \wedge dx_3 + b_2 dx_3 \wedge dx_1 + b_3 dx_1 \wedge dx_2$

则
$$d\eta = \left(\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} + \frac{\partial b_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \tag{7.2.36}$$

令 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$，则
$$d\eta = \mathrm{div}\boldsymbol{b} \cdot dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \tag{7.2.37}$$
其中 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{b}$ 表示矢量场 $\boldsymbol{b}$ 的散度。

设 $\omega = df$，则将式（7.2.34）代入式（7.2.35）中，易得
$$d\omega = d(df) = \mathrm{curl}(\mathrm{grad} f) = 0 \tag{7.2.38}$$
设 $\eta = d\omega$，则将式（7.2.35）代入式（7.2.36）中，易得
$$d\eta = d(d\omega) = \mathrm{div}(\mathrm{curl}\boldsymbol{a}) = 0 \tag{7.2.39}$$
式（7.2.38）和（7.2.39）是场论中的两个基本公式。 ‖

定义 5 设 M^m 是微分流形，则存在一个唯一的映射
$$[\,,\,]:\ \mathscr{X}(M^m) \times \mathscr{X}(M^m) \longrightarrow \mathscr{X}(M^m) \tag{7.2.40}$$
它由下式定义
$$[X, Y] = XY - YX \tag{7.2.41}$$
即对任意的 $f \in C^\infty(M^m)$，有
$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \tag{7.2.42}$$
映射[，]称为 Lie 括号。

容易验证，$\forall f, g \in C^\infty(M^m)$，$\forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$，有

（1）$$[X,Y](\lambda f + \mu g) = \lambda[X,Y](f) + \mu[X,Y](g) \tag{7.2.43}$$

（2）$$[X,Y](fg) = f[X,Y](g) - g[X,Y](f) \tag{7.2.44}$$

命题 4 设 M^m 是微分流形，$X、Y、Z \in \mathscr{X}(M^m)$，$f、g \in C^\infty(M^m)$，则有

（1）$$[X, Y] = -[Y, X] \tag{7.2.45}$$

（2）$$[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z] \tag{7.2.46}$$

（3）$$[fX, gY] = f(X(g))Y - g(Y(f))X + fg[X,Y] \tag{7.2.47}$$

（4） $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$

（7.2.48）

Lie 括号的引出允许我们有如下的命题。

命题 5 设 M^m 是微分流形，ω 是 M^m 上的 s-形式，$X_1,\cdots,X_{s+1}\in\mathscr{X}(M^m)$，则

$$d\omega(X_1,\cdots,X_{s+1})=\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i+1}X_i(\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{s+1}))$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant s+1}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{s+1})\qquad(7.2.49)$$

其中"$\wedge$"表示略去此变量。特别地，当 $s=1$ 时，有

$$d\omega(X_1,X_2)=X_1(\omega(X_2))-Y(\omega(X_1))-\omega([X,Y])\qquad(7.2.50)$$

定义 6 设 M^m 和 N^n 是两个微分流形，Φ: $M^m\to N^n$ 是可微映射，则由 Φ 诱导出一个映射

$$\Phi^*:F^p(N^n)\to F^p(M^m),\ p\leqslant\min(m,n)\qquad(7.2.51)$$

定义如下：对任意一个 N^n 上的 p-形式 ω，$\Phi^*\omega$ 是 M^m 上的一个 p-形式，

$$\Phi^*\omega(X_1,\cdots,X_p)(x)=\omega_{\Phi(x)}(\Phi_{*x}X_1,\cdots,\Phi_{*x}X_p)$$

$$=\omega_{\Phi(x)}(d\Phi(x)X_1,\cdots,d\Phi(x)X_p)\qquad(7.2.52)$$

其中 $x\in M^m$，$X_1,\cdots,X_p\in T_xM^m$。Φ^* 称为 Φ 的诱导映射（拉回映射），又称为Φ_*（Φ 的推前映射）的对偶映射。

由式（7.1.11）和（7.1.12）定义的对偶映射实质上是由式（7.2.51）和（7.2.52）定义的诱导映射的特例（$p=0$，ω 是 M^m 上的可微函数）。

映射 Φ^* 具有如下一些性质：

（1） $\Phi^*(\omega+\eta)=\Phi^*\omega+\Phi^*\eta$ （7.2.53）

（2） $\Phi^*(\omega\wedge\eta)=\Phi^*\omega\wedge\Phi^*\eta$ （7.2.54）

（3） $d\circ\Phi^*=\Phi^*\circ d$ （7.2.55）

（4）若 $\Psi: N^n \to L^l$ 是可微映射，则

$$(\Psi \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Psi^* \qquad (7.2.56)$$

下面我们给出 Φ^* 在局部坐标系下的表示。

设 M^m 和 N^n 是两个微分流形，(U, φ) 是 M^m 的一张图，局部坐标函数是 $\{x^1, \cdots, x^m\}$，(V, ψ) 是 N^n 的一张图，坐标函数是 $\{y^1, \cdots, y^n\}$，Φ: $U \to V$ 是一可微映射。则 $\forall \beta \in F^p(V)$，β 有局部表示

$$\beta = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} b_{i_1 \cdots i_p}(y) \mathrm{d}y^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{i_p} \qquad (7.2.57)$$

从而 $\Phi^*\beta \in F^p(V)$，为

$$\begin{aligned}
\Phi^*\beta &= \sum \Phi^*(b_{i_1 \cdots i_p}(y)) \Phi^* \mathrm{d}y^{i_1} \wedge \cdots \wedge \Phi^* \mathrm{d}y^{i_p} \\
&= \sum b_{i_1 \cdots i_p}(\Phi(x)) \mathrm{d}(y^{i_1} \circ \Phi) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(y^{i_p} \circ \Phi) \\
&= \sum b_{i_1 \cdots i_p}(\Phi(x)) \frac{\partial(y^{i_1} \circ \Phi)}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial(y^{i_p} \circ \Phi)}{\partial x^{j_p}} \\
&\quad \times \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_p} \\
&= \sum b_{i_1 \cdots i_p}(\Phi(x)) \frac{\partial(y^{i_1} \circ \Phi, \cdots, y^{i_p} \circ \Phi)}{\partial(x^{j_1}, \cdots, x^{j_p})} \\
&\quad \times \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_p}
\end{aligned} \qquad (7.2.58)$$

式中，$1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n$，$1 \leqslant j_1 < \cdots j_p \leqslant m$。特别是，如果 $\beta = \sum b_i \mathrm{d}y^i$，由上式可导出

$$\Phi^*\beta = \Phi^*(\sum b_i \mathrm{d}y^i) = \sum b_i(\Phi(x)) \frac{\partial(y^i \circ \Phi)}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j$$

$$(7.2.59)$$

由式（7.2.59）可以看出，映射 Φ^* 和 Φ_* 有相同的局部表示。这不难理解，因为 Φ^* 和 Φ_* 是"对偶"的。

例 2 一维球面

$$S^1 = \{x \in \boldsymbol{R}^2 \mid \|x\|^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1\}$$

作为 $\boldsymbol{R}^2$ 的一个子空间，是一个微分流形。S^1 上的 1-形式

$$\beta = -x^2 \mathrm{d}x^1 + x^1 \mathrm{d}x^2$$

是 $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}$ 上 1-形式 ω 在 S^1 上的限制，即 $\beta = \omega|_{S^1}$：

$$\omega=\frac{-x^2\mathrm{d}x^1+x^1\mathrm{d}x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2}$$

设 Φ 是如下定义的光滑映射：

$$\Phi:\boldsymbol{R}\longrightarrow S^1:t\longmapsto(\cos t,\ \sin t)$$

由于 $\boldsymbol{R}$ 上的所有 1- 形式均可表示成 $a\mathrm{d}t$ 的形式，故可设 $\Phi^*\beta=a\mathrm{d}t$。将

$$x^2(\Phi(t))=(x^2\circ\Phi)(t)=\sin t$$

$$x^1(\Phi(t))=(x^1\circ\Phi)(t)=\cos t$$

代入式（7.2.59），可得 $a=1$，即

$$\Phi^*\beta=\mathrm{d}t$$

命题 3 中的（4）就是著名的 Poincaré 引理，下面给出它的逆命题。

命题 6 如果 ω 是在开集 $U\subset M^m$ 上的 s- 形式，$s\geqslant1$，U 可收缩为一点，且 $\mathrm{d}\omega=0$，则存在 $s-1$- 形式 α 使得 $\omega=\mathrm{d}\alpha$。

通常称满足 $\mathrm{d}\omega=0$ 的微分形式 ω 为闭形式。对 $\omega\in F^s(M^m)$，如果存在 $\alpha\in F^{s-1}(M^m)$，使得 $\omega=\mathrm{d}\alpha$，则称 ω 为恰当形式。由此可见，命题 6 实际上是给出了闭形式成为恰当形式的条件。

任何恰当形式都是闭形式；而闭形式，只有当流形具有“足够好”的拓扑性质时，才是恰当形式。

2．内积

微分形式与矢量场的内积是一个作用在微分形式上的算子 i_X，$X\in\mathscr{X}(M^m)$。它把 M^m 上的 p- 形式变为 M^m 上的 $p-1$- 形式。

定义 7 $X,\ X_1,\ \cdots,\ X_{p-1}\in\mathscr{X}(M^m)$，$\omega\in F^p(M^m)$，则 ω 与 X 的内积是一个由下式定义的 $p-1$- 形式 $i_X\omega$：

$$(i_X\omega)(X_1,\ \cdots,\ X_{p-1})=\omega(X,\ X_1,\ \cdots,\ X_{p-1})\quad(7.2.60)$$

通常也称 $i_X\omega$ 为微分形式 ω 关于矢量场 X 的缩并，并记作 $X\lrcorner\,\omega$。

内积运算具有下列性质：

（1）内积运算是一种局部运算

$$i_{X_U}\omega_U=(i_X\omega)_U,\quad U\subset M^m \tag{7.2.61}$$

（2）

$$i_X F^p(M^m)\subset F^{p-1}(M^m) \tag{7.2.62}$$

（3）对 ω、$\theta\in F^p(M^m)$，$\lambda\in\boldsymbol{R}$，有

$$i_X(\omega+\theta)=i_Z\omega+i_X\theta \tag{7.2.63}$$

$$i_X(\lambda\omega)=\lambda i_X\omega \tag{7.2.64}$$

（4）对 $\omega\in F^p(M^m)$，$\theta\in F^r(M^m)$，有

$$i_X(\omega\wedge\theta)=i_X\omega\wedge\theta+(-1)^p\omega\wedge i_X\theta \tag{7.2.65}$$

（5）如果 $\omega\in F^1(M^m)$，则

$$i_X\omega=\omega(X) \tag{7.2.66}$$

如果 $\omega\in F^0(M^m)$，即 ω 是M^m上的可微函数，则

$$i_X\omega=0 \tag{7.2.67}$$

内积 i_X 也可以看作一个映射 $i_X:F^p(M^m)\to F^{p-1}(M^m)$。可以证明，如上定义的内积运算存在且唯一。

命题 6a　$\forall X,Y\in\mathscr{X}(M^m)$，$f\in C^\infty(M^m)$，有

$$i_{X+Y}=i_X+i_Y \tag{7.2.68}$$

$$i_{fX}=fi_X \tag{7.2.69}$$

$$(i_X)^2=i_Xi_X=0 \tag{7.2.70}$$

3. Lie 导数

Lie 导数是欧氏空间中方向导数的推广。在引出 Lie 导数之前先介绍矢量场的流、局部单参数群的概念。

定义 8　设 $X\in\mathscr{X}(M^m)$，可微曲线 $\gamma:(a,b)\subseteq R\to M^m$，如果对 $t\in(a,b)$，满足

$$\dot\gamma(t)=X(\gamma(t)) \tag{7.2.71}$$

即

$$\gamma_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)=X|_{\gamma(a,b)} \tag{7.2.72}$$

其中 $X|_{\gamma(a,b)}$ 表示 X 在 $\gamma(a,b)$ 上的限制，则称 γ 为 X 的一条积分曲线。

由式（7.1.33）知，对于$\gamma: t \longmapsto \gamma(t)=(x^i(t))$和$X=\sum a^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，式（7.2.72）成立的充分必要条件是$x^i(t)$是如下微分方程组的解：

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}=a^i(x), \quad (i=1, \cdots, m) \quad (7.2.73)$$

X的积分曲线也就是方程（7.2.73）的解曲线。

例 3 牛顿方程

$$\ddot{x}^i=F^i(x^j, \dot{x}^j)$$

可以看作一个可微映射$X: TM^m \to T(TM^m)$，其局部表示为

$$X=\sum\left(\dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}+F^i(x^j, \dot{x}^j)\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\right)$$

显然，$X\in\mathscr{X}(TM^m)$，它的积分曲线是如下方程组的解：

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}=\dot{x}^i, \quad \frac{\mathrm{d}\dot{x}^i}{\mathrm{d}t}=F^i(x^j, \dot{x}^j) \qquad \|$$

命题 7 设$X\in\mathscr{X}(M^m)$，$\forall x_0\in M^m$，存在含x_0的一张图(U_0, φ)、一个正实数ε和一个可微映射：

$$\gamma: U_0\times I\to M^m: (x, t)\longmapsto\gamma(x, t) \quad (7.2.74)$$

其中$I=(-\varepsilon, \varepsilon)$，使得对任何固定的$x\in U_0$，$\gamma_x\equiv\gamma(x, \cdot): I\to M^m$是$X$过$x$的积分曲线。$\gamma(x, t)$称为矢量场$X$的流。

流实际上就是微分方程组的解曲线族。

对任何固定的t，令$\gamma_t\equiv\gamma(\cdot, t)$，则对任意的$x\in U_0$，$\gamma_x$给出一条局部唯一的积分曲线，而$\forall t\in I$，$\gamma_t$则将$U_0$映为$M^m$上的另一开集。因此看起来，$U_0$好象是随着$t$的变动而流动。

命题 8 设$X\in\mathscr{X}(M^m)$，对任意的$x_0\in M^m$，存在X在x_0点的唯一的流箱$(U_0, \varepsilon, \gamma)$，其中

（1）$U_0\subset M^m$是含x_0的一张图，ε是正实数；

（2）$\gamma: U_0\times I\to M^m$是可微映射，$I=(-\varepsilon, \varepsilon)$；

（3）$\forall x\in U_0$，$\gamma_x: I\to M^m: t\longmapsto\gamma(x, t)$是$X$过$x$点的积分曲线；

（4） $\forall t\in I$，$\gamma_t: U_0\to M^m: x\mapsto\gamma(x,t)$ 是微分同胚。

映射 γ_t 在 $t=0$ 附近具有下述性质：

（1） $\gamma_0=id$ （因 $\gamma_0(x)=\gamma(x,0)=x$，$\forall x$） (7.2.75)

（2） $\gamma_s\circ\gamma_t=\gamma_{s+t}=\gamma_{t+s}=\gamma_t\circ\gamma_s$ (7.2.76)

（3） $\gamma_t^{-1}=\gamma_{-t}$ (7.2.77)

定义 9 如上定义的 γ_t 称为由 X 生成的局部单参数群。

可以证明[5]，对 M^m 上任何一个微分同胚的局部单参数群 γ_t，存在唯一的 $X\in\mathscr{X}(M^m)$，使得 γ_t 是由 X 生成的。

命题 9 存在一个且只有一个映射

$$\mathscr{L}:\mathscr{X}(M^m)\times F(M^m)\to F(M^m),\ (x,\omega)\longmapsto\mathscr{L}_X\omega$$

它具有下述性质： (7.2.78)

（1） $\mathscr{L}_X$ 是一个局部算子，即

$$\mathscr{L}_{X_U}\omega_U=(\mathscr{L}_X\omega)_U \tag{7.2.79}$$

（2）
$$\mathscr{L}_X F^p\subset F^p \tag{7.2.80}$$

（3） $\forall\omega$、$\theta\in F^p$，$\lambda\in\boldsymbol{R}$，有

$$\mathscr{L}_X(\omega+\theta)=\mathscr{L}_X\omega+\mathscr{L}_X\theta \tag{7.2.81}$$

$$\mathscr{L}_X(\lambda\omega)=\lambda\mathscr{L}_X\omega \tag{7.2.82}$$

（4）
$$\mathscr{L}_X(\omega\wedge\theta)=\mathscr{L}_X\omega\wedge\theta+\omega\wedge\mathscr{L}_X\theta \tag{7.2.83}$$

（5） 如果 $f\in F^0(M^m)$，即 f 是 M^m 上的可微函数，则

$$\mathscr{L}_X f=Xf \tag{7.2.84}$$

（6） 如果 $\mathrm{d}f$ 是一个微分，则

$$\mathscr{L}_X\mathrm{d}f=\mathrm{d}\mathscr{L}_X f \tag{7.2.85}$$

除式 (7.2.79)～(7.2.85) 之外，$\mathscr{L}_X$ 还具有下面一些性质：$\forall X、Y\in\mathscr{X}(M^m)$，$\omega\in F^p(M^m)$，$f\in F^0(M^m)$，$\lambda\in R$，

（1）
$$\mathscr{L}_X=i_X\mathrm{d}+\mathrm{d}i_X \tag{7.2.86}$$

（2）
$$\mathscr{L}_X\circ\mathrm{d}=\mathrm{d}\circ\mathscr{L}_X,\quad \mathscr{L}_X\circ i=i\circ\mathscr{L}_X \tag{7.2.87}$$

（3）
$$[\mathscr{L}_X, i_Y]=i_{[X,Y]} \tag{7.2.88}$$

$$[\mathscr{L}_X,\mathscr{L}_Y]=\mathscr{L}_{[X,Y]} \tag{7.2.89}$$

（4）
$$\mathscr{L}_{X+Y}=\mathscr{L}_X+\mathscr{L}_Y,\quad \mathscr{L}_{\lambda X}=\lambda\mathscr{L}_X \tag{7.2.90}$$

（5）如果 f 不是常值函数，则

$$\mathscr{L}_{fX} \neq f\mathscr{L}_X \tag{7.2.91}$$

$$\mathscr{L}_{fX}\omega = f\mathscr{L}_X\omega + \mathrm{d}f \wedge i_X\omega \tag{7.2.92}$$

式（7.2.86）称为同伦恒等式，它揭示了 Lie 导数算子 $\mathscr{L}_X$ 与内积和外微分算子的关系。

7.2.4 Frobenius 定理

设 $\omega_1, \cdots, \omega_s \in F^1(M^m)$，方程组

$$\omega^i = 0, \qquad (i=1, \cdots, s) \tag{7.2.93}$$

通常称为 Pfaff 方程组。必须注意的是，$\omega_i = 0$，并不意味着 ω_i 是处处为零的 1- 形式，而是说：$\forall x \in M^m$，ω_i 在切空间 T_xM^m 的一个线性子空间上等于零。

Frobenius 定理研究的是 Pfaff 方程组的可积性，即在什么条件下，方程组（7.2.93）的解可以用 $f_i = \text{const.}$ 表述，其中 f_i 是 M^m 上的可微函数，且 $\mathrm{d}f_i$ 是 M^m 上处处不为零的 1- 形式。这个问题与非完整力学中关于约束方程的研究，即约束的可积性是一致的。

1. 用矢量场表述的 Frobenius 定理

M^m 上的 k 维分布是一个映射 $\Delta^k: x \longmapsto \Delta^k_x$，其中 $\Delta^k_x \subset T_xM^m$，是 T_xM^m 的一个 k 维子空间。若 $\forall x \in M^m$，在 x 的一个邻域 U 上存在 k 个处处线性无关的光滑矢量场 $X_1, \cdots, X_k$，使得 $\forall y \in U$，Δ^k_y 由 $X_1(y), \cdots, X_k(y)$ 张成，则称 Δ^k 是流形 M^m 上的一个光滑分布。$X_1, \cdots, X_k$ 称为 Δ^k 在 U 上的一个局部基。

在下面，除非特别指出，所指的分布均是光滑分布。

一个矢量场 $X \in \mathscr{X}(M^m)$，如果 $\forall x \in M^m$ 有 $X(x) \in \Delta^k_x$，则称 X 属于 Δ^k，记作 $X \in \Delta^k$。

定义10 设 N^k 是 M^m 的 k 维子流形，$\Phi: N^k \to M^m$ 是包含映射。如果 $\forall x \in N^k$，有下式成立

$$\mathrm{d}\Phi(T_xN^k) \equiv \Phi_* T_xN^k = \Delta^k_{\Phi(x)} \tag{7.2.94}$$

或等价地，有（因为 Φ 是包含映射）

$$\Phi_* T_x N^k = \Delta_x^k \tag{7.2.95}$$

则称（N^k, Φ）为分布 Δ^k 的积分流形。

如果 $\forall X、Y \in \Delta^k$，均有 $[X, Y] \in \Delta^k$，则称分布 Δ^k 是对合的，或完全可积的。M^m 上的分布并非都是可积的，分布的积分子流形也不一定就存在。

定义11 设 $f \in F^0(M^m)$，即 f 是 M^m 上的可微函数，U 是 f 的定义域，如果

$$X(f) = 0, \quad \forall x \in U \text{和} \forall X \in \Delta_x^k \tag{7.2.96}$$

则称 f 是分布 Δ^k 的首次积分（第一积分）。

式（7.2.96）也可等价地写成

$$\mathrm{d}f(\Delta_x^k) = 0 \tag{7.2.97}$$

由式（7.2.96）和（7.2.97）可以看出，首次积分 f 在Δ^k 连通的积分流形 N^k 上等于常数。

我们关心的是在什么条件下，分布 Δ^k 的积分流形可以由首次积分确定。

设 $f_1, \cdots, f_s$是分布 Δ^k 的首次积分。如果 $\mathrm{d}f_i$ 在 $\forall x \in U$ 处线性无关，则称 $f_1, \cdots, f_s$ 在开集U上是函数无关的。对于分布 Δ^k 来说，函数无关的首次积分的最大集合最多是由（$m-k$）个首次积分构成。

设 $f_1, \cdots, f_{m-k}$ 是分布 Δ^k 的首次积分，在开集 $U \subset M^m$ 上函数无关（如果存在的话），则局部定义的子流形

$$N^k = \{x \in U \mid f_1(x) = c_1, \cdots, f_{m-k}(x) = c_{m-k}\} \tag{7.2.98}$$

是分布 Δ^k 的积分流形。Δ^k 可以局部地表成

$$\Delta^k = \{X \in \mathscr{X}(M^m) \mid \mathrm{d}f_1(X) = \cdots = \mathrm{d}f_{m-k}(X) = 0\} \tag{7.2.99}$$

对于 $[X、Y] \in \Delta^k$，因

$$\mathrm{d}f_i\ ([X,\ Y]) = 0, \quad (i = 1, \cdots, m-k) \tag{7.2.100}$$

则$[X, Y]\in\Delta^k$，即$[\Delta^k, \Delta^k]\subset\Delta^k$。据此有下面的定理。

命题10 （Frobenius 定理）设Δ^k是M^m上完全可积的分布，则$\forall x\in M^m$，存在x的一个邻域U和定义在U上的局部坐标系$\{x^1, \cdots, x^m\}$，使得

（1）$\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^k}\right\}$是$\Delta^k$在$U$上的一个局部基；

（2）分布Δ^k存在过x的积分流形，并且它由截口$x^i=f_i=\text{const.}$给出，$i=k+1, \cdots, m$，其中f_i是分布Δ^k的函数无关的首次积分的最大集合；

（3）分布Δ^k的任何首次积分f在坐标系$\{x^1, \cdots, x^m\}$中可以写成$x^i(i=k+1, \cdots, m)$的函数。

须注意的是，命题10只是一个局部性定理。

2．用微分形式表示的 Frobenius 定理

与分布概念相对应的是余分布。M^m上的一个s维余分布也是一个映射$\Delta^{*s}: x\mapsto\Delta_x^{*s}$，其中$\Delta_x^{*s}\subset T_x^*M^m$是$T_x^*M^m$的一个$s$维子空间。如果$\omega_1, \cdots, \omega_s$是$M^m$上线性无关的1-形式（即$\omega_1, \cdots, \omega^s$在每点$x\in M^m$线性无关），则由$\omega_1, \cdots, \omega_s$张成$M^m$上一个$s$维余分布。

设Δ^k是M^m上的分布，Δ^{*s}是M^m上的余分布。如果对任意的$x\in M^m$，有

$$\Delta_x^k=\{X\in T_xM^m\ \omega(X)=0,\ \forall\omega\in\Delta_k^{*s}\}\quad(7.2.101)$$

$$\Delta_x^{*s}=\{\omega\in T_x^*M^m|\omega(X)=0,\ \forall X\in\Delta_x^k\}\quad(7.2.102)$$

则称Δ^k和Δ^{*s}是对应的，这时定有$k+s\leqslant m$。

M^m上的每个分布Δ^k对应一个余分布$\Delta^{*(m-k)}$，同样，每个余分布Δ^{*s}对应一个分布$\Delta^{(m-s)}$。

定义12 设N是M^m的子流形，$\Phi: N\to M^m$是包含映射。如果对任意$x\in N$，均有

$$\omega(\Phi_*X)=0,\ \forall X\in T_xN,\ \forall\omega\in\Delta_{\Phi(x)}^{*s}=\Delta_x^{*s}\ (7.2.103)$$

则称N为余分布Δ^{*s}的积分流形。

显然，如果余分布 Δ^{*s} 由 1- 形式 $\omega_1, \cdots, \omega_s$ 张成，则 Δ^{*s} 的积分流形 N 就是 Pfaff 组 $\omega_i=0$，$i=1, \cdots, s$，的积分流形，即 $\omega_i|_N=0$。

N 是余分布 $\Delta^{*(m-k)}$ 的积分流形，当且仅当它是对应分布 Δ^k 的积分流形，因而余分布的积分流形也不是一定就存在的。

定义13 已知一个由下列方程

$$\omega_i=0, \qquad (i=k+1, \cdots, m) \qquad (7.2.104)$$

组成的 pfaff 组。如果它等价于方程组

$$\mathrm{d}f_i=0, \qquad (i=k+1, \cdots, m) \qquad (7.2.105)$$

其中 $f_i(i=k+1, \cdots, m)$ 是这个 Pfaff 组的函数无关的首次积分的最大集合，则称该 Pfaff 组是完全可积的。

在定义中，所说的 Pfaff 组的首次积分就是其对应分布的首次积分。

显而易见，分布与其对应的余分布的可积性是一致的。

命题11 （**Frobenius 定理的对偶表述**） 一个 C^∞- 余分布 $\Delta^{*(m-k)}: x \longmapsto \Delta_x^{*(m-k)}$ 是完全可积的充分必要条件是：对 $\Delta^{*(m-k)}$ 中的每个 Pfaff 形，2- 形式 $\mathrm{d}\omega$ 可以局部地表示成 $\Delta^{*(m-k)}$ 的局部 1- 形式基 $\{\omega_i\}$ 的线性组合，即

$$\mathrm{d}\omega=\sum_j \theta_j\wedge\omega_j \qquad (7.2.106)$$

7.2.5 微分形式的积分

微分形式的积分是 Riemann 积分的推广，是 Hamilton 原理和积分不变量等理论几何化的基础。

1. 单位分解定理

单位分解定理是在流形上定义积分运算的基础。

定义14 设 $f: M^m \to \boldsymbol{R}$ 是实函数。函数 f 的支集是指使 f 取非零值的点集的闭包，记作

$$\operatorname{supp} f=\overline{\{x \mid x\in M^m, f(x)\neq 0\}} \qquad (7.2.107)$$

微分形式 ω 的支集是

$$\operatorname{supp}\omega=\{x|x\in M^m,\ \omega(x)\neq 0\} \qquad (7.2.108)$$

支集也就是通常所说的非零点集，有的亦称正则点集。

命题 12（单 位 分 解定理） 设 M^m 是微分流形，$\{U_\alpha|\alpha\in I\}$ 是 M^m 的一个开复盖，则在 M^m 上存在一族可微函数 $\{f_\alpha\ \alpha\in I\}$，满足下列条件：

（1）对每个 α，$0\leqslant f_\alpha\leqslant 1$，支集 $\operatorname{supp}f_\alpha$ 是紧致的，并且 $\operatorname{supp}f_\alpha\subset U_\alpha$；

（2）$\forall x\in M^m$ 有一邻域 V，它只与有限多个支集 $\operatorname{supp}f_\alpha$ 相交；

（3） $\sum\limits_{\alpha} f_\alpha=1$。

函数族 $\{f_\alpha|\alpha\in I\}$ 称为从属于开复盖 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解。

2．定向流形

定义15 微分流形 M^m 的一个体积形式是指一个连续的 m-形式 $\omega\in F^m(M^m)$，它对任意 $x\in M^m$ 都有 $\omega_x\neq 0$。当且仅当在 M^m 上存在一个体积形式时，M^m 称为可定向的。若在 M^m 上给定一体积形式，则称 M^m 是定向的。如果给出 M^m 的定向的两个体积形式彼此只差一个处处为正的函数因子，则它们规定了 M^m 的同一个定向。

连通的可定向流形恰有两个不同的定向。对于不连通的流形来说，如果它的每个连通分支都是可定向的，则称该流形是可定向的，其方向由每个分支的方向确定。

命题13 设 M^m 是微分流形，则下面的两种说法等价：

（1）M^m 是可定向的，即在 M^m 上存在一个体积形式；

（2）在 M^m 上有一个图册 $\mathscr{U}=\{(U_i,\varphi_i)|i\in I\}$，使得在 $U_i\cup U_j\neq\phi$ 上有

$$dx_i^1\wedge\cdots\wedge dx_i^m=J\,dx_j^1\wedge\cdots\wedge dx_j^m \qquad (7.2.109)$$

其中 $$J=\det\left(\frac{\partial x_i^l}{\partial x_j^k}\right), \quad (l,k=1,\cdots,m) \tag{7.2.110}$$

$\{x_i^1,\cdots,x_i^m\}$ 和 $\{x_j^1,\cdots,x_j^m\}$ 分别是 U_i 和 U_j 的局部坐标函数。

满足命题 13 中（2）的图册 $\{(U_i,\varphi_i)\}$ 称为是和体积式 ω 所确定方向相容的。

3. 可微链

定义 16 由下式定义的 s_p 称为 $\boldsymbol{R}^p$ 中的标准 p- 单形：

$$s_p=\left\{(u^1,\cdots,u^p)\in\boldsymbol{R}^p \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p}u^i\leqslant 1;\ 0\leqslant u^i\leqslant 1,\ \forall i\right\} \tag{7.2.111}$$

实际上，一个 p- 单形 s_p 就是由 $p+1$ 个点 $A_0,\cdots,A_p$ 组成的闭凸包，这些点是按确定的顺序排列的，使矢量 (A_1-A_0)，$\cdots$，(A_p-A_0) 线性无关。图 7.2 所示是一个标准 2- 单形。

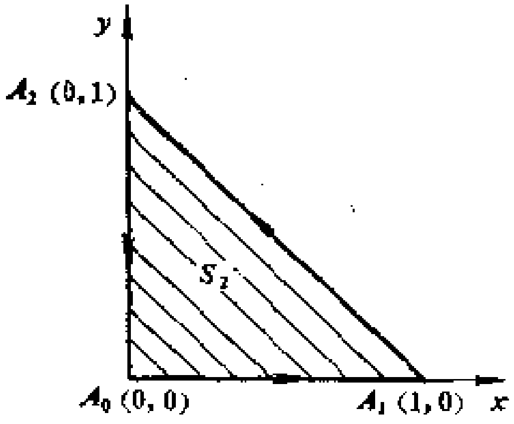


图 7.2

p- 单形 s_p 的边缘 ∂s_p 是一个由下式定义的 $p-1$- 单形的形式和：

$$\partial s_p=\partial(A_0,\cdots,A_p)=\sum_{j=0}^{p}(-1)^j(A_0,\cdots,A_{j-1},A_{j+1},\cdots,A_p)$$
$$=\sum_{j=0}^{p}(-1)^j s_{p-1}^j \tag{7.2.112}$$

这时 s_{p-1}^j 作为 s_p 的一个面。

例 4 $s_2=(A_0, A_1, A_2)$，其中 $A_0=(0, 0)$，$A_1=(1, 0)$，$A_2=(0, 1)$，则

$$\begin{aligned}\partial s_2&=\partial(A_0, A_1, A_2)\\&=(A_1, A_2)-(A_0, A_2)+(A_0, A_1)\end{aligned}\qquad(7.2.113)$$

由图可见，∂s_2 由 $\Delta A_0A_1A_2$ 的三条边组成，方向为逆时针。 ‖

定义 17 设 M^m 是微分流形，s_p 是 $\boldsymbol{R}^p$ 中的一个标准 p-单形。如果 C^∞-映射 $\varphi: s_p\to M^m$ 能够延拓为从 s_p 的一个邻域 $U\subset\boldsymbol{R}^p$ 到 M^m 的 C^∞-映射，则称为 M^m 上的一个可微连续 p-单形，记作

$$\sigma_p=(s_p, U, \varphi)\equiv\{\varphi: s_p\to M^m\}$$

M^m 中的可微 p-链 c_p 是指有限形式的线性组合：

$$c_p=\sum\lambda_i\sigma_p^i,\quad \lambda_i\in\boldsymbol{R}\qquad(7.2.114)$$

同样，p-单形 σ_p 的边缘 $\partial\sigma_p$ 可定义成如下的 $p-1$-单形：

$$\partial\sigma_p=\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\sigma_{p-1}^j\qquad(7.2.115)$$

（由于每个 $\varphi|_{s_{p-1}^j}$ 都可延拓为邻域 U_j 上的可微映射）其中 σ_{p-1}^j 是把映射 φ 限制在各个 s_{p-1}^j 上而得到的可微的连续 $p-1$-单形，

$$\sigma_{p-1}^j=(s_{p-1}^j, U_j, \varphi)\qquad(7.2.116)$$

∂ 称为边缘算子，它可借助于下述方法线性地延拓到链：

$$\partial: c_p\longmapsto\partial c_p=\partial\Big(\sum_i\lambda_i\sigma_p^i\Big)=\sum_i\lambda_i\partial\sigma_p^i\qquad(7.2.117)$$

对于 0-单形，令 $\partial\equiv0$，则有下述命题。

命题 14 （1）∂ 是线性的；

（2）
$$\partial\circ\partial=0\qquad(7.2.118)$$

（3）设 M^m 和 N^n 是微分流形，$\Phi: M^m\to N^n$ 是可微映射，则

$$\Phi_*(\partial c_p)=\partial(\Phi_* c_p)\qquad(7.2.119)$$

其中 c_p 是 M^m 上的可微 p-链，Φ_* 是将 M^m 上的 p-链映为

N^n上的p-链的诱导映射，定义如下：

$$\Phi_* \sigma_p = \{\Phi \circ \varphi : s_p \to N^n\}, \quad \sigma_p = \{\varphi : s_p \to M^m\} \qquad (7.2.120)$$

如图7.3所示。

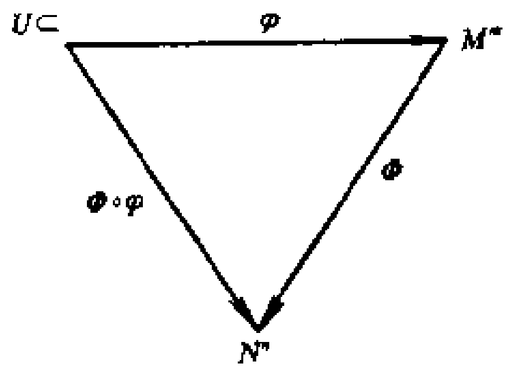


图 7.3

4．链上的积分

定义 18 设$\sigma_p = (s_p, U, \varphi)$是微分流形$M^m$上一个$p$-单形，$\omega$是$M^m$上一个$p$-形式，$(u^1, \cdots, u^m)$是$R^m$上的标准坐标，形式

$$\varphi^* \omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1 \cdots i_p} \mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_p}$$

定义在标准p-单形s_p的某个邻域U内，则定义

$$\int_{\sigma_p} \omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \int \cdots \int a_{i_1 \cdots i_p} \mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_p} \quad (7.2.121)$$

上式右边是通常的Riemann积分。

有了微分形式在p-单形上的积分，就可进一步定义它在p-链上的积分。

定义 19 p-形式ω在链$c_p = \sum_i \lambda_i \sigma_p^i$上的积分为

$$\int_{c_p} \omega = \sum_i \lambda_i \int_{\sigma_p^i} \omega \qquad (7.2.122)$$

Riemann积分理论中的Stokes定理可以推广到流形上来。

命题 15（Stokes定理） 设M^m是微分流形，对任一p-

链 c_p，$p\geqslant 1$，和可微 $p-1$- 形式 ω，有

$$\int_{\partial c_p}\omega=\int_{c_p}\mathrm{d}\omega \tag{7.2.123}$$

必须注意，p- 形式在一般情况下，仅在可定向的流形上能够被积分。

5. 定向流形上的积分

微分流形 M^m 上所有具有紧支集的 p- 形式记作 $F_c^p(M^m)$。

设 $(U, u^1, \cdots, u^m)$ 是 M^m 上的某一正图，即 $\mathrm{d}u^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^m>0$，$\omega$ 是 M^m 上一个 m- 形式，$\mathrm{supp}\,\omega\subset U$，并且 ω 有局部表示 $\omega=a\mathrm{d}u^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^m$，其中 $\mathrm{supp}\,a\subset \boldsymbol{R}$ 也是紧的，定义

$$\int_{M^m}\omega=\int_{U}\omega=\int_{\boldsymbol{R}^m}a\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^m \tag{7.2.124}$$

上式右端就是通常的 Riemann 积分。

设 M^m 是定向的流形，$\omega\in F_c^m(M^m)$。任取一个与给定的方向相容的图册 $\{(U_i, \varphi_i)\}$，设 $\{f_i\}$ 是从属于开复盖 $\{U_i\}$ 的一个单位分解，则有

$$\omega=\Big(\sum_i f_i\Big)\omega=\sum_i f_i\omega \tag{7.2.125}$$

由于 ω 是紧的，所以上式只是一个有限和式。容易看出，$\mathrm{supp}\,(f_i\omega)\subset\mathrm{supp}\,f_i\subset U_i$，定义

$$\int_{M^m}\omega=\sum_i\int_{M^m}f_i\omega \tag{7.2.126}$$

可以证明，定义 (7.2.126) 与图册的选取无关，并且不依赖于单位分解 $\{f_i\}$ 的选取。

定义 20 设 M^m 是定向的微分流形，$\omega\in F_c^m(M^m)$，由 (7.2.126) 定义的数值 $\int_{M^m}\omega$ 称为微分形式 ω 在 M^m 上的积分。

M^m 上的积分运算具有下列性质：

(1) $\int_{M^m}(\omega_1+\omega_2)=\int_{M^m}\omega_1+\int_{M^m}\omega_2$, $\forall\,\omega_1,\omega_2\in F^m_c(M^m)$

(7.2.127)

(2) $\int_{M^m}\lambda\omega=\lambda\int_{M^m}\omega$, $\forall\,\lambda\in\boldsymbol{R}$, $\forall\,\omega\in F^m_c(M^m)$

(7.2.128)

6. 流形上的Stokes定理

定义21 设 M^m 是微分流形，所谓带边区域 D 是指 M^m 的子集，其中的点分为两类：

（1）内点即在 M^m 中有该点的一个邻域包含在 D 内；

（2）边界点，其定义是：x 是边界点，则存在含 x 的一张图 (U,φ)，$\varphi(x)=(u^1,\cdots,u^m)\in\boldsymbol{R}^m$，使得 $u^m=0$，并且

$$U\cap D=\{y\mid y\in U,\ u^m(y)=0\}\tag{7.2.129}$$

D 的边界点集称为 D 的边界，记作 ∂D。

如果 M^m 是可定向的微分流形，D 是其带边区域，则 ∂D 是 M^m 的一个 $(m-1)$ 维可定向的子流形，其方向是由 M^m 的方向诱导出来的。若 M^m 的方向由 $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m>0$ 给定，则 ∂D 的方向由

$$\omega=(-1)^m dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{m-1}>0$$

给定。

命题17（Stokes定理） 设 D 是定向流形 M^m 上的带边区域，ω 是 M^m 上有紧支集的 $m-1$- 形式，则

$$\int_D d\omega=\int_{\partial D}i^*\omega\tag{7.2.130}$$

这里把 ∂D 看作一个带有方向（由 M^m 的方向诱导）的定向子流形。$i:\partial D\to M^m$ 是标准的单射。如果 $\partial D=\phi$，则 $\int_D d\omega=0$。

例5 设 $M^m=\boldsymbol{R}^1$，$D=[a,b]$ 是 $\boldsymbol{R}^1$ 中的一个闭区间，则有向边界 $\partial D=\{b\}-\{a\}$。设 f 是 D 上的连续可微函数，则有微

积分中的基本公式

$$\int_D \mathrm{d}f = \int_{\partial D} f = f(b) - f(a) \qquad (7.2.131)$$

§7.3 Hamilton 力学的几何描述

本节介绍辛流形，积分不变量，Poisson 括号，Noether 定理，正则变换，非定常力学，Hamilton 原理，Hamilton-Jacobi 方程的几何意义等。

7.3.1 辛流形

设 M^{2m} 是一偶数维的微分流形。所谓 M^{2m} 上的一个辛结构是指 M^{2m} 上一个非退化的闭 2- 形式 Ω:

$$\mathrm{d}\Omega = 0,\quad \forall X \neq 0,\quad \exists Y \text{ 使得 } \Omega(X, Y) \neq 0 \qquad (7.3.1)$$

其中 X、$Y \in T_x M^{2m}$，$x \in M^{2m}$。

(M^{2m}, Ω) 称为辛流形。

设 M^m 是微分流形，则余切丛 T^*M^m 是 $2m$ 维的微分流形。如果 $\{q^1, \cdots, q^m\}$ 是 M^m 上的局部坐标系，$\{q^1, \cdots, q^m, p_1, \cdots, p_m\}$ 是 T^*M^m 上对应的局部坐标系，则余切丛 T^*M^m 上存在一个标准的自然辛结构，其局部表示为

$$\Omega = \sum_i \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i \qquad (7.3.2)$$

它由 T^*M^m 上的一个标准 1- 形式 θ 的外导数给出。θ 具有局部表示

$$\theta = \sum_i p_i \mathrm{d}q^i \qquad (7.3.3)$$

θ 亦称为 Cartan 形式，它是内蕴而整体地有定义。

可以证明[1~3]，流形 M^{2m} 上如果有一个辛结构 Ω，则 $\forall x \in M^{2m}$，总存在含 x 的局部图 $\{q^i, p_i\}$，使得 Ω 取标准形 (7.3.2)。

这个图称为辛图，亦称为Hamilton坐标。这就是所谓的Darboux定理，它表示同样维数的辛流形从局部上来说是相同的。

设 M^m, N^n 是微分流形，在后面的叙述中，除特别指出外，T^*M^m 表记为 M^{2m}，T^*N^n 表记为 N^{2n}。

辛流形 (M^{2m}, Ω) 上的辛结构 Ω 决定了一个映射

$$\Omega: TM^{2m} \to T^*M^{2m}; X \mapsto i_X\Omega \tag{7.3.4}$$

它是一个从同构映射，即一个从 TM^{2m} 到 T^*M^{2m} 的微分同胚，且 $\Omega_x: T_xM^{2m} \to T_x^*M^{2m}$ 是一个纤维的线性同构映射，$x \in M^{2m}$。由式（7.3.2）和（7.3.4）可得如下命题[3]。

命题 1　设 $\{q^i, p_i\}$ 是 (M^{2m}, Ω) 的Hamilton坐标，则映射 Ω 和 Ω^{-1} 有局部表示

$$\Omega\left(\sum_i\left(a_i\frac{\partial}{\partial p_i}+b^i\frac{\partial}{\partial q^i}\right)\right)=\sum_i(-b^i\mathrm{d}p_i+a_i\mathrm{d}q^i) \tag{7.3.5}$$

$$\Omega^{-1}\left(\sum_i(f^i\mathrm{d}p_i+g_i\mathrm{d}q^i)\right)=\sum_i\left(g_i\frac{\partial}{\partial p_i}-f^i\frac{\partial}{\partial q^i}\right) \tag{7.3.6}$$

其中 $a_i, b^i, f^i, g_i \in C(M^{2m})$。

设 $H \in C^r(M^{2m})$，由下式定义的矢量场 X_H：

$$X_H = -\Omega^{-1}\mathrm{d}H \tag{7.3.7}$$

或等价地

$$\mathrm{d}H = -i_{X_H}\Omega \tag{7.3.8}$$

称为Hamilton矢量场，H 称为它的Hamilton函数。

(M^{2m}, Ω, X_H) 称为一个Hamilton系统。因此，定常Hamilton力学系统的数学模型由一个辛流形和一个Hamilton矢量场给出。

由式（7.3.6）知，Hamilton矢量场 X_H 在辛图 $\{p_i, q^i\}$ 下可局部表示为

$$X_H=\sum_i\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right) \tag{7.3.9}$$

由式（7.2.73）知，矢量场 X_H 的积分曲线 $\gamma(t):[a,b]\to M^{2m}$：$t\mapsto(q^i(t),p_i(t))$ 是 Hamilton 微分方程组

$$\dot{q}^i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q^i}\tag{7.3.10}$$

的解。这样，我们得到了一种在辛流形上建立 Hamilton 方程的不变的方法。

显然，Hamilton 矢量场 X_H 的积分曲线 $\gamma(t)$ 就是系统的解曲线，因此又称之为系统的轨线。

定义 1 如果对任意 $x\in M^{2m}$，存在含 x 的邻域 $U\subset M^{2m}$，使得辛流形（M^{2m},Ω）上的矢量场 X 限制在 U 上是 Hamilton 的，则称 X 为局部 Hamilton 矢量场。

显然，Hamilton 矢量场一定是局部 Hamilton 的。但反之则不然。

对于 $X\in\mathscr{X}(M^{2m})$，以下几种说法是等价的：

（1）X 是局部 Hamilton 的；

（2）$i_X\Omega$ 是闭形式；

（3）$\mathscr{L}_X\Omega=0$，即由 X 生成的流 γ_t 保持辛结构，$\gamma_t^*\Omega=\Omega$。

〔证明〕（1）$\Longleftrightarrow$（2）：X 是局部 Hamilton 矢量场的必要充分条件是 $i_X\Omega$ 是局部恰当的。由 Poincaré 引理知，$i_X\Omega$ 是局部恰当的 $\Longleftrightarrow \mathrm{d}i_X\Omega=0$，即 $i_X\Omega$ 是闭的。

（2）$\Longleftrightarrow$（3）：因 $\mathscr{L}_X\Omega=i_X\mathrm{d}\Omega+\mathrm{d}i_X\Omega$，而 $\mathrm{d}\Omega=0$，所以 $\mathscr{L}_X\Omega=0\Longleftrightarrow \mathrm{d}i_X\Omega=0$，即 $i_X\Omega$ 是闭的。又因

$$\mathscr{L}_X\Omega=\lim_{t\to 0}\frac{(\gamma_t^*\Omega-\Omega)}{t}$$

故 $\mathscr{L}_X\Omega=0\Longleftrightarrow\gamma_t^*\Omega=\Omega$，即 γ_t 保持辛结构 Ω。 ∎

命题 2 设 $\{p_i,q^i\}$ 是辛流形（M^{2m},Ω）上的辛图。如果 $X\in\mathscr{X}(M^{2m})$ 是一个局部 Hamilton 矢量场，它的局部 Hamilton 函数是 $H\in F^0(U)$，$U\subset M^{2m}$，则 $\gamma:t\mapsto(q^i(t),p_i(t))$ 是 X 的积分曲线的必要充分条件是：对任何辛图有

$$\dot{q}^i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{7.3.11}$$

〔证明〕 X是局部Hamilton矢量场，意味着 $\mathrm{d}H=-i_X\Omega$，即 $X=-\Omega^{-1}\mathrm{d}H$，从而定理结论得证。 ‖

7.3.2 积分不变量

积分不变量有绝对积分不变量、相对积分不变量和弱相对积分不变量三种。

1. 绝对积分不变量

设 $\gamma: M^{2m}\to M^{2m}$ 是可微映射。

定义 2 设 $\omega\in F^p(M^{2m})$，如果对 M^{2m} 上的任一p-链 c，有

$$\int_{\gamma_* c}\omega=\int_c \omega \tag{7.3.12}$$

则称 ω 是关于映射 γ 的绝对积分不变量。

由于

$$\int_{\gamma_* c}\omega=\int_c \gamma^*\omega \tag{7.3.13}$$

所以，$\gamma^*\omega=\omega$ 为 ω 是关于映射 γ 的绝对积分不变量的必要充分条件。进一步，如果 γ_t 是由矢量场X生成的。由 Lie 导数的定义知，$\gamma_t^*\omega=\omega$ 的必要充分条件是 $\mathscr{L}_X\omega=0$。

命题 3 设 γ_t 是由辛流形 (M^{2m},Ω) 上矢量场X生成的流，如果 ω、η 是关于 γ_t 的绝对积分不变量，则

（1）$i_X\omega$ 是关于 γ_t 的绝对积分不变量；

（2）$\mathrm{d}\omega$ 是关于 γ_t 的绝对积分不变量；

（3）$\omega\wedge\eta$ 是关于 γ_t 的绝对积分不变量。

〔证明〕（1）$\mathscr{L}_X(i_X\omega)=i_X(\mathscr{L}_X\omega)=0$

（2）$\mathscr{L}_X(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}\mathscr{L}_X\omega=0$

（3）$\mathscr{L}_X(\omega\wedge\eta)=\mathscr{L}_X\omega\wedge\eta+\omega\wedge\mathscr{L}_X\eta=0$

所以 $i_X\omega,\mathrm{d}\omega,\omega\wedge\eta$ 是关于 γ_t 的绝对积分不变量。 ‖

如果 γ_t 是由局部Hamilton矢量场X生成的流，则由$\gamma_t^*\Omega=\Omega$而知 Ω 是关于映射 γ_t 的绝对积分不变量。于是，有下面的命题。

命题 4 设X是辛流形 (M^{2m},Ω) 上的局部 Hamilton 矢量场，γ_t 是由X生成的流，则 $\Omega,\Omega\wedge\Omega=\Omega^2,\cdots,\Omega^m$ 是关于 γ_t 的绝对积分不变量。

利用命题 3 即可证明，略。

在辛图下，Ω 有标准形 $\Omega=\sum\limits_i \mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}q^i$，而

$$\Omega^k=h_k\sum_{i_1<\cdots<i_k}\mathrm{d}p_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}p_{i_k}\wedge\mathrm{d}q^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{i_k}\quad(7.3.14)$$

其中 h_k 为确定的非零常数。记

$$\omega_k=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\mathrm{d}p_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}p_{i_k}\wedge\mathrm{d}q^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{i_k}\quad(7.3.15)$$

则 ω_k 也是关于 γ_t 的绝对积分不变量。特别是，当 $k=m$ 时，有

$$\omega_m=\frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{m!}\overbrace{\Omega\wedge\cdots\wedge\Omega}^{m\text{个}}$$

$$=\mathrm{d}p_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}p_m\wedge\mathrm{d}q^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^m\quad(7.3.16)$$

ω_m 称为 Liouville 形式，它是一个体积式。命题 4 包含了统计力学中著名的 Liouville 定理。

2. 相对积分不变量·弱相对积分不变量

定义 3 设 $\gamma:M^{2m}\to M^{2m}$ 是可微映射，$\omega\in F^p(M^{2m})$，如果对 M^{2m} 上的任何闭链 c，即 $\partial c=0$，有

$$\int_c\omega=\int_{\gamma_*c}\omega\quad(7.3.17)$$

则称 ω 是关于映射 γ 的相对积分不变量。

由定义 2 和定义 3 可以看出，绝对积分不变量一定是相对积分不变量，但反之，则不然。

命题 5 如果 ω 是 γ 的相对积分不变量，则 $\mathrm{d}\omega$ 是关于 γ 的

绝对积分不变量。

〔证明〕 由 Stokes 定理知，对任意 $k+1$-链 c，有

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega \tag{7.3.18}$$

而
$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\gamma_* \partial c} \omega = \int_{\partial \gamma_* c} \omega = \int_{\gamma_* c} d\omega \tag{7.3.19}$$

故
$$\int_c d\omega = \int_{\gamma_* c} d\omega \tag{7.3.20}$$

即 $d\omega$ 是关于 γ 的绝对积分不变量。 ‖

需注意的是，命题 5 的逆命题不成立，因为并不是任何闭 k-链都能成为某个 $k+1$-链的边界（但在欧氏空间中，任一闭链 c 均是某一链 σ 的边界）。

定义 4 如果存在链 σ 使得链 $c=\partial\sigma$，则称 c 为恰当链。若对 M^{2m} 上的任意恰当链 c，有

$$\int_c \omega = \int_{\gamma_* c} \omega \tag{7.3.21}$$

就称 ω 为关于映射 γ 的弱相对积分不变量。

显然，如果 $d\omega$ 是绝对积分不变量，则 ω 一定是关于 γ 的弱相对积分不变量。

设 $\{p_i, q^i\}$ 是辛图，令

$$\omega_r^k = \sum_{i_1<\cdots<i_k} p_{i_r} dp_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\hat{p}_{i_r}\wedge\cdots\wedge dp_{i_k}\wedge dq^{i_1}\wedge\cdots\wedge dq^{i_k},$$

$$(k=1,\cdots,m;\ 1\leqslant r\leqslant k) \tag{7.3.22}$$

式中"^"号表示略去该项。则

$$d\omega_r^k = (-1)^{r-1}\sum_{i_1<\cdots<i_k} dp_{i_1}\wedge\cdots\wedge dp_{i_k}\wedge dq^{i_1}\wedge\cdots\wedge dq_{i_k}$$
$$= (-1)^{r-1}\omega_k \tag{7.3.23}$$

当 $r=1$ 时，有

$$\omega_1^k = h_k^1 \theta \wedge \overbrace{\Omega \wedge \cdots \wedge \Omega}^{k-1\text{个}} \tag{7.3.24}$$

式中 h_k^1 为非零常数。特别是，当 $k=1$ 时，ω^1 为标准 Cartan 形式

$$\theta = \omega^1 = \sum_i p_i \mathrm{d}q^i \tag{7.3.25}$$

令
$$\tilde{\omega}_r^k = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} q^{i_r} \mathrm{d}p_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}p_{i_k} \wedge \mathrm{d}q^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\hat{q}^{i_r} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{i_k} \quad (k=1,\cdots,m;\ 1\leqslant r\leqslant k) \tag{7.3.26}$$

则因

$$\mathrm{d}\tilde{\omega}_r^k = (-1)^{k+r-1}\omega_k \tag{7.3.27}$$

而知有如下的命题。

命题 6 设 X 是 M^{2m} 上的局部 Hamilton 矢量场，γ_t 是由 X 生成的流，则 $\omega_r^1, \cdots, \omega_r^m, \tilde{\omega}_r^1, \cdots, \tilde{\omega}_r^m$ 是关于 γ_t 的弱相对积分不变量。

在经典力学中，在恰当链 c 上的积分

$$\int_c \omega^1 = \int_c \theta$$

称为 Poincaré 通用积分不变量。命题 6 包含了这一结论。

7.3.3 Poisson 括号

定义 5 设 f、$g \in F^0(M^{2m})$，函数

$$\{f,g\} = i_{X_f} i_{X_g} \Omega \tag{7.3.28}$$

称为 f 和 g 的 Poisson 括号。

式（7.3.28）亦可写成（因 $i_X i_Y \Omega = \Omega(Y,X)$）

$$\{f,g\} = \Omega(X_g, X_f) \tag{7.3.29}$$

命题 7 （1） $\{f,g\} = -\mathscr{L}_{X_f} g = \mathscr{L}_{X_g} f$ （7.3.30）

（2） $\{f,g\} = (\Omega^{-1}\mathrm{d}f)g = -(\Omega^{-1}\mathrm{d}g)f = -\{g,f\}$ （7.3.31）

（3）　$X_{\{f,g\}}=-[X_f,X_g]$　(7.3.32)

（4）　$\{f,\{g,h\}\}=\{\{f,g\},h\}+\{g,\{f,h\}\}$　(7.3.33)

〔证明〕（1）$\{f,g\}=i_{X_f}i_{X_g}\Omega=+i_{X_f}(-\mathrm{d}g)$

$$=-X_f g=-\mathscr{L}_{X_f}g \tag{7.3.34}$$

因 $i_X i_Y\Omega=-i_Y i_X\Omega$，故

$$\{f,g\}=-i_{X_g}i_{X_f}\Omega=-(-X_g f)=\mathscr{L}_{X_g}f \tag{7.3.35}$$

（2）　$(\Omega^{-1}\mathrm{d}f)g=-X_f g=\{f,g\}$　(7.3.36)

而 $X_f g=-X_g f$，故

$$\begin{aligned}(\Omega^{-1}\mathrm{d}f)g&=-X_f g=X_g f=-(\Omega^{-1}\mathrm{d}g)f\\&=-\{g,f\}\end{aligned} \tag{7.3.37}$$

（3）因

$$\mathrm{d}\{f,g\}=-i_{X_{\{f,g\}}}\Omega \tag{7.3.38}$$

而

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\{f,g\}&=\mathrm{d}(-X_f g)=-X_f(\mathrm{d}g)\\&=-X_f(-X_g\lrcorner\Omega)=X_f(X_g\lrcorner\Omega)\end{aligned} \tag{7.3.39}$$

$$\begin{aligned}[X_f,X_g]\lrcorner\Omega&=i_{[X_f,X_g]}\Omega=[\mathscr{L}_{X_f},i_{X_g}]\Omega\\&=\mathscr{L}_{X_f}i_{X_g}\Omega-i_{X_g}\mathscr{L}_{X_f}\Omega\\&=\mathscr{L}_{X_f}i_{X_g}\Omega=X_f(X_g\lrcorner\Omega)\end{aligned} \tag{7.3.40}$$

所以

$$\mathrm{d}\{f,g\}=[X_f,X_g]\lrcorner\Omega=i_{[X_f,X_g]}\Omega \tag{7.3.41}$$

即　$X_{\{f,g\}}=-[X_f,X_g]=[X_g,X_f]$　(7.3.42)

（4）$\{f,\{g,h\}\}=-X_f(\{g,h\})=-X_f(-X_g(h))$

$$\begin{aligned}&=-X_{\{f,g\}}(h)+X_g(X_f(h))\\&=\{\{f,g\},h\}+\{g,\{f,h\}\}\end{aligned}$$

Poisson 括号可以用来判别系统的首次积分。

命题 8　设 X^i 是局部 Hamilton 矢量场，其局部 Hamilton 函数是 H^i，γ_t^i 是 X^i 的轨线（即由 X^i 生成的流），$i=1, 2$，则

（1）对 $f\in F^0(M^{2m})$，f 在轨线 γ_t^i 上等于常数的充分必

要条件是$\{H^i, f\}=0$；

（2）H^i 在轨线 $\gamma_t^j (i\neq j, i、j=1,2)$ 上等于常数的充分必要条件是 H^j 在轨线 γ_t^i 上等于常数；

（3）H^i 在轨线 γ_t^i 上等于常数。

〔证明〕（1）f 在轨线 γ_t^i 上等于常数，意味着 $(\gamma_t^i)^* f = f$，而此式成立的充分必要条件是

$$\mathscr{L}_{X^i} f = -\{H^i, f\} = 0 \qquad (7.3.43)$$

（2）因$\{H^i, H^j\}=0 \Longleftrightarrow \{H^j, H^i\}=0$，由（1）知$\{H^i, H^j\}=0$ 意味着 H^j 在轨线 γ_t^i 上等于常数，而 $\{H^j, H^i\}=0$ 意味着 H^i 在轨线 γ_t^j 上等于常数。

（3）由$\{H^i, H^i\}\equiv 0$ 即得证。 ‖

由式（7.3.6）、（7.3.7）知，在辛图 $\{p_i, q^i\}$ 下，Poisson 括号可表示为

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) \qquad (7.3.44)$$

7.3.4 Noether 定理

命题 9 设 φ_t 是辛流形 (M^{2m}, Ω) 上的单参数变换群，它由矢量场 $Y \in \mathscr{X}(M^{2m})$ 生成，$H \in F^0(M^{2m})$。如果存在 $f \in F^0(M^{2m})$，使得 $X_f = Y$（这意味着 Y 是 Hamilton 矢量场），并且 φ_t 是一个动力学对称群，即 $\varphi_t^* H = H$，则 f 在 X_H 的轨线上等于常数，即 f 是系统 (M^{2m}, Ω, H) 的运动守恒量。

〔证明〕 因 $X_f = Y$，所以 $\mathrm{d}f = -Y \lrcorner \Omega$。而

$$\begin{aligned}(Y \lrcorner \Omega)(X_H) &= \Omega(Y, X_H) = -\Omega(X_H, Y) \\ &= (-X_H \lrcorner \Omega)(Y) = \mathrm{d}H(Y) \\ &= Y(H) = \mathscr{L}_Y H \end{aligned} \qquad (7.3.45)$$

$$\varphi_t^* H = H \Longleftrightarrow \mathscr{L}_Y H = 0 \qquad (7.3.46)$$

所以

$$\mathrm{d}f(X_H) = \mathscr{L}_{X_H} f = 0 \qquad (7.3.47)$$

即 f 在 X_H 的轨线上等于常数。 ‖

命题 9 就是著名的 Noether 定理，它揭示了系统的运动守恒量和矢量场之间的内在联系，即任何一个守恒量均可通过一个矢量场来生成。

例 1 设 $H=p_1q^1+p_2q^2$，单参变换群为绕第 3 轴的旋转群

$$t\mapsto a_3(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & 0\\ \sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{7.3.48}$$

它对应的矢量场为

$$\begin{aligned}Y&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}a_3(t) & 0\\ 0 & a_3(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q\\ p\end{pmatrix}\\ &=(q^2,-q^1,0,p_2,-p_1,0)^T\end{aligned} \tag{7.3.49}$$

因

$$\begin{aligned}Y\lrcorner\Omega&=p_2\mathrm{d}q^1+q^1\mathrm{d}p_2-(q^2\mathrm{d}p_1+p_1\mathrm{d}q^2,)\\ &=\mathrm{d}f=\mathrm{d}(p_2q^1-p_1q^2)\end{aligned} \tag{7.3.50}$$

将式（7.3.49）代入 $\mathscr{L}_YH=i_Y\mathrm{d}H$ 中，计算得

$$\mathscr{L}_YH=0$$

故旋转群是系统（M^{2m},Ω,H）的对称群，从而

$$f=p_2q^1-p_1q^2 \tag{7.3.51}$$

是系统的运动守恒量。 ‖

7.3.5 正则变换

1. 正则变换

对于如下的坐标变换

$$M^{2m}\to M^{2m};\ (q,p)\mapsto(q',p') \tag{7.3.52}$$

在一般情况下，运动方程的正则形式可能丧失，从而 Hamilton 方法失效。但对于某些特殊的变换，正则形式将得以保持，即使得方程由

$$\dot{q}^i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

变为

$$\dot{q}^{i'}=\frac{\partial H}{\partial p'_i},\quad \dot{p}'_i=-\frac{\partial H}{\partial q^{i'}}$$

这正是我们感兴趣的。

定义 6 设 (M^{2m},Ω_1) 和 (N^{2m},Ω_2) 是两个辛流形，φ: $M^{2m}\to N^{2m}$ 是微分同胚。如果 $\varphi^*\Omega_2=\Omega_1$，则称 φ 是辛的（一个辛同构）或一个正则变换。

设 $\{p_i,q^i\}$ 和 $\{p'_i,q^{i'}\}$ 分别是 M^{2m} 和 N^{2m} 上的局部坐标系，变换 $\varphi:M^{2m}\to N^{2m}:(p_i,q^i)\mapsto(p'_i,q^{i'})$ 是微分同胚。令 $p_i=x^i$，$q^i=x^{i+m}$，$p'_i=y^i$，$q^{i'}=y^{m+i}$，$i=1,\cdots,m$，则

$$\Omega_1=\sum a_{ij}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j,\quad \Omega_2=\sum b_{ij}\mathrm{d}y^i\wedge\mathrm{d}y^j \tag{7.3.53}$$

从而[3] φ 是辛同构 $\Longleftrightarrow \varphi^*\Omega_2=\Omega_1\Longleftrightarrow J^TAJ=B$，其中

$$(J)_{ij}=\frac{\partial x^i}{\partial y^j},\quad (A)_{ij}=a_{ij},\quad (B)_{ij}=b_{ij} \tag{7.3.54}$$

显然，当 $N^{2m}=M^{2m}$ 时，变换 φ

$$\varphi:M^{2m}\to M^{2m}:\{q^i,p_i\}\mapsto\{q^{i'},p'_i\} \tag{7.3.55}$$

是辛同构，意味着 $\varphi^*\Omega=\Omega$，也就是说 Ω 对 (p,q) 和 (p',q') 有同样的表示式

$$\Omega=\sum \mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}q^i=\sum\mathrm{d}p'_i\wedge\mathrm{d}q^{i'} \tag{7.3.56}$$

这是因为对任意 $X_1,X_2\in\mathscr{X}(M^{2m})$，有

$$\varphi^*\Omega=\Omega\Longleftrightarrow\Omega(X_1,X_2)=\Omega(\varphi_*X_1,\varphi_*X_2) \tag{7.3.57}$$

对于正则变换 $\varphi:M^{2m}\to M^{2m}$，由式（7.3.56）和（7.2.58）可得

$$\sum_j\frac{\partial(p'_j,q^{j'})}{\partial(p_i,q^k)}=\delta_{ik}$$

$$\sum_j\frac{\partial(p'_j,q^{j'})}{\partial(p_i,p_k)}=\sum_j\frac{\partial(p'_j,q^{j'})}{\partial(q^i,q^k)}=0 \tag{7.3.58}$$

如引进前述的矩阵 J，则由 φ 正则可得

$$J^TGJ=G \tag{7.3.59}$$

其中
$$G=\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$
I 是单位矩阵。

例 2 设 $\varphi:M^{2m}\to M^{2m}$ 是一个由下式定义的变换：
$$p_i\circ\varphi=\varphi^*(p_i)=-q^i$$
$$q^i\circ\varphi=\varphi^*(q^i)=p_i$$
因
$$\varphi^*\left(\sum_i \mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}q^i\right)=\sum_i \mathrm{d}\varphi^*p_i\wedge\mathrm{d}\varphi^*q^i$$
$$=\sum_i \mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}q^i$$
故 φ 是正则变换。 ‖

命题 10[3] 设 (M^{2m},Ω_1) 和 (N^{2m},Ω_2) 是辛流形，$\varphi:M^{2m}\to N^{2m}$ 是微分同胚，则下述说法等价：

（1）对任意 $\omega\in F^1(N^{2m})$，有
$$\Omega_1^{-1}(\varphi^*\omega)=\varphi_*^{-1}(\Omega_2^{-1}\omega) \tag{7.3.60}$$
或写成
$$\varphi_*(\Omega_1^{-1}(\varphi^*\omega))=\Omega_2^{-1}\omega \tag{7.3.61}$$
（2）对任意 $h\in F^0(N^{2m})$，有
$$\varphi_*^{-1}X_h=X_{h\circ\varphi}，\text{即}\ \varphi_*X_{h\circ\varphi}=X_h \tag{7.3.62}$$
（3）对任意 f、$g\in F^0(N^{2m})$，有
$$\varphi^*\{f,g\}=\{\varphi^*f,\varphi^*g\} \tag{7.3.63}$$
（4）φ 是辛同构。

证略。式（7.3.63）说明正则变换保持 Poisson 括号。

命题 11 已知变换 $\varphi:M^{2m}\to M^{2m}:q^{i'}=q^{i'}(p,q)$，$p'_i=p'_i(p,q)$，如果 1-形式
$$\omega=\sum_i(p_i\mathrm{d}q^i-p'_i\mathrm{d}q^{i'}) \qquad (7\quad 6\ )$$
是闭的，则 φ 是一个正则变换。此外，逆命题只是局部地成立。

〔证明〕（1）因为 ω 是闭的，所以

$$\sum_i \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i = \Omega = \sum_i \mathrm{d}p'_i \wedge \mathrm{d}q^{i'} = \Omega'$$
$$= \varphi^* \Omega \tag{7.3.65}$$

从而 φ 是正则的。

（2）由式（7.3.2）、（7.3.3）及 $\varphi^*\Omega = \Omega$ 可得

$$\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta' \Longleftrightarrow \mathrm{d}(\theta - \theta') = 0 \tag{7.3.66}$$

于是在某个开邻域 U，存在函数 $\eta \in F^0(U)$，使得

$$\theta = \theta' + \mathrm{d}\eta \tag{7.3.67}$$ ‖

命题 11 是分析力学中一个熟知的结论，经常被用来判断变换是否是正则的。

命题 12 Hamilton 运动方程

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{7.3.68}$$

在正则变换下变为同样类型的方程。

〔证明〕 因

$$X_H = -\Omega^{-1}\mathrm{d}H = -(\varphi^*\Omega)^{-1}\mathrm{d}H = -(\Omega')^{-1}\mathrm{d}H$$

其中 $\varphi:(p,q) \mapsto (p',q')$ 是正则变换，故有局部表示

$$X_H = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial H^*}{\partial p'_i} \frac{\partial}{\partial q^{i'}} - \frac{\partial H^*}{\partial q^{i'}} \frac{\partial}{\partial p'_i} \right) \tag{7.3.69}$$

从而 $\gamma:(a,b) \to M^{2m}$ 是 X_H 的积分曲线的充要条件是：对于 $H^*(p'_i, q^{i'}) = (\varphi^{-1})^* H(p_i, q^i) = H(p_i(p', q'),\ q^i(p', q'))$，有

$$\dot{q}^{i'} = \frac{\partial H^*}{\partial p'_i}, \quad \dot{p}'_i = -\frac{\partial H^*}{\partial q^{i'}} \tag{7.3.70}$$ ‖

命题 12 的存在，使我们能够通过正则变换简化 H 的表达式（如使 $H^*(p'_i, q^{i'}) = H(p_i(p', q'),\ q^i(p',\ q')) =$ 常数），从而使方程（7.3.70）变得更简单、更易于求解。这样，就将解较复杂的方程（7.3.68）变为解简单的方程（7.3.70）。

2．生成函数

正则变换可以用某些“生成函数”构造出来。

命题 13 设 $F(q,p')$ 是辛流形 (M^{2m},Ω) 上的一个可微函数，$\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial p'_i}\right) \neq 0$ 处处成立。如果变换 $\varphi: M^{2m} \to M^{2m}$，$\varphi \in C^\infty$ 由下式定义：

$$q^i = q^i,\ p_i = \frac{\partial F}{\partial q^i};\ q^{i'} = \frac{\partial F}{\partial p'_i},\ p'_i = p'_i \qquad (7.3.71)$$

则 φ 是一个（由 F 生成的）正则变换。

〔证明〕 因

$$\mathrm{d}\left(\sum_i p'_i q^{i'} - F\right) = \sum_i q^{i'} \mathrm{d}p'_i + \sum_i p'_i \mathrm{d}q^{i'} - \sum_i \frac{\partial F}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i - \sum_i \frac{\partial F}{\partial p'_i}\mathrm{d}p'_i \qquad (7.3.72)$$

将式（7.3.71）代入式（7.3.72），得

$$\mathrm{d}\left(\sum_i p'_i \mathrm{d}q^{i'} - F\right) = \sum_i p'_i \mathrm{d}q^{i'} - \sum_i p_i \mathrm{d}q^i \qquad (7.3.73)$$

故

$$\varphi^* \Omega = \sum_i \mathrm{d}p'_i \wedge \mathrm{d}q^{i'} = \sum_i \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i = \Omega \qquad (7.3.74)$$

从而 φ 是正则变换。

由式（7.3.71）定义的变换 $\varphi:(p,q) \mapsto (p',q')$ 称为由 F 生成的，F 称为生成函数（亦称母函数）。

3. 无限小接触变换

命题 14 设生成函数为

$$F' = \sum p'_i q^i + \varepsilon \bar{F}(q^i, p'_i) \qquad (7.3.75)$$

其中 ε 为无限小量。则无限小接触变换由下式给出：

$$q^{i'} = q^i + \varepsilon \frac{\partial \bar{F}}{\partial p'_i},\ p'_i = p_i - \varepsilon \frac{\partial \bar{F}}{\partial q^i} \qquad (7.3.76)$$

〔证明〕 由式(7.3.75)和(7.3.71)可立即得到式(7.3.76)。‖

显然，当 $\epsilon=0$ 时，由生成函数 $F'=\sum_i p'_i q^i$ 生成的正则变换 (7.3.76) 是恒等变换。

令 $t\mapsto\varphi_t$ 为 M^{2m} 中的由矢量场 Y 生成的单参数变换群，$F: M^{2m}\to\boldsymbol{R}$ 是 C^∞-函数。于是，当且仅当

$$\sum_i \frac{\partial F}{\partial q^i} Y_{m+i}+\sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} Y_i=0 \qquad (7.3.77)$$

时，F 在 φ_t-轨线上等于常数。其中 Y_i、Y_{m+i} 是 Y 的分量

$$Y=\sum_i\left(Y_i\frac{\partial}{\partial p_i}+Y_{m+i}\frac{\partial}{\partial q^i}\right) \qquad (7.3.78)$$

若设

$$Y_i=-\frac{\partial F}{\partial q^i},\quad Y_{m+i}=\frac{\partial F}{\partial p_i} \qquad (7.3.79)$$

则式 (7.3.77) 恒成立，从而 F 在 φ_t-轨线上等于常数，Y 称为无限小接触变换。如果存在 F 使得式 (7.3.79) 成立，则对应的无限小接触变换单参数群是 $\{\varphi_t|-\infty<t<+\infty\}$。生成函数 F 唯一地确定 $\{\varphi_t\}$，且除了一个相加常数外，$\{\varphi_t\}$ 唯一地确定 F[3]。

7.3.6 非定常力学

定常 Hamilton 力学是用辛流形 (M^{2m},Ω) 及其上的 Hamilton 矢量场 X_H 表征的。非定常 Hamilton 力学用接触流形 $M^{2m}\times\boldsymbol{R}$ 及其上一个与时间有关的矢量场来描述。

记 $\overline{M}^{2m}=M^{2m}\times\boldsymbol{R}$，$\pi:\overline{M}^{2m}\to M^{2m}:\pi(p,q,t)=(p,q)$ 表示投影。设光滑的非定常 Hamilton 函数为

$$H:\overline{M}^{2m}\to\boldsymbol{R},\ (p,q,t)\mapsto H(p,q,t) \qquad (7.3.80)$$

令

$$\Omega_H=\pi^*\Omega-\mathrm{d}H\wedge\mathrm{d}t=\mathrm{d}(\pi^*\theta-H\mathrm{d}t) \qquad (7.3.81)$$

则对任意 $t\in\boldsymbol{R}$，Ω_H 在子流形 $\overline{M}^{2m}_t=(\overline{M}^{2m},t)$ 上的限制定义了一个与 (M^{2m},Ω) 微分同胚的辛流形 $(\overline{M}^{2m}_t,\Omega_H/\overline{M}^{2m}_t)$，而函数

$H_t(p,q)\equiv H(p,q,t):M^{2m}\to\boldsymbol{R}$ 给出一个 $\bar{M}_t^{2m}$ 上的Hamilton矢量场 X_{H_t}，仍记作 X_H。于是，X_H 诱导出 $\bar{M}^{2m}$ 上的一个矢量场 $\bar{X}_H$，它在 (p,q,t) 处等于 $(X_H,0)$。

命题 15 在 $\bar{M}^{2m}$ 上存在一个矢量场 $\bar{X}_H$，它满足 $i_{\bar{X}_H}\Omega_H=0$，且由下式给出：

$$\bar{X}_H=\frac{\partial}{\partial t}+X_H=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_i\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right) \tag{7.3.82}$$

矢量场 $\bar{X}_H$ 除一个标量因子外是唯一的。

〔证明〕
$$\begin{aligned}\bar{X}_H\lrcorner\Omega_H&=\left(\frac{\partial}{\partial t}+X_H\right)\lrcorner(\pi^*\Omega-\mathrm{d}H\wedge\mathrm{d}t)\\&=\mathrm{d}H_t+X_H\lrcorner\pi^*\Omega-X_H\lrcorner(\mathrm{d}H\wedge\mathrm{d}t)\\&=\mathrm{d}H_t-\mathrm{d}H_t-X_H\lrcorner(\mathrm{d}H_t\wedge\mathrm{d}t)\\&=(i_{X_H}i_{X_H}\Omega)\mathrm{d}t=0\end{aligned} \tag{7.3.83}$$

其中 $$H_t(p,q)\equiv H(p,q,t)$$ ‖

命题 16 （1）设 $\gamma:[a,b]\to\bar{M}^{2m}$ 是一条 C^∞-路径，则 $\gamma(t)$ 是矢量场 $\bar{X}_H$ 的一条积分曲线的充分必要条件是：$\gamma(t)$ 是 Hamilton 方程

$$\dot{q}^i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

的一个解。

（2）函数 $f:\bar{M}^{2m}\to\boldsymbol{R}$ 在 $\bar{X}_H$ 的轨线上守恒的充分必要条件是

$$\bar{X}_H f=\frac{\partial f}{\partial t}+\{f,H\}=0 \tag{7.3.84}$$

〔证明〕（1）由 $\bar{X}_H$ 的表达式（7.3.83）及矢量场的积分曲线的定义即知，$\gamma(t)$是 $\bar{X}_H$ 的积分曲线的充分必要条件是

$$\dot{t}=1 \tag{7.3.85}$$

及
$$\dot{q}^i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

显然，式（7.3.85）恒成立。

（2）函数 f 在 $\bar{X}_H$ 的轨线上等于常数 $\Longleftrightarrow \mathscr{L}_{\bar{X}_H}f=0$，而

$$\mathscr{L}_{\bar{X}_H}f=\bar{X}_Hf=\frac{\partial f}{\partial t}+X_Hf$$

$$=\frac{\partial f}{\partial t}+\{f,H\}$$ ‖

命题 17（Poincaré-Cartan 定理） 设 γ_t 是由 $\bar{X}_H$ 生成的流，则

（1）$\Omega_H,\Omega_H\wedge\Omega_H=\Omega_H^2,\cdots,\Omega_H^m$ 是关于 γ_t 的绝对积分不变量；

（2）记 $\omega_H=\pi^*\theta-H\mathrm{d}t$，则 $\omega_H,\omega_H\wedge\Omega_H,\cdots,\omega_H\wedge\Omega_H^{m-1}$ 是关于 γ_t 的弱相对积分不变量；

（3）$\mathrm{d}t\wedge\Omega_H^m=\mathrm{d}t\wedge\Omega^m$ 是关于 γ_t 的绝对积分不变量。

〔证明〕（1）由 $\mathscr{L}_{\bar{X}_H}\Omega_H=0$ 及 Lie 导数的性质即可得证。

（2）由 $\mathrm{d}\omega_H=\Omega_H$，$\mathrm{d}(\omega_H\wedge\Omega_H)=\Omega_H\wedge\Omega_H=\Omega_H^2,\cdots$，及 7.3.2 中的内容即得结论。

（3）显然有

$$\mathrm{d}t\wedge\Omega_H^m=\mathrm{d}t\wedge\Omega^m$$

因

$$\mathscr{L}_{\bar{X}_H}(\mathrm{d}t\wedge\Omega_H^m)=\mathscr{L}_{\bar{X}_H}\mathrm{d}t\wedge\Omega_H^m$$

$$=\mathrm{d}(\mathscr{L}_{\bar{X}_H}t)\wedge\Omega_H^m=0$$

故得证。 ‖

命题 17 中的（2）包含了经典力学中的 Poincaré-Cartan 通用积分不变量

$$\oint_{c_1}\left(\sum_i p_i\mathrm{d}q^i-H\mathrm{d}t\right)=\oint_{c_2}\left(\sum_i p_i\mathrm{d}q^i-H\mathrm{d}t\right)$$

式中，c_1 和 c_2 是增广相空间中环绕同一流管的任意两条闭曲线。

7.3.7 Hamilton 原理

设 $\gamma_0:[a,b]\to M^m$ 是一条可微曲线，若 $\gamma_0(a)=x_1$，$\gamma_0(b)=x_2$，则称 γ_0 是由 x_1 到 x_2 的一条路径。提升 $\gamma_0$❶，得 $\tilde{\gamma}_0:[a,b]$

$\to \widetilde{M}^{2m}$。

取泛函

$$S(\gamma_0)=\int_{\widetilde{\gamma}_0}(p_i\mathrm{d}q^i-H\mathrm{d}t)$$

$$=\int_{[a,b]}\widetilde{\gamma}_0^*(p_i\mathrm{d}q^i-H\mathrm{d}t) \qquad (7.3.86)$$

命题 18（Hamilton原理） 与有同样端点的邻近运动相比，作用量 S 对真实运动取驻定值。

〔证明〕 设 $\gamma_0:[a,b]$是一条曲线，它是系统的真实运动路径。取路径族如下：

$$\begin{aligned}&\phi:[\varepsilon_0=0,\varepsilon_1]\times[a,b]\to M^m;(\varepsilon,t)\mapsto\phi(\varepsilon,t)\\&\phi(\varepsilon,a)=x_0,\ \phi(\varepsilon,b)=x_1\\&\phi(0,t)=\gamma_0(t),\ \phi(\varepsilon,t)=\gamma_\varepsilon(t),\ t\in[a,b]\end{aligned} \qquad (7.3.87)$$

显然，当且仅当$\left.\dfrac{\mathrm{d}S(\phi_\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$时，$S$在$\gamma_0$处驻定。

通过对每条路径的提升❷，得 $\widetilde{\phi}:[\varepsilon_0,\varepsilon_1]\times[a,b]\to\widetilde{M}^{2m}$。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\varepsilon}&=\int_{\widetilde{\gamma}_0}\sum_i\Big(\frac{\partial p_i}{\partial\varepsilon}\mathrm{d}q^i+p_i\frac{\partial(\mathrm{d}q^i)}{\partial\varepsilon}\\&\quad-\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial\varepsilon}\mathrm{d}t-\frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial\varepsilon}\mathrm{d}t\Big)\\&=\int_{\widetilde{\gamma}_0}\sum_i\Big[\Big(\mathrm{d}q^i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}t\Big)\frac{\partial p_i}{\partial\varepsilon}+p_i\mathrm{d}\frac{\partial q^i}{\partial\varepsilon}-\frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial\varepsilon}\mathrm{d}t\Big)\Big]\\&=\Big(\sum_i p_i\frac{\partial q^i}{\partial\varepsilon}\Big)\Big|_a^b+\int_{\widetilde{\gamma}_0}\sum_i\Big[\Big(\mathrm{d}q^i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}t\Big)\frac{\partial p_i}{\partial\varepsilon}\\&\qquad+\Big(-\mathrm{d}p_i+\frac{\partial H}{\partial q^i}\mathrm{d}t\Big)\frac{\partial q^i}{\partial\varepsilon}\Big]\end{aligned}$$

---

❶、❷ 关于“提升”路径，将在下一节详细讨论。

因在 $t=a$ 和 $t=b$ 处 q^i 固定，故

$$\left.\frac{\partial q^i}{\partial \varepsilon}\right|_{t=a}=\left.\frac{\partial q^i}{\partial \varepsilon}\right|_{t=b}=0$$

由于 $\frac{\partial p_i}{\partial \varepsilon}$ 和 $\frac{\partial q^i}{\partial \varepsilon}$ 的任意性知，$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\varepsilon}(\tilde{\gamma}_0)=0$ 即 S 在 γ_0 处取驻定值的充分必要条件是：在 $\tilde{\gamma}_0$ 上满足 Hamilton 方程

$$\dot{q}^i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q^i}$$ ‖

利用 Hamiton 原理，命题 12 可以改述如下。

命题 19 已知一个正则变换 $\varphi: M^{2m}\to M^{2m}$，Hamilton 函数 $H\in F^0(M^{2m})$，M^{2m} 中的一条曲线 γ，使得 γ 的像包含在 M^{2m} 的某个单连通开子集 U 中。与和 γ 有相同端点的路径相比，如果作用量 $\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_i p_i\mathrm{d}q^i-H\mathrm{d}t\right)$ 对 $\varphi\circ\gamma$ 取驻定值，则 $\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_i p_i'\mathrm{d}q^{i'}-\varphi^*H\mathrm{d}t\right)$ 对 γ 取驻定值。

〔证明〕 由 φ 的正则性和 U 的连通性假设知，存在函数 $f\in F^0(U)$，使得

$$\varphi^*\left(\sum_i p_i\mathrm{d}q^i\right)-\sum_i p_i'\mathrm{d}q^{i'}=\mathrm{d}f$$

故

$$\begin{aligned}\int_\gamma\left(\sum_i p_i'\mathrm{d}q^{i'}-\varphi^*H\mathrm{d}t\right)&=\int_\gamma\left[\varphi^*\left(\sum_i p_i\mathrm{d}q^i\right)-\mathrm{d}f\right.\\&\qquad\left.-\varphi^*H\mathrm{d}t\right]\\&=\int_\gamma\varphi^*\left(\sum_i p_i\mathrm{d}q^i-H\mathrm{d}t\right)-[f(\gamma(a))-f(\gamma(b))]\\&=\int_{\varphi\circ\gamma}\left(\sum_i p_i\mathrm{d}q^i-H\mathrm{d}t\right)-[f(\gamma(a))-f(\gamma(b))]\end{aligned}$$

因 $\int_{[a,b]}\left(\sum_i p_i\mathrm{d}q^i-H\mathrm{d}t\right)$ 关于路径 $\varphi\circ\gamma$ 是驻定的，且 $[f(\gamma(a))$

$-f(\gamma(b))]$是常数，故$\int_{[a,b]}\left(\sum_i p'_i dq^{i'}-\varphi^* H dt\right)$关于路径$\gamma$驻定。从而结论得证。 ‖

7.3.8 Hamilton-Jacobi方程的几何意义

Hamilton-Jacobi 方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q^i,\ \frac{\partial S}{\partial q^i},t\right)=0 \qquad (7.3.88)$$

是通过化零接触变换得到的，它和Hamilton正则方程之间存在一种“对偶”关系。Hamilton-Jacobi理论可以看成是对那些构成2-形式

$$\Omega_H=\sum dp_i\wedge dq^i-dH\wedge dt$$

的积分流形的特征线的研究。

命题20 设$S=S(q^i,t)$是一个定义在$U\times I$上的作用量场，其中$U\subset M^m$是开子集，$I\subset \boldsymbol{R}$。如果S是Hamilton-Jacobi方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q^i,\ \frac{\partial S}{\partial q^i},t\right)=0$$

的解，则存在一个可微映射$\varphi:N\to\bar{M}^{2m}$，$\varphi(q^i,t)=\left(q^i,\ \frac{\partial S}{\partial q^i},t\right)$，它定义了Hamilton 2-形式$\Omega_H$的一个积分子流形，其中$N$是由$S=\text{const}$定义的流形。反之，令$\varphi^*\Omega_H=0$，则存在一个作用量场$S$，它满足Hamilton-Jacobi方程，使得$\varphi^*\left(\sum_i p_i dq^i-Hdt\right)=dS$成立。

证明参阅文献[3]。

§7.4 Lagrange力学的几何描述

Hamilton力学是在位形空间的余切丛（动量相空间）上描

述的，而 Lagrange 力学则是在切丛（速度相空间）上描述的。一个 Lagrange 力学系统由一个流形（即位形空间）、切丛（或接触流形）上的一个函数（Lagrange函数）给出。通过Legendre变换，一个 Lagrange 力学系统与一个 Hamilton 系统相对应。

本节讨论 Legendre 变换、非定常力学、Legendre 逆变换和 Hamilton 原理。

7.4.1 Legendre 变换

1. Legendre 变换

定义 1 设 M^m 是微分流形，$L\in F^0(TM^m)$。由 L 定义的映射 $FL:TM^m\to T^*M^m:(q,\dot q)\mapsto\left(q,\ p=\dfrac{\partial L}{\partial \dot q}\right)$ 称为 Legendre 变换，亦称为 L 的纤维导数。

设 $\Omega=\sum\limits_i \mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}q^i$ 为 T^*M^m 上的标准辛结构，则

$$\Omega_L=(FL)^*\Omega \tag{7.4.1}$$

称为 Lagrange 2-形式。在局部坐标下

$$\Omega_L=\sum_{i,j}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q^j\partial q^i}\mathrm{d}q^i\wedge\mathrm{d}q^j+\frac{\partial^2 L}{\partial q^i\partial\dot q^j}\mathrm{d}q^i\wedge\mathrm{d}\dot q^j\right] \tag{7.4.2}$$

容易证明[2]

$$\theta_L=(FL)^*\theta \tag{7.4.3}$$

其中，θ 是 T^*M^m 上的标准 1-形式，有局部表示

$$\theta=\sum_i p_i\mathrm{d}q^i \tag{7.4.4}$$

而 θ_L 是 TM^m 上的 1-形式，有表达式

$$\theta_L=\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot q^i}\mathrm{d}q^i \tag{7.4.5}$$

由式（7.4.1）～（7.4.5）可以看出

$$\Omega_L=\mathrm{d}\theta_L \tag{7.4.6}$$

定义 2 设 Lagrange 函数 $L\in F^0(TM^m)$。如果 FL 是一个局部微分同胚，则称 L 是正则 Lagrange 函数。

当且仅当 Lagrange 2-形式 Ω_L 是 TM^m 上的辛结构时，L 是正则 Lagrange 函数。于是有下述命题[2,3]。

命题 1 对于正则 Lagrange 函数 L，Legendre 变换

$$FL:TM^m\to T^*M^m$$

是一个从辛流形 (TM^m,Ω_L) 到辛流形 (T^*M^m,Ω) 的辛同构。

设 $\{q^i,\dot{q}^i\}$ 是 TM^m 上的局部坐标系。对于 $L:TM^m\to\boldsymbol{R}$，函数 $A:TM^m\to\boldsymbol{R}$，有

$$A=\sum_i\dot{q}^i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\tag{7.4.7}$$

称为关于 L 的作用量。函数 $E:TM^m\to\boldsymbol{R}$，有

$$E=A-L\tag{7.4.8}$$

称为关于 L 的能量。TM^m 上满足下列条件的矢量场 X_E（如果存在）：

$$-i_{X_E}\Omega_L=\mathrm{d}E\tag{7.4.9}$$

称为 L 的 Lagrange 矢量场。

矢量场 X_E 并不是对任意的 Lagrange 函数 L 都存在，但对于正则的 L，X_E 存在。

定义 3 设 $X\in\mathscr{X}(TM^m)$。当且仅当对 X 的所有积分曲线 $\gamma:I\to TM^m$，有

$$(\pi\circ\gamma)'=\gamma\tag{7.4.10}$$

成立时，称 X 为 M^m 上的一个二阶方程，其中 $\pi:TM^m\to M^m$；$(q,\dot{q})\mapsto(q)$ 是自然投影。

Hamilton 体系和 Lagrange 体系的主要区别之一在于：在 TM^m 上可能存在二阶方程，而在 T^*M^m 上则不可能。

对于正则的 Lagrange 函数 L 来说，X_E 必然是二阶的。

2. Lagrange 方程

命题 2 设 X_E 是关于 $L:TM^m\to\boldsymbol{R}$ 的 Lagrange 矢量场，

$\{q^i,\dot{q}^i\}$是 TM^m 上的局部坐标系。设 X_E 是二阶的，如果 $\gamma:I\to TM^m:t\mapsto(q(t),\dot{q}(t))$是 X_E 的积分曲线，那么它满足经典的 Euter-Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0 \qquad (7.4.11)$$

〔证明〕 由式（7.4.9）知

$$-X_E \lrcorner\, \Omega_L=\mathrm{d}E$$

故

$$-X_E \lrcorner \left(\sum_i \mathrm{d}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\wedge \mathrm{d}q^i\right)=\mathrm{d}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i-L\right)$$

展开得

$$\sum_i\left\{\left(\mathscr{L}_{X_E}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}\right)\mathrm{d}q^i-(\mathscr{L}_{X_E}q^i-\dot{q}^i)\mathrm{d}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right\}=0 \qquad (7.4.12)$$

因为 X_E 是二阶的，所以若 $\gamma:t\mapsto(q^i(t),\dot{q}^i(t))$是 X_E 的积分曲线，则必有

$$\mathscr{L}_{X_E}q^i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q^i=\dot{q}^i$$

从而式（7.4.12）成为

$$\sum_i\left(\mathscr{L}_{X_E}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}\right)\mathrm{d}q^i=0$$

考虑到 $\mathrm{d}q^i$ 的线性无关性，有

$$\mathscr{L}_{X_E}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0$$

由于 $\gamma:I\to TM^m$ 是 X_E 的积分曲线当且仅当

$$\gamma_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)=X_E|_\gamma$$

故当且仅当沿 γ 满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q^i=\dot{q}^i,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0 \qquad (7.4.13)$$

γ 是 X_E 的积分曲线。

显然，当 $\gamma:R\to TM^m$ 是 $\gamma_0:R\to M^m:t\mapsto\gamma_0(t)$ 的提升 $\tilde{\gamma}_0$：

$R \to TM^m: t \to (\gamma_0(t), \gamma_0'(t))$ 时，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q^i = \dot{q}^i$ 自然满足。 ‖

3. 有相同 Lagrange 矢量场的 Lagrange 函数

与 Hamilton 力学中 $\widetilde{H}$ 和 $H=\widetilde{H}+\text{const.}$ 导出同样的 Hamilton 矢量场类似(因而导出同样的运动方程)，在 Lagrange 力学中有下述命题。

命题 3 设 L 和 $\widetilde{L}$ 是 TM^m 上的正则 Lagrange 函数，X_E 和 $X_{\widetilde{E}}$ 是对应的 Lagrange 矢量场，则下述说法等价：

（1） $$L=\widetilde{L}+\alpha+\text{const.} \tag{7.4.14}$$

其中 $\alpha: TM^m \to \boldsymbol{R}$ 有局部表示

$$\alpha=\sum_i \frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i \tag{7.4.15}$$

而 $f \in F^0(M^m)$。

（2） $$X_E=X_{\widetilde{E}} \quad 且 \quad \Omega_L=\Omega_{\widetilde{L}} \tag{7.4.16}$$

〔证明〕 因

$$\Omega_L=\sum_i \mathrm{d}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\wedge \mathrm{d}q^i,\quad \Omega_{\widetilde{L}}=\sum_i \mathrm{d}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}^i}\wedge \mathrm{d}q^i$$

所以

$$\Omega_L=\Omega_{\widetilde{L}} \Longleftrightarrow \sum_i \mathrm{d}\frac{\partial \alpha}{\partial \dot{q}^i}\wedge \mathrm{d}q^i=0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}=0,\quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}=\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \dot{q}^j \partial q^i}$$

由于 $X_E=\Omega_L^{-1}\mathrm{d}E$，$X_{\widetilde{E}}=\Omega_{\widetilde{L}}^{-1}\mathrm{d}\widetilde{E}$，故若 $\Omega_L=\Omega_{\widetilde{L}}$，则 $X_E=X_{\widetilde{E}} \Longleftrightarrow \mathrm{d}E=\mathrm{d}\widetilde{E}$，由式（7.4.7）和（7.4.8）知

$$\mathrm{d}E=\mathrm{d}\widetilde{E} \Longleftrightarrow \sum_i \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i-\alpha=0$$

即 α 是 $\dot{q}^i$ 的一次齐式。

综上所述，（2）成立的必要充分条件是

$$\sum_i \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - \alpha = 0, \quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = 0, \quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \dot{q}^j \partial q^i}$$

而上式成立$\Longleftrightarrow$存在 $f \in F^0(M^m)$，使得 $\alpha = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i$，即（1）成立。故（1）与（2）等价。

式（7.4.12）表明，X_E 和 $X_{\bar{E}}$ 具有相同的积分曲线，亦即它们的积分曲线满足相同的 Lagrange 方程。

定义 4 如果 $\gamma: I \to TM^m$ 是 TM^m 上矢量场 X 的积分曲线，则称 $\pi_M \circ \gamma: I \to M^m$ 为 X 的基本积分曲线。若 $\gamma: I \to T^*M^m$ 是 T^*M^m 上矢量场 Y 的积分曲线，那么就称 $\pi_M^* \circ \gamma: I \to M^m$ 为 Y 的基本积分曲线。

显然，当且仅当矢量场 X 的任一积分曲线 γ 是它的基本积分曲线 γ_0 的微商时，即

$$\gamma = \gamma_0' : (\gamma(t)) = (\gamma_0(t), \gamma_0'(t)) \tag{7.4.17}$$

X 是二阶的。

4．超正则 Lagrange 函数

TM^m 上的 Lagrange 系统和 T^*M^m 上的 Hamilton 系统具有某种对应关系，在一定条件下，它们等价，并且通过 Legendre 变换可以将前者变为后者。

定义 5 设 $L \in F^0(TM^m)$。如果 $FL: TM^m \to T^*M^m$ 是一个微分同胚，则称 L 为超正则的 Lagrange 函数。

显然，超正则的 Lagrange 函数必定是正则的。

命题 4 设 $L \in F^0(TM^m)$ 是超正则 Lagrange 函数，$H = E \circ FL^{-1}: T^*M^m \to \boldsymbol{R}$，其中 E 是关于 L 的能量，则有

$$(FL)_* X_E = X_H \tag{7.4.18}$$

即映射 FL 把 X_E 的积分曲线 $\gamma_1: I \to TM^m$ 映为 X_H 的积分曲线 $FL \circ \gamma_1 = \gamma_2: I \to T^*M^m$。进一步说，也就是 X_H 和 X_E 有相同的基本积分曲线。

〔证明〕 由于 L 超正则，故 FL 是微分同胚，且

$$X_E = -\Omega_L^{-1}\mathrm{d}E$$

从而 $$(FL)_* X_E = (FL)_*(-\Omega_L^{-1}\mathrm{d}E)$$
$$= (-(FL^{-1})^*\Omega_L)^{-1}(FL^{-1})^*\mathrm{d}E$$
$$= -\Omega^{-1}\mathrm{d}((FL)^*E) = -\Omega^{-1}\mathrm{d}H = X_H$$

命题后半部的证明可以根据下面的结论得到：设 M^m、N^n 是微分流形，$\varphi: M^m \to N^n$ 是微分同胚，$X \in \mathscr{X}(M^m)$，γ 是 X 的积分曲线，则 $\gamma \circ \varphi$ 是 $\varphi_* X$ 的积分曲线。 ‖

由命题 4 可以看出，对于超正则的 L，Legendre 变换 FL 将 Lagrange 函数 L 变为 Hamilton 函数 $H = \sum_i p_i \dot{q}^i - L$，将 Lagrange 方程变为 Hamilton 方程。

命题 5 设 L 是超正则 Lagrange 函数，$H = E \circ FL^{-1}$，其中 E 是关于 L 的能量，则

$$\theta(X_H) = A \circ (FL)^{-1} \tag{7.4.19}$$

其中 A 是关于 L 的作用量，θ 是 T^*M^m 上的标准 1-形式。

〔证明〕 设 $\{q^i, p_i\}$ 是 T^*M^m 上的局部坐标系，$\{q^i, \dot{q}^i\}$ 是 TM^m 上的局部坐标系。由式 (7.4.4) 和 (7.3.9) 知

$$\theta(X_H) = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} p_i$$

由 Legendre变换：$q^i \mapsto q^i$，$\dot{q}^i \mapsto p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$，知

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L = \dot{q}^i p_i - L$$

故 $$\frac{\partial E}{\partial p_i} = \dot{q}^i + p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_i} = \dot{q}^i$$

又因为 E 作为 q^i、p_i 的函数正是 Hamilton 函数 H，于是

$$\theta(X_H) = \sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i = A$$ ‖

推论 设 L 是超正则 Lagrange 函数，$\theta_L = FL^*\theta$，则

$$A=\theta_L(X_E) \qquad (7.4.20)$$

其中E和A分别是关于L的能量和作用量。

7.4.2 非定常力学

设$L\in F^0(TM^m\times \boldsymbol{R})$，则关于$L$的Legendre变换由下式定义：

$$FL:TM^m\times \boldsymbol{R}\to T^*M^m\times \boldsymbol{R}:q^i\mapsto q^i,$$
$$\dot{q}^i\mapsto p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i},\ t\mapsto t \qquad (7.4.21)$$

定义 6 如果FL是一个局部微分同胚，则称L是正则的；如果FL是一个微分同胚，则称L是超正则的。

显然，超正则的一定是正则的。

基本积分曲线的定义也可以推广到非定常的情况，这只需将定义4中的T^*M^m换成$T^*M^m\times \boldsymbol{R}$，$TM^m$换成$TM^m\times \boldsymbol{R}$即可。$A$、$E$的定义同样推广。

设$L\in F^0(TM^m\times \boldsymbol{R})$是正则的，记

$$\Omega_L^*=\Omega_L-\mathrm{d}E\wedge\mathrm{d}t \qquad (7.4.22)$$

则在$TM^m\times \boldsymbol{R}$上存在唯一的矢量场$\bar{X}_E$，使得下列各式满足（因为$\Omega_L^*$的秩是$2m$）：

$$\bar{X}_E\lrcorner\,\mathrm{d}t=1,\ \bar{X}_E\lrcorner\,\Omega_L^*=0 \qquad (7.4.23)$$

命题 6 $\gamma:I\to TM^m\times \boldsymbol{R}:t\mapsto(q^i,\dot{q}^i,t)$是$\bar{X}_E$的积分曲线的充分必要条件是：沿$\gamma$满足Lagrange方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0$$

且
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q^i=\dot{q}^i$$

〔证明〕 由$\bar{X}_E\lrcorner\,\mathrm{d}t=1$，知

$$\bar{X}_E=\frac{\partial}{\partial t}+X_E'$$

其中 X_E' 中不含$\frac{\partial}{\partial t}$项。展开（7.4.23）的第二式，得

$$\sum_i\left\{\left(\mathscr{L}_{\bar{X}_E}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}\right)(\mathrm{d}q^i-\dot{q}^i\mathrm{d}t)\right.$$
$$\left.+\left(\mathrm{d}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}\mathrm{d}t\right)(\mathscr{L}_{\bar{X}_E}q^i-\dot{q}^i)\right\}=0$$

因为 L 是正则的，所以$(\mathrm{d}q^i-\dot{q}^i\mathrm{d}t)$、$\left(\mathrm{d}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}\mathrm{d}t\right)$ 线性无关。即上式成立的充分必要条件是

$$\mathscr{L}_{\bar{X}_E}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0,\quad \mathscr{L}_{\bar{X}_E}q^i=\dot{q}^i$$

由于当且仅当

$$\gamma_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)=\bar{X}_E|_\gamma$$

时，γ 是 $\bar{X}_E$ 的积分曲线，而有结论：

γ 是 $\bar{X}_E$ 的积分曲线的充分必要条件是沿 γ 满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0\ ,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q^i=\dot{q}^i$$ ‖

命题 7 设 $L\in F^0(TM^m\times \boldsymbol{R})$ 是超正则的，$H=E\circ FL^{-1}$: $T^*M^m\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，则有

$$(FL)_*\bar{X}_E=\bar{X}_H \tag{7.4.24}$$

如果 $\gamma:I\to T^*M^m\times\boldsymbol{R}$ 是 $\bar{X}_E$ 的积分曲线，则 $FL\circ\gamma:I\to T^*M^m\times\boldsymbol{R}$ 是 $\bar{X}_H$ 的积分曲线。即 $\bar{X}_E$ 和 $\bar{X}_H$ 有相同的基本积分曲线。

〔证明〕 这是命题 4 向非定常情形的推广。因 $\bar{X}_E$ 使式（7.4.23）成立，故

$$(FL^{-1})^*(\bar{X}_E\lrcorner\,\mathrm{d}t)=(FL)_*\bar{X}_E\lrcorner\,(FL^{-1})^*\mathrm{d}t$$
$$=(FL)_*\bar{X}_E\lrcorner\,\mathrm{d}t=(FL^{-1})^*1=1$$
$$(FL^{-1})^*(\bar{X}_E\lrcorner\,\Omega_L^*)=(FL)_*\bar{X}_E\lrcorner\,(FL^{-1})^*\Omega_L^*$$
$$=(FL)_*\bar{X}_E\lrcorner\,\Omega_H=0$$

由于 $\bar{X}_H$ 是 $T^*M^m\times\boldsymbol{R}$ 上唯一满足下式的矢量场（因为 Ω_H 的秩为 2 m）：

$$\bar{X}_H \lrcorner \mathrm{d}t=1,\quad \bar{X}_H \lrcorner \Omega_H=0$$

所以有

$$(FL)_*\bar{X}_E=\bar{X}_H$$

命题的后半部亦可根据命题 4 的证明中所列举的依据得到。‖

上述命题表明，在超正则的情况下，$TM^m\times\boldsymbol{R}$ 上的 Lagrange 体系与 $T^*M^m\times\boldsymbol{R}$ 上的 Hamilton 体系是等价的。

7.4.3 Legendre 逆变换

L 的纤维导数定义 3 一个从 $TM^m\times\boldsymbol{R}$（或 TM^m）到 $T^*M^m\times\boldsymbol{R}$（或 T^*M^m）的 Legendre 变换，与之相应，H 的纤维导数也可以定义一个从 $T^*M\times\boldsymbol{R}$ 到 $TM^m\times\boldsymbol{R}$ 的变换——Legendre 逆变换。

定义 7 设 $H\in F^0(T^*M^m\times\boldsymbol{R})$，映射

$$FH:T^*M^m\times\boldsymbol{R}\to TM^m\times\boldsymbol{R}:(q^i,p_i,t)\mapsto\left(q^i,\ \frac{\partial H}{\partial q^i},\ t\right)$$
$$=(q^i,\dot{q}^i,t) \tag{7.4.25}$$

称为H的纤维导数，亦称为Legendre逆变换。

关于 Lagrange 函数 $L\in F^0(TM^m\times\boldsymbol{R})$ 的正则性及超正则性定义可以推广到 Hamilton 函数H上来。

定义 8 如果映射 FH 是一个局部微分同胚，则称 Hamilton 函数H是正则的；若 FH 是一个微分同胚，则称 Hamilton 函数H是超正则的。

令

$$E=H\circ(FH)^{-1},\ A=\theta(X_H)\circ(FH)^{-1},\ L=A-E \tag{7.4.26}$$

命题 8 设 $H\in F^0(T^*M^m\times\boldsymbol{R})$ 是超正则的，$L\in F^0(TM^m\times\boldsymbol{R})$ 由式（7.4.26）定义，则L是超正则的，且由L定义的

Legendre 变换(7.4.21)是由H定义的 Legendre 逆变换(7.4.25)的逆，即$FL=(FH)^{-1}$。

〔证明〕 设$\{q^i,p_i,t\}$是$T^*M^m\times\boldsymbol{R}$上的局部坐标系，$\{q^i,\dot{q}^i,t\}$是$TM^m\times\boldsymbol{R}$上的局部坐标系。由式(7.4.25)和(7.4.26)，有

$$(L\circ FH)(q^i,p_i)=\theta(X_H)-H=\sum_i\frac{\partial H}{\partial p_i}p_i-H$$

$$=\sum_i p_i\dot{q}^i-H$$

故
$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}=\sum_k\frac{\partial p_k}{\partial\dot{q}^i}\dot{q}^k+p_i-\sum_k\frac{\partial H}{\partial p_k}\ \frac{\partial p_k}{\partial\dot{q}_i}=p_i$$

亦即变换FH和FL满足

$$FL\circ FH=id\ (\text{恒等变换})$$

由于FH是微分同胚，而有

$$FL=FL\circ(FH\circ(FH)^{-1})=(FL\circ FH)\circ(FH)^{-1}$$
$$=(FH)^{-1}$$ ‖

经与命题 8 类似的推导，可得如下命题。

命题 9 设 Lagrange 函数$L\in F^0(TM^m\times\boldsymbol{R})$是超正则的，$H=E\circ(FL)^{-1}\in F^0(T^*M^m\times\boldsymbol{R})$，$E$由式(7.4.7)和(7.4.8)定义。则$H$是超正则的 Hamilton 函数，且由$H$定义的 Legendre 逆变换(7.4.25)是由L定义的 Legendre 变换(7.4.21)的逆，即$FH=(FL)^{-1}$。

由命题 8、命题 9，我们可以得出与命题 7 相对应的结论。

命题 10 设 Hamilton 函数$H\in F^0(T^*M^m\times\boldsymbol{R})$是超正则，$L$由式(7.4.26)定义，则

$$(FH)_*\tilde{X}_H=\tilde{X}_E \tag{7.4.27}$$

证明与命题 7 的类似，在此不再赘述。

对于超正则的L来说，由L所确定的$TM^m\times\boldsymbol{R}$上的一个 Lagrange 系统唯一地对应$T^*M^m\times\boldsymbol{R}$上一个超正则的 Hami-

lton 系统；同样，对于超正则的 H 来说，$T^*M^m\times \boldsymbol{R}$ 上由 H 所确定的一个 Hamilton 系统唯一地对应着 $TM^m\times \boldsymbol{R}$ 上的一个 Lagrange 系统。更确切地，有下述命题。

命题 11 超正则的 Lagrange 函数 L 与超正则的 Hamilton 函数一一对应：L 可以由 H 通过式（7.4.26）构造出来；H 可以由 L 通过式（7.4.7）、（7.4.8）及 $H=E\circ(FL)^{-1}$ 构造出来。

〔证明〕（1）设 L 是给定的超正则 Lagrange 函数，H 是通过式（7.4.7）、（7.4.8）及 $H=E\circ(FL)^{-1}$ 构造出来的。则

$$H=E\circ(FL)^{-1}=(A-L)\circ FH=\theta(X_H)-L\circ FH$$

假设由 H 通过式（7.4.26）构造出来的 Lagrange 函数是 $\widetilde{L}$，则

$$\begin{aligned}\widetilde{L}&=\theta(X_H)\circ(FH)^{-1}-(\theta(X_H)-L\circ FH)\circ(FH)^{-1}\\&=L\end{aligned}$$

（2）设 H 是给定的超正则 Hamilton 函数，L 是 H 通过式（7.4.26）构造出来的 Lagrange 函数，则

$$\begin{aligned}L&=\theta(X_H)\circ(FH)^{-1}-H\circ(FH)^{-1}\\&=(\theta(X_H)-H)\circ(FH)^{-1}=(\theta(X_H)-H)\circ FL\end{aligned}$$

假设由 L 通过式（7.4.7）、（7.4.8）及 $\widetilde{H}=E\circ(FL)^{-1}$ 构造出来的 Hamilton 函数，则

$$\begin{aligned}\widetilde{H}&=E\circ(FL)^{-1}=(A-L)\circ(FL)^{-1}\\&=(A-\theta(X_H)\circ FL+H\circ FL)\circ(FL)^{-1}\\&=A\circ FL^{-1}-\theta(X_H)+H=H\end{aligned}$$ ‖

7.4.4 Hamilton 原理

设 L：$TM^m\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 是 C^∞-函数，$\gamma:I\to M^m$ 是 M^m 上的一条可微曲线。将 γ 提升为 $TM^m\times\boldsymbol{R}$ 中的一条路径 $\widetilde{\gamma}:I\to TM^m\times\boldsymbol{R}$：$\widetilde{\gamma}(t)=(\gamma(t),\gamma'(t),t)$。取泛函

$$\gamma\mapsto S(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1}(L\circ\widetilde{\gamma})\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}L(\widetilde{\gamma}(t))\mathrm{d}t \quad (7.4.28)$$

命题 12 如果 $\gamma_0:[t_0,t_1]\to U\subset M^m$ 是 U 中的一条可微曲

线，则 γ_0 满足由 L 表示的 Lagrange 方程的充分必要条件是对应的泛函在 $\gamma=\gamma_0$ 处取驻定值（与有相同端点的路径相比）。

〔证明〕 取路径族如下：

$$\begin{aligned}&\phi:[\varepsilon_0=0,\varepsilon]\times[t_0,t_1]\to U:(\varepsilon,t)\mapsto\phi(\varepsilon,t)\\&\phi(\varepsilon,t_0)=a\in U,\quad \phi(\varepsilon,t_1)=b\in U\\&\phi(0,t)=\gamma_0(t),\quad \phi(\varepsilon,t)=\gamma_\varepsilon(t)\end{aligned}\tag{7.4.29}$$

这是一族有相同端点的路径。当

$$\left.\frac{\mathrm{d}S(\gamma_\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0\tag{7.4.30}$$

时，S 在 γ_0 处驻定。

将路径族中的每条路径提升，得 $\tilde{\phi}:[\varepsilon_0,\varepsilon_1]\times[t_0,t_1]\to TU\times[t_0,t_1]$。由式（7.4.28）和（7.4.29），得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S(\gamma_\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}&=\int_{t_1}^{t_1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(L\circ\tilde{\phi})\mathrm{d}t\\&=\int_{t}^{t_1}\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\frac{\partial\dot{q}^i}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial L}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial\varepsilon}\right)\mathrm{d}t\\&=\int_{t_0}^{t_1}\sum_i\left[-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)\frac{\partial q^i}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial L}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial\varepsilon}\right]\mathrm{d}t\\&\quad+\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\frac{\partial q^i}{\partial\varepsilon}\Bigg|_{t_0}^{t_1}\end{aligned}$$

因路径族 γ_ε 有相同的端点，故

$$\left.\frac{\partial q^i}{\partial\varepsilon}\right|_{t=t_0}=\left.\frac{\partial q^i}{\partial\varepsilon}\right|_{t=t_1}=0$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}S(\gamma_\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}=\sum_i\int_{t_0}^{t_1}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}+\frac{\partial L}{\partial q^i}\right]\frac{\partial q^i}{\partial\varepsilon}\mathrm{d}t$$

由于 $\frac{\partial q^i}{\partial\varepsilon}$ 是相互独立的任意函数，故当且仅当由 L 表示的 Lagrange 方程沿 γ_0 满足时，式（7.4.30）成立，即 S 在 γ_0 处驻定。 ‖

命题 12 就是 Hamilton 原理，它是§7.3中命题（余切丛上的 Hamilton 原理）的对偶表述。

取

$$\bar{\theta} = \sum_i p_i \mathrm{d}q^i - H\mathrm{d}t \tag{7.4.31}$$

其中

$$H = \sum_i p_i \dot{q}^i - L$$

$\bar{\theta}$ 称为由 Lagrange 函数 L 确定的 Cartan 1-形式。

命题 13 设 $\gamma:[t_0,t_1]\to M^m$ 是一条可微曲线，则泛函 $S(\gamma)$ 有如下的形式：

$$\gamma \mapsto S(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} (L \circ \tilde{\gamma})\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \bar{\gamma}^* \bar{\theta} \tag{7.4.32}$$

其中 $\bar{\gamma} = FL \circ \tilde{\gamma}$，$\tilde{\gamma}$ 是 γ 的提升，FL 是由 L 生成的 Legendre 变换，由式（7.4.21）定义。

〔证明〕 由式（7.4.21）及 $\bar{\gamma}$ 的定义知

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} \bar{\gamma}^* \bar{\theta} &= \int_{t_0}^{t_1} (FL \circ \tilde{\gamma})^* \left(\sum_i p_i \mathrm{d}q^i - H\mathrm{d}t \right) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\gamma}^* \left((FL)^* \left(\sum_i p_i \mathrm{d}q^i - H\mathrm{d}t \right) \right) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\gamma}^* (L\mathrm{d}t) = \int_{t_0}^{t_1} (L \circ \tilde{\gamma})\mathrm{d}t \end{aligned}$$ ‖

命题 13 表明，如果 Lagrange 方程沿 $\tilde{\gamma}$ 成立，那么 $FL \circ \tilde{\gamma}$ 就是 Hamilton 方程的解，这与由命题 7 得出的结论相同。

命题 14 设泛函 $S(\gamma) = \int \tilde{\gamma}^* \theta$ 是一驻定值，即

$$\left.\frac{\mathrm{d}S(\gamma_\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \gamma_0 = \gamma$$

则下面的说法等价：

（1）Lagrange 方程沿 γ 满足；

（2）$X \lrcorner \mathrm{d}\bar{\theta}|_\gamma = 0$，

其中X是与驻值曲线γ相切的Lagrange矢量场，即

$$X \lrcorner \mathrm{d}t=1, \quad X \lrcorner \mathrm{d}\bar{\theta}=0$$

〔证明〕 设$\{q^i, \dot{q}^i, t\}$是微分流形$TM^m \times \boldsymbol{R}$上的局部坐标系，则$TM^m \times \boldsymbol{R}$上1-形式有局部基$\{\mathrm{d}q^i, \mathrm{d}\dot{q}^i, \mathrm{d}t\}$。由$L$所确定的Cartan1-形式$\bar{\theta}$有局部表示

$$\begin{aligned}\bar{\theta} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\mathrm{d}q^i - \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L\right)\mathrm{d}t \\ &= L\,\mathrm{d}t + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\mathrm{d}q^i - \dot{q}^i\mathrm{d}t)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\bar{\theta} &= \mathrm{d}L\wedge\mathrm{d}t + \sum_i \mathrm{d}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\wedge(\mathrm{d}q^i - \dot{q}^i\mathrm{d}t) \\ &\quad - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\mathrm{d}\dot{q}^i\wedge\mathrm{d}t \\ &= \sum_i \left[\mathrm{d}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i}\mathrm{d}t\right]\wedge(\mathrm{d}q^i - \dot{q}^i\mathrm{d}t)\end{aligned}$$

因X是与驻值曲线γ相切的Lagrange矢量场，而有

$$X \lrcorner \mathrm{d}\bar{\theta} = \sum_i \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right](\mathrm{d}q^i - \dot{q}^i\mathrm{d}t)$$

所以，当且仅当沿γ满足Lagrange方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

时，$X \lrcorner \mathrm{d}\bar{\theta}|_\gamma = 0$成立。 ‖

§7.5 非完整力学系统的微分几何理论

在§7.3和§7.4中讨论的是完整力学系统，其中主要是完整保守的自由系统。迄今为止，大量的研究也只局限于这类系统。对于一般的力学系统，特别是非完整力学系统的“几何化”则做得很少。一些作者虽然给出非完整力学系统的几何描述，但

仍属于尝试性的初步结果。

本节介绍 Lagrange 矢量场，广义 Noether 定理，Hamilton 原理，以及高阶非完整系统的几何描述。

7.5.1 Lagrange 矢量场

1. 射流形

设 $\mu(\boldsymbol{R},M^m)$是由可微曲线$\gamma:\boldsymbol{R}\to M^m$构成的空间，在 $\boldsymbol{R}\times\mu(\boldsymbol{R},M^m)$上引入一个等价关系：$(t,\gamma)$与$(t',\gamma')$ 等价的必要充分条件是

$$t=t',\ \gamma(t)=\gamma'(t'),\ \cdots,\ \frac{\mathrm{d}^r\gamma(t)}{\mathrm{d}t^r}=\frac{\mathrm{d}^r\gamma'(t')}{\mathrm{d}t'^r}\tag{7.5.1}$$

并记作$(t,\gamma)\sim(t',\gamma')$。

定义 1 空间$\boldsymbol{R}\times\mu(\boldsymbol{R},M^m)$关于以上等价关系“$\sim$”的商空间 $J^r(\boldsymbol{R},M^m)=\boldsymbol{R}\times\mu(\boldsymbol{R},M^m)/\sim$称为$r$-射流形。$j^r(\gamma)$：$\boldsymbol{R}\to J^r(\boldsymbol{R},M^m)$ 称为γ的r阶延伸或r-射。

射流形理论，最初由 C. Ehresmann 在 1951 年提出，后由 R. Hermann 加以发展。它的出现为研究非完整非保守力学系统提供了理论工具。

对于一阶非完整系统，只需用到 1-射流形 $J^1(\boldsymbol{R},M^m)$。由于 $J^1(\boldsymbol{R},M^m)$和接触流形 $\boldsymbol{R}\times TM^m$ 同胚，$J^1(\boldsymbol{R},M^m)$ 便是系统的状态时间空间，也就是说，我们也可只在 $\boldsymbol{R}\times TM^m$ 上考虑问题。

2. Poincaré 基

设 $\mathrm{d}t$，ω^1，…，ω^m 是 $\boldsymbol{R}\times M^m$ 上线性无关的 1-形式，即 $\{\mathrm{d}t,\omega^i\}$ 构成 $\mathscr{X}^*(\boldsymbol{R}\times M^m)$的一个基，因而

$$\mathrm{d}\omega^i=-\frac{1}{2}C^i_{kl}\,\omega^k\wedge\omega^l-C^i_{0l}\,\mathrm{d}t\wedge\omega^l\tag{7.5.2}$$

其中 C^i_{kl}，$C^i_{0l}\in F^0(\boldsymbol{R}\times M^m)$，且有

$$C^i_{kl}=-C^i_{lk}\tag{7.5.3}$$

利用自然投影 $\pi_{10}: J^1(\boldsymbol{R}, M^m) \to \boldsymbol{R} \times M^m$ 将 ω^i 提升到 $J^1(\boldsymbol{R} \times M^m)$ 上，得到 $J^1(\boldsymbol{R}, M^m)$ 上 m 个 1-形式 $\omega^{i'} = \pi_{10}^* \omega^i$，仍将 $\omega^{i'}$ 记作 ω^i。

设 $\gamma: \boldsymbol{R} \to M^m$ 是可微曲线，$j^1(\gamma)$ 是其 1 阶延伸，$X_{j^1(\gamma)} = j^1(\gamma)_* \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \in \mathscr{X}(J^1(\boldsymbol{R}, M^m))$ 是 $j^1(\gamma)$ 的切矢量场。引进 $\eta^1, \cdots, \eta^m \in F^0(J^1(\boldsymbol{R}, M^m))$，它们由下式定义

$$j^1(\gamma)^* \eta^i = \omega^i(X_{j^1(\gamma)}) \tag{7.5.4}$$

则 $\{\mathrm{d}t, \omega^i, \mathrm{d}\eta^i\}$ 构成 $\mathscr{X}^*(J^1(\boldsymbol{R}, M^m))$ 的一个基，称为 Poincaré 基。取 $\mathscr{X}(J^1(\boldsymbol{R}, M^m))$ 上 $\{\mathrm{d}t, \omega^i, \mathrm{d}\eta^i\}$ 的对偶基 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial t}, X^i, \dfrac{\partial}{\partial \eta^i}\right\}$，称为 $\mathscr{X}(J^1(\boldsymbol{R}, M^m))$ 的 Poincaré 基。由对偶性和式 (7.5.2)，得到关系

$$[X^i, X^j] = C_{ij}^k X^k, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t}, X^i\right] = C_{0i}^k X^k \tag{7.5.5}$$

3. Lagrange 力学系统的表达

定义 2 $J^1(\boldsymbol{R}, M^m)$ 上的 1-形式 θ^i

$$\theta^i = \omega^i - \eta^i \mathrm{d}t \tag{7.5.6}$$

称为接触形式，它们满足接触条件

$$j^1(\gamma)^* \theta^i = 0 \tag{7.5.7}$$

由 $\{\theta^i\}$ 张成的 Pfaff 系统 $\mathscr{C} = \mathrm{span}\{\theta^i\}$ 称为接触系统。

定义 3 在位形空间 M^m 上的一个一阶非完整非保守 Lagrange 力学系统由 $(L, \mu, \mathscr{P})$ 唯一地给出，其中 $L \in F^0(J^1(\boldsymbol{R}, M^m))$ 是 Lagrange 函数；μ 是力形式，它是 $J^1(\boldsymbol{R}, M^m)$ 上的 1-形式，$\mu = Q_i \theta^i, Q_i \in F^0(J^1(\boldsymbol{R}, M^m))$；$\mathscr{P} \in \mathscr{X}^*(J^1(\boldsymbol{R}, M^m))$ 是一个 r 维非完整 Pfaff 约束组，$r < m$。

一阶非完整非保守 Lagrange 力学系统，通常记作 $(M^m, L, \mu, \mathscr{P})$。

下面研究约束组。与式 (7.4.32) 类似，对任何 $F \in F^0(J^1(\boldsymbol{R}, M^m))$，关于 F 的 Cartan 1-形式定义为

$$\theta(F)=F\mathrm{d}t+\frac{\partial F}{\partial v^i}\theta^i \tag{7.5.8}$$

它是 $J^1(\boldsymbol{R},M^m)$ 上满足

$$\theta(F)-F\mathrm{d}t\in\mathscr{C}=\mathrm{span}\{\theta^i\} \tag{7.5.9}$$

和

$$\mathrm{d}\theta(F)\in\mathscr{X}^*(J^1(\boldsymbol{R},M^m))\wedge\mathscr{C} \tag{7.5.10}$$

的唯一的 1-形式。

命题 1 设 $f^\alpha\in F^0(J^1(\boldsymbol{R},M^m))$，$\alpha=1,\cdots,r$，相互独立，即满足

$$\mathrm{d}f^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}f^r\neq 0 \tag{7.5.11}$$

那么有

$$\theta(f^1)\wedge\cdots\wedge\theta(f^r)\neq 0 \tag{7.5.12}$$

〔证明〕 假设式（7.5.12）不成立，即 $\theta(f^i)$ 线性相关，则存在 $\lambda^i\in F^0(J^1(\boldsymbol{R},M^m))$，$i=2,\cdots,r$，使得

$$\theta(f^1)=\lambda^i\theta(f^i)=\lambda^i f^i\mathrm{d}t+\lambda^i\frac{\partial f^i}{\partial v^j}\theta^j=f^1\mathrm{d}t+\frac{\partial f^1}{\partial v^j}\theta^j$$

故

$$\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^m\wedge\theta(f^1)=\lambda^i f^i\mathrm{d}t\wedge\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^m+\lambda^i\frac{\partial f^i}{\partial v^j}\theta^j\wedge\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^m$$

$$=f^1\mathrm{d}t\wedge\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^m+\frac{\partial f^1}{\partial v^j}\theta^j\wedge\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^m$$

因 $\mathrm{d}t\wedge\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^m\neq 0$，有

$$f^1=\lambda^i f^i$$

显然，这与 $\{f^i\}$ 独立的假设相矛盾。 ‖

一般说来，命题 1 的逆命题不成立。但对于 r 个一阶线性函数，即当

$$f^\alpha=A_i^\alpha\theta^i+A^\alpha \tag{7.5.13}$$

时，由式（7.5.12）可以推得式（7.5.11），即这时两式等价。

对于 $f^1,\cdots,f^r\in F^0(J^k(\boldsymbol{R},M^m))$，如果它们满足

（1）$\mathrm{d}f^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}f^r\neq 0$

（2）在系统$(M^m,L,\mu,\mathscr{P})$的轨线γ：$\boldsymbol{R}\to M^m$上，有

$$j^k(\gamma)^* f^\alpha=0 \tag{7.5.14}$$

则称 f^α 是系统 $\mathscr{U}=(M^m,L,\mu,\mathscr{P})$ 的k阶约束组，其中 $j^k(\gamma)$：$\boldsymbol{R}\to J^k(\boldsymbol{R},M^m)$是$\gamma$的$k$阶延伸。

显然，当 $k=1$ 时，若 f^α 中不包含 $\boldsymbol{R}\times M^m$ 上函数的提升，则它是非完整约束组；当 $k=0$ 时，f^α 是完整约束组，此时 $J^k(\boldsymbol{R},M^m)=\boldsymbol{R}\times M^m$。

定义 4 设 g^α 是完整约束组，即 $g^\alpha\in F^0(\boldsymbol{R}\times M^m)$，记 $f^\alpha=\tau_{10}^* g^\alpha$，则称

$$\mathscr{P}_H=\mathrm{span}\{\mathrm{d}f^\alpha\mid\alpha=1,\cdots,r\} \tag{7.5.15}$$

为由完整约束组生成的r维Четаев型 Pfaff 约束系统。

定义 5 设 $\mathscr{U}=(M^m,L,\mu,\mathscr{P})$，如果有

$$\mathscr{P}=\mathrm{span}\{\theta(f^\alpha)\mid\alpha=1,\cdots,r\} \tag{7.5.16}$$

则称 $\mathscr{P}$ 是由一阶约束组 f^α 生成的r维Четаев型 Pfaff 约束系统。

需要注意的是，定义 5 中的 f^α 都不是 $\boldsymbol{R}\times M^m$ 上函数的提升，即不存在 $g^\alpha\in F^0(\boldsymbol{R}\times M^m)$，使得

$$f^\alpha=\tau_{10}^* g^\alpha \tag{7.5.17}$$

在 Frobenius 意义下，如果 $\mathscr{P}$ 是完全可积的，则Четаев型 Pfaff 约束系统 $\mathscr{P}$ 是完整的，此时称$(M^m,L,\mu,\mathscr{P})$为完整力学系统；如果 $\mathscr{P}$ 不完全可积，则 $\mathscr{P}$ 是非完整 Pfaff 约束系统，此时$(M^m,L,\mu,\mathscr{P})$是一个非完整力学系统。

例 1 设约束组为

$$f^\alpha=A_i^\alpha v^i+A^\alpha=0 \qquad (\alpha=1,\cdots,r) \tag{7.5.18}$$

其中 A_i^α，$A^\alpha\in F^0(\boldsymbol{R}\times M^m)$，则由 f^α 生成的 Pfaff 约束系统为

$$\mathscr{P}=\mathrm{span}\{\tau_{10}^*\mathscr{P}_E\} \tag{7.5.19}$$

其中

$$\mathscr{P}_E=\mathrm{span}\{A_i^\alpha\omega^i+A^\alpha\mathrm{d}t\mid\alpha=1,\cdots,r\} \tag{7.5.20}$$

设$(x_0^1,\cdots,x_0^n)$是方程组

$$A_i^\alpha x^i + A^\alpha = 0 \qquad (7.5.21)$$

的一组特解，$\{(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)|\alpha=1,\ldots,r\}$是方程组

$$A_i^\alpha x^i = 0 \qquad (7.5.22)$$

的基本解组。从而满足式（7.5.18）的η^i有表达式

$$\eta^i = x_0^i + \lambda^\alpha x_\alpha^i \qquad (7.5.23)$$

其中$\lambda^\alpha \in F^0(\boldsymbol{R}\times M^m)$彼此独立。取

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} + x_0^i X^i,\quad X_\alpha = x_\alpha^i X^i \qquad (7.5.24)$$

则$\{X_0,\cdots,X_r\}$是线性无关的光滑矢量场，它是一个$r+1$维分布。因

$$X_0 \lrcorner \mathscr{P} = X_\alpha \lrcorner \mathscr{P} = 0 \qquad (7.5.25)$$

故分布$\{X_0,X_\alpha\}$与余分布$\{\theta(f^\alpha)\}$是对应的，从而它们的可积性一致。由§7.2知，当

$$[X_0,X_\alpha] = a_{0\alpha}^0 X_0 + a_{0\alpha}^\beta X_\beta,\quad [X_\alpha,X_\beta] = a_{\alpha\beta}^0 X_0 + a_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma \qquad (7.5.26)$$

时，余分布$\{\theta(f^\alpha)\}$完全可积，即约束（7.5.18）是完整的。

4．基本 2-形式 · Lagrange-Poincaré 恒等式

定义 6 设系统$\mathscr{U}=(M^m,L,\mu,\mathscr{P})$，$J^1(\boldsymbol{R},M^m)$上的2-形式为$\Omega(L,\mu,\mathscr{P})$，如果存在1-形式$\mu(\mathscr{P})\in\mathscr{C}$，使得

$$\Omega(L,\mu,\mathscr{P}) - \Omega(L,\mu) = \mu(\mathscr{P})\wedge \mathrm{d}t \qquad (7.5.27)$$

其中

$$\Omega(L,\mu) = \mathrm{d}\theta(L) + \mu\wedge \mathrm{d}t \qquad (7.5.28)$$

则$\Omega(L,\mu,\mathscr{P})$称为系统的基本 2-形式。

显然，对于完整系统$\mathscr{U}=(M^m,L,\mu)$，基本2-形式就是$\Omega(L,\mu)$。

设系统是正则的，即$\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial\eta^i\partial\eta^j}\right)$处处非异，若矢量场$X_L$满足下列条件

$$X_L \lrcorner \mathrm{d}t=1, \quad X_L \lrcorner \Omega(L,\mu,\mathscr{P})=0, \quad X_L \lrcorner \mathscr{L}_X\mathscr{P}=0 \quad (7.5.29)$$

则称 X_L 为系统的 Lagrange 矢量场。

定义 7 如果 $j^1(\gamma)$ 是系统的 Lagrange 矢量场的积分曲线，且

$$j^1(\gamma)^*\mathscr{P}=0$$

则曲线 $\gamma:\to M^m$ 称为系统 $\mathscr{U}=(M^m,L,\mu,\mathscr{P})$ 的轨线。

展开（7.5.29）中的第二式，易得

$$X_L \lrcorner \theta^i=0 \quad (7.5.30)$$

即

$$X_L \lrcorner \mathscr{C}=0 \quad (7.5.31)$$

上式说明，X_L 是一个二阶微分方程。据此，有下述命题。

命题 2 矢量场 $X_L\in\mathscr{X}(J^1(\boldsymbol{R},M^m))$ 是系统 $\mathscr{U}$ 的 Lagrange 矢量场的必要充分条件是

$$X_L=\frac{\partial}{\partial t}+\gamma^i X^i+\Delta^i\frac{\partial}{\partial\gamma^i} \quad (7.5.32)$$

其中

$$\Delta^i=\mathscr{L}_{X_L}\gamma^i \quad (7.5.33)$$

并且

$$\mathscr{L}_{X_L}\left(\frac{\partial L}{\partial\gamma^i}\right)-(C^k_{0\,i}+C^k_{j\,i}\gamma^j)\frac{\partial L}{\partial\gamma^k}-X^iL=Q_i+\lambda_a\frac{\partial f^a}{\partial\gamma^i} \quad (7.5.34)$$

$$\mathscr{L}_{X_L}f^a=0 \quad (7.5.35)$$

等式（7.5.34）称为Lagrange-Poincaré 恒等式。它实际上就是非完整系统用 Poincaré–Четаев 变量表示的带乘子的 Lagrange 方程。

由定义 7 知，系统 $\mathscr{U}$ 的轨线 $\gamma:\boldsymbol{R}\to M^m$ 是 X_L 的积分曲线。因此，$j^1(\gamma):\boldsymbol{R}\to M^m$ 应满足的方程是（1）将（7.5.34）中的 $\mathscr{L}_{X_L}$ 改为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 所得到的方程；（2）将（7.5.35）中的 $\mathscr{L}_{X_L}$ 改为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 所得到的方程，即 $f^a=\mathrm{const}$. 这一点由 §7.2 中积分曲

线的定义可得到。

如果系统 $\mathscr{U}$ 是完整的，当且仅当沿 $j^1(\gamma)$满足下述方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \gamma^i}\right)-(C^k_{0\,i}+C^k_{j\,i}\gamma^j)\frac{\partial L}{\partial \gamma^k}-X^iL=Q_i$$

则 $\gamma:\boldsymbol{R}\to M^m$ 是系统的轨线。特别地，若取 $\omega^i\in\mathscr{X}^*(M^m)$，则由式（7.5.2）知 $C^k_{0\,i}=0$，即

$$\mathrm{d}\omega^i=-\frac{1}{2}C^i_{k\,l}\omega^k\wedge\omega^l$$

此时，$j^1(\gamma)$应满足的方程是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \gamma^i}\right)-C^k_{j\,i}\gamma^j\frac{\partial L}{\partial \gamma^k}-X^iL=Q_i$$

这就是文献[21]所说的 Boltzmann-Hamel 方程。

5．约束嵌入

定义 8 如下定义的子流形 N 称为系统 $\mathscr{U}$ 的约束嵌入子流形：

$$N=\{j^1(\gamma)\in J^1(\boldsymbol{R},M^m)\,|\,\gamma\in\Gamma(\boldsymbol{R}\times M^m),\ \ j^1(\gamma)^*\mathscr{P}=0\}\tag{7.5.36}$$

显然，N是 $J^1(\boldsymbol{R},\ M^m)$的一个 $2n-r+1$ 维子流形。如果 $\mathscr{P}$ 是由一阶约束组 $\{f^a\}$ 生成的，则N可定义为

$$N=\{x\,|\,x\in J^1(\boldsymbol{R},M^m),\ \ f^1(x)=\cdots=f^r(x)=0\}\tag{7.5.37}$$

由式（7.5.35）和（7.5.37）可以看出，X_L 与N相切。

定义 9 如下定义的矢量场称为系统的约束嵌入 Lagrange 矢量场

$$\bar{X}_L\equiv i^*X_L=X_L|_N\tag{7.5.38}$$

其中 $X_L|_N$ 表示 X_L 在N上的限制。

设 $i:N\to J^1(\boldsymbol{R},M^m)$为包含映射，由式（7.5.29），有

$$i^*X_L\lrcorner i^*\Omega=0,\ \ i^*X_L\lrcorner \mathrm{d}t=1\tag{7.5.39}$$

且 i^*X_L 由式（7.5.39）唯一确定。

系统 $\mathscr{U}$ 的轨线就是 X_L 落在N上的积分曲线，这些曲线也是 i^*X_L 的积分曲线。

定义 10 设 $\varphi: J^1(\boldsymbol{R}, M^m) \to J^1(\boldsymbol{R}, M^m)$ 是微分同胚，对任意 $L \in F^0(J^1(\boldsymbol{R}, M^m))$，定义 $\bar{L}$，$\bar{X}_L$，$\bar{\Omega}$ 如下

$$\bar{L} \equiv i^* L = [(\varphi^{-1})^* L]|_N$$

$$\bar{X}_L \equiv i^* X_L = (\varphi_* X_L)|_N$$

$$\bar{\Omega}(L, \mu, \mathscr{P}) \equiv i^* \Omega(L, \mu, \mathscr{P}) = (\varphi^{-1})^* \Omega(L, \mu, \mathscr{P})|_N$$

要注意的是，$i^*\Omega(L, \mu, \mathscr{P}) \neq \Omega(i^* L, i^* \mu)$，但存在 μ'，使得 $i^*\Omega(L, \mu, \mathscr{P}) = \Omega(i^* L, \mu')$。

命题 3 设 $\mathscr{U} = (M^m, L, \mu, \mathscr{P})$，映射 $\varphi: J^1(\boldsymbol{R}, M^m) \to J^1(\boldsymbol{R}, M^m): (t, q^i, \eta^i) \mapsto (t, q^i, y^i)$ 满足

（1）$\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^m \neq 0$，

（2）矩阵$\left(\dfrac{\partial y^i}{\partial \eta^j}\right) = (a^i_j)$处处非异，

（3）$y^{\varepsilon+\alpha} = f^\alpha$，　$(\alpha = 1, \cdots, r;\ \varepsilon = m - r)$

则

$$\bar{X}_L = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial y^s}{\partial t} + \eta^i X^i y^s + a^s_i \Delta^i\right) \frac{\partial}{\partial y^s} + \eta^i X^i \quad (7.5.40)$$

且

$$\mathscr{L}_{\bar{X}_L}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial y^s}\right) - b^j_s (C^k_{0j} + C^k_{ij}\eta^i) \frac{\partial L}{\partial \eta^k} - b^j_s X^j \bar{L}$$

$$- \left(\frac{\partial L}{\partial \eta^k}\right)(\mathscr{L}_{\bar{X}_L} b^k_s - b^j_s X^j \eta^k) = b^j_s Q_j \quad (7.5.41)$$

其中 $b^j_s \in F^0(J^1(\boldsymbol{R}, M^m))$ 由 $b^j_s a^k_j = \delta^k_s$ 定义，$s = 1, \cdots, \varepsilon$；$i, j, k = 1, \cdots, m$。

方程（7.5.41）可称为准坐标下的Lagrange-Poincaré方程。

推论 1 若命题 3 中的 y 取为

$$\begin{gathered} y^i = \eta^i,\quad y^{\varepsilon+\alpha} = \eta^{\varepsilon+\alpha} - F^\alpha(t, q, \eta^i) \\ (i = 1, \cdots, \varepsilon;\ \alpha = 1, \cdots, r;\ \varepsilon = m - r) \end{gathered} \quad (7.5.42)$$

其中 $F^\alpha \in F^0(J^1(\boldsymbol{R}, M^m))$这样选取，使得函数组 $\{\eta^{\varepsilon+\alpha} - F^\alpha\}$生成的 Pfaff 系统 $\mathrm{span}\{\theta(\eta^{\varepsilon+\alpha} - F^\alpha)\}$ 与 $\mathscr{P}$ 重合，则

$$\bar{X}_L = Y_0 + \eta^i Y_i + \Delta^i \frac{\partial}{\partial \eta^i} \tag{7.5.43}$$

且

$$\mathscr{L}_{\bar{X}_L} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \eta^i} - (K^k_{0\,i} + K^k_{j\,i}\eta^j)\frac{\partial \bar{L}}{\partial \eta^k} - Y_i \bar{L} - \left(G^a_{0\,i} + G^a_{j\,i}\eta^j + \Delta^j \frac{\partial C^a_i}{\partial \eta^j}\right)\left(\overline{\frac{\partial L}{\partial \eta^a}}\right) = P_i \tag{7.5.44}$$

其中

$$C^a_i = \frac{\partial F^a}{\partial \eta^i}, \quad P_i = Q_i + C^a_i Q_a$$
$$Y_0 = \frac{\partial}{\partial t} + (F^a - C^a_i \eta^i) X^a, \quad Y_i = X^i + C^a_i X^a \tag{7.5.45}$$

而 $K^k_{0\,j}$，$K^k_{i\,j}$，$G^a_{0\,i}$，$G^a_{i\,j}$ 由下式确定

$$[Y_0, Y_i] = K^k_{0\,i} Y_k + G^a_{0\,i} X^a$$
$$[Y_i, Y_j] = K^k_{i\,j} Y_k + G^a_{i\,j} X^a \tag{7.5.46}$$

i，j，$k=1$，$\cdots$，ε；$\alpha=1$，$\cdots$，r；$\varepsilon=m-r$。

方程（7.5.44）就是不带乘子的 Lagrange-Poincaré 恒等式。

由式（7.5.44）可导出 Nielsen 形式的 Lagrange-Poincaré 恒等式

$$\frac{\partial}{\partial \eta^i}(\mathscr{L}_{\bar{X}_L}\bar{L}) - (K^k_{0\,i} + K^k_{j\,i}\eta^j)\frac{\partial \bar{L}}{\partial \eta^k} - 2Y_i \bar{L} - \left(G^a_{0\,i} + G^a_{j\,i}\eta^j + \Delta^j \frac{\partial C^a_i}{\partial \eta^j}\right)\left(\overline{\frac{\partial L}{\partial \eta^a}}\right) = P_i \tag{7.5.47}$$

推论 2 设命题 3 中的一阶约束组为 $\{f^a = \eta^a\}$，$y^i = \eta^i$，则

$$\bar{X}_L = \frac{\partial}{\partial t} + \eta^i X^i + \Delta^i \frac{\partial}{\partial \eta^i} \tag{7.5.48}$$

且

$$\mathscr{L}_{\bar{X}_L} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \eta^i} - (C^k_{0\,i} + C^k_{j\,i}\eta^j)\frac{\partial \bar{L}}{\partial \eta^k} - X^i \bar{L}$$

$$-(C^{\alpha}_{0i}+C^{\alpha}_{ji}\nu^{j})\left(\frac{\overline{\partial L}}{\partial \nu^{\alpha}}\right)=Q_i \qquad (7.5.49)$$

特别地，当 $\mathscr{P}=\mathrm{span}\{\theta(\nu^{\alpha})\}$ 是完整的 Четаев 型 Pfaff 约束系统时，有

$$C^{\alpha}_{0i}=C^{\alpha}_{ji}=0 \qquad (7.5.50)$$

因而 Poincaré–Четаев 恒等式

$$\mathscr{L}_{\widetilde{X}_L}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \nu^{i}}-(C^{k}_{0i}+C^{k}_{ji}\nu^{j})\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \nu^{k}}-X^{i}\widetilde{L}=Q_i \qquad (7.5.51)$$

满足，其中 i、j、$k=1$，…，ε；$s=1$，…，m；$\alpha=1$，…，r；$\varepsilon=m-r$。

命题 2 的证明容易由式（7.5.27）～（7.5.29）得到；命题 3 的证明可由定义 10 和式（7.5.36）～（7.5.39）得到；而推论 1 和推论 2 只需分别将 ν^{i} 的取法代入命题 3 即得证，在此不再赘述。

7.5.2 广义 Noether 定理

Noether 定理揭示出系统的守恒量（首次积分）与内在的动力学对称性之间的潜在关系，它的出现给近代力学和理论物理的研究以极大的推动。本小节讨论 Noether 定理对非完整系统的推广——广义 Noether 定理。

定义 11 设有完整力学系统 $\mathscr{U}'=(M^m,L,\widetilde{\mu})$ 以及非完整力学系统 $\mathscr{U}=(M^m,L,\mu,\mathscr{P})$。如果满足

$$\widetilde{\mu}\wedge dt=(\mu+\lambda_{\alpha}\theta(f^{\alpha}))\wedge dt \qquad (7.5.52)$$

则称 $\mathscr{U}'$ 为 $\mathscr{U}$ 的约化系统。

显然，约化系统 $\mathscr{U}'$ 是将 $\mathscr{U}$ 的 r 个一阶非完整约束当作它的 r 个特殊的首次积分。这样做，使得我们可以通过用完整系统的Noether 定理求系统 $\mathscr{U}'$ 的首次积分来寻找 $\mathscr{U}$ 的首次积分。

命题 4（Noether 定理） 设约化系统 $\mathscr{U}'=(M^m,L,\widetilde{\mu})$，其基本 2-形式为 $\Omega(L,\widetilde{\mu})$。定义

$$\mathscr{Y}=\{Y\in\mathscr{X}(J^1(\boldsymbol{R},M^m))\mid \mathrm{d}(Y\lrcorner\Omega(L,\tilde{\mu}))=0\} \tag{7.5.53}$$

则，当且仅当存在 $Y\in\mathscr{Y}$，使得

$$Y\lrcorner\Omega(L,\tilde{\mu})=\mathrm{d}G \tag{7.5.54}$$

时，$G\in F^0(J^1(\boldsymbol{R},M^m))$是系统 $\mathscr{U}$ 的一个首次积分。

〔证明〕 函数 $G\in F^0(J^1(\boldsymbol{R},M^m))$是$\mathscr{U}$的首次积分，当且仅当

$$\mathscr{L}_{X_L}G=X_L\lrcorner\mathrm{d}G=0$$

因对 $J^1(\boldsymbol{R},M^m)$上的任何 1-形式 ω，仅在存在 矢 量 场 $Y\in\mathscr{X}(J^1(\boldsymbol{R},M^m))$，使得

$$\omega=Y\lrcorner\Omega(L,\tilde{\mu})$$

时，才有

$$X_L\lrcorner\omega=0$$

所以G是首次积分的充分必要条件是：存在 $Y\in\mathscr{Y}$，使得式 (7.5.54) 成立。 ‖

和§7.3中命题9一样，命题4也说明系统的运动守恒量(首次积分)可以通过一个矢量场来生成。由式 (7.5.54) 易知，Y和$Y+hX_L$生成同一个首次积分，其中h为$J^1(\boldsymbol{R},M^m)$ 上的任意函数。

设 $Y\in\mathscr{Y}$，即

$$\mathrm{d}(Y\lrcorner\Omega(L,\tilde{\mu}))=0 \tag{7.5.55}$$

上式成立的充分必要条件是

$$\mathscr{L}_Y\Omega(L,\tilde{\mu})=i_Y\mathrm{d}(\tilde{\mu}\wedge\mathrm{d}t)$$

展开上式，有

$$\mathscr{L}_Y\mathrm{d}\theta(L)+\mathrm{d}(Y\lrcorner(\tilde{\mu}\wedge\mathrm{d}t))=0 \tag{7.5.56}$$

由 Poincaré 引理知，至少在局部上存在一个光滑函数g，使得

$$\mathscr{L}_Y\theta(L)+Y\lrcorner(\tilde{\mu}\wedge\mathrm{d}t)=\mathrm{d}g \tag{7.5.57}$$

设

$$Y=\delta\frac{\partial}{\partial t}+\xi^iX^i+\zeta^i\frac{\partial}{\partial\dot{\gamma}^i} \tag{7.5.58}$$

将式（7.5.58）及（7.5.52）、（7.5.8）代入式（7.5.57）中，得

$$L\frac{\partial\delta}{\partial\eta^i}+\frac{\partial L}{\partial\eta^j}\left(\frac{\partial\xi^j}{\partial\eta^i}-\frac{\partial\delta}{\partial\eta^i}\eta^j\right)=\frac{\partial g}{\partial\eta^i}$$

$$LX^i\delta+\frac{\partial L}{\partial\eta^j}(X^i\xi^j-(X^i\delta)\eta^j)+\frac{\partial^2 L}{\partial\eta^i\partial\eta^j}\zeta^j+\frac{\partial(X^jL)}{\partial\eta^i}\xi^j$$

$$+\frac{\partial^2 L}{\partial t\partial\eta^i}\delta-\tilde{Q}_i\delta-\frac{\partial L}{\partial\eta^k}(C^k_{0i}\delta+C^k_{ij}\xi^j)=X^ig \quad (7.5.59)$$

$$L\frac{\partial\delta}{\partial t}-\frac{\partial L}{\partial\eta^i}\left(\frac{\partial\xi^i}{\partial t}-\frac{\partial\delta}{\partial t}\eta^i\right)+\frac{\partial L}{\partial t}\delta+(X^iL)\delta$$

$$+\frac{\partial L}{\partial\eta^k}C^k_{0j}\xi^j+\tilde{Q}_i\xi^i-\eta^i\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\eta^i\partial\eta^j}\xi^j\right.$$

$$\left.+\frac{\partial(X^jL)}{\partial\eta^i}\xi^j+\frac{\partial^2 L}{\partial t\partial\eta^i}\delta\right)=\frac{\partial g}{\partial t}$$

因此，对于某个函数 $g\in F^0(J^1(\boldsymbol{R},M^m))$，如果方程（7.5.59）有解$(\delta,\xi^i,\zeta^i)$，则系统有对应于由式（7.5.58）定义的矢量场$Y$的首次积分

$$\begin{aligned}G&=g-Y\lrcorner\theta(L)\\&=g-\left[L\delta+\frac{\partial L}{\partial\eta^j}(\xi^j-\eta^j\delta)\right]\end{aligned} \quad (7.5.60)$$

反之，设G是系统的首次积分，我们来寻求生成G的矢量场Y。

由Y和X_L的表达式，有

$$[Y,X_L]=(\zeta^k-X_L\xi^k-C^k_{0i}(\xi^i-\delta\eta^i)+C^k_{ij}\xi^i\eta^j)X^k$$
$$-(X_L\delta)\frac{\partial}{\partial t}+(Y\Delta^i-X_L\zeta^i)\frac{\partial}{\partial\eta^i} \quad (7.5.61)$$

因 $$\begin{aligned}i_{[Y,X_L]}\Omega(L,\tilde{\mu})&=\mathscr{L}_Y i_{X_L}\Omega-i_{X_L}\mathscr{L}_Y\Omega\\&=-X_L\lrcorner(Y\lrcorner(d\tilde{\mu}\wedge dt))\end{aligned} \quad (7.5.62)$$

将式（7.5.61）代入式（7.5.62）中，并考虑到式（7.5.34），得关系式

$$\zeta^k = X_L\xi^k - \eta^k X_L\delta + C^k_{0\,i}(\xi^i - \delta\eta^i) - C^k_{i\,j}\xi^i\eta^j$$
$$- g^{kj}(\xi^i - \eta^i\delta)\frac{\partial \tilde{Q}_i}{\partial \eta^j} \tag{7.5.63}$$

式中，(g^{kj}) 是矩阵$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\eta^i\partial\eta^j}\right)$的逆，即

$$g^{kj}H^{ij} = \delta^{ki} = \begin{cases} 1, & k=i \\ 0, & k\neq i \end{cases} \tag{7.5.64}$$

$$H^{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial\eta^i\partial\eta^j}$$

式（7.5.63）说明对任何 $Y\in\mathscr{Y}$，ζ^k 由 δ 和 ξ^k 完全确定。正因如此，首次积分的构成式（7.5.60）中不含 ζ^k。

展开（7.5.54），考虑到 $X_L(G)=0$，取 $d\eta^i - \Delta^i dt$ 的系数相等，得关系式

$$\xi^i - \eta^i\delta = -g^{ij}\frac{\partial G}{\partial \eta^j} \tag{7.5.65}$$

由于Y和 hX_L+Y 生成同样的首次积分，因此系数 δ 是可以任意选取的。这样，对于一个给定的首次积分G，式（7.5.63）和（7.5.65）完全确定了生成G的矢量场Y。

命题 5 设 $Y\in\mathscr{X}(J^1(\boldsymbol{R}, M^m))$，$g\in F^0(J^1(\boldsymbol{R}, M^m))$，则当且仅当

（1）$\frac{\partial}{\partial\eta^i}\lrcorner(\mathscr{L}_Y\theta(L) - dg) = 0$ (7.5.66)

（2）$X_L\lrcorner d(g - Y\lrcorner\theta(L)) = 0$ (7.5.67)

（3）由式(7.5.58)定义的函数 δ,ξ^i,ζ^i 满足式(7.5.63)；

时，式（7.5.57）满足。

〔证明〕 将式（7.5.66）和（7.5.67）展开，得

$$L\frac{\partial\delta}{\partial\eta^i} + \frac{\partial L}{\partial\eta^j}\left(\frac{\partial\xi^j}{\partial\eta^i} - \frac{\partial\delta}{\partial\eta^i}\eta^j\right) = \frac{\partial g}{\partial\eta^i}$$

$$L\left(\frac{\partial\delta}{\partial t} + \eta^i X^i\delta\right) + \frac{\partial L}{\partial t}\delta + \xi^i X^i L + \frac{\partial L}{\partial\eta^j}\left(\frac{\partial\xi^j}{\partial t}\right.$$

$$+\eta^i X^i \xi^j - \eta^j \frac{\partial \delta}{\partial t} - \eta^i \eta^j X^i \delta \Big) + \frac{\partial L}{\partial \eta^k}(C^k_{0\,i} \quad (7.5.68)$$

$$+ C^k_{j\,i}\eta^j)(\xi^i - \eta^i\delta) + \tilde{Q}_i(\xi^i - \eta^i\delta)$$

$$= \frac{\partial g}{\partial t} + \eta^i X^i g$$

显然，方程组（7.5.68）、(7.5.57) 与方程组（7.5.59）是完全等价的，即命题得证。式（7.5.59）就是所谓的Killing方程，式（7.5.68）称为广义Killing方程。 ‖

命题 6 如果 $Z \in \mathscr{X}(J^1(\boldsymbol{R}, M^m))$ 关于 $\Omega(L, \tilde{\mu})$ 是准对称的，即存在常数 c，使得

$$\mathscr{L}_Z \Omega(L, \tilde{\mu}) = c\Omega(L, \tilde{\mu}) \quad (7.5.69)$$

则对任意的 $Y \in \mathscr{Y}$，均有 $[Z, Y] \in \mathscr{Y}$，并且若 G 是由 Y 生成的首次积分，则 $\mathscr{L}_Z G - cG$ 是由 $[Z, Y]$ 生成的首次积分。

〔证明〕 因为对关于 Ω 准对称的 Z，有

$$d([Z,Y] \lrcorner \Omega) = d(\mathscr{L}_Z i_Y \Omega - i_Y \mathscr{L}_Z \Omega)$$
$$= d(\mathscr{L}_Z i_Y \Omega) - d(i_Y(c\Omega)) = \mathscr{L}_Z(d i_Y \Omega) - c\, d i_Y \Omega$$
$$= 0$$

此即 $[Z, Y] \in \mathscr{Y}$。进一步，在局部上有

$$i_{[Z,Y]}\Omega = \mathscr{L}_Z i_Y \Omega - i_Y \mathscr{L}_Z \Omega$$
$$= \mathscr{L}_Z dG - c i_Y \Omega = d(\mathscr{L}_Z G - cG)$$

亦即 $\mathscr{L}_Z G - cG$ 是由 $[Z, Y]$ 生成的首次积分。 ‖

命题 6 给出用已知的首次积分求另外的首次积分的一种方法。它的构思和文献[35]的思想一致。

2. 嵌入子流形上的表述

命题 4 ～命题 5 只有在得到约化系统后才能用，而约化系统的构造往往又很麻烦。如果引入嵌入子流形，将广义 Noether 定理在嵌入子流形上表述，就可避免这种麻烦。

命题 7[29] 设 $\mathscr{U} = (M^m, L, \mu, \mathscr{P})$，定义

$$\mathscr{Y}_{\mathscr{P}}=\{Y\in\mathscr{Y}\mid i^*(Y\lrcorner\mathscr{P})=0\} \qquad (7.5.70)$$

式中 $i:N\to J^1(\boldsymbol{R},M^m)$ 是从嵌入子流形 N 到 $J^1(\boldsymbol{R},M^m)$ 的包含映射。则当且仅当存在一个矢量场 $Y\in\mathscr{Y}_{\mathscr{P}}$，使得

$$\bar{Y}\lrcorner\bar{\Omega}(L,\mu,\mathscr{P})=\mathrm{d}\bar{G} \qquad (7.5.71)$$

时，函数 $\bar{G}\in F^0(N)$是$\mathscr{U}$的首次积分，即

$$\mathscr{L}_{\bar{X}_L}\bar{G}=0$$

同样，我们亦可得到约束嵌入子流形N上的 Killing 方程

$$\frac{\partial\bar{L}}{\partial\eta^i}\left(\frac{\partial\xi^i}{\partial\eta^j}-\eta^i\frac{\partial\delta}{\partial\eta^j}\right)-\bar{L}\frac{\partial\delta}{\partial\eta^j}+\left(\widetilde{\frac{\partial L}{\partial\eta^\alpha}}\right)\frac{\partial C_i^\alpha}{\partial\eta^j}(\xi^i-\eta^i\delta)$$

$$=\frac{\partial\bar{g}}{\partial\eta^j} \qquad (7.5.72\,a)$$

$$\bar{L}\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}+\eta^iY_i\delta\right)+\frac{\partial\bar{L}}{\partial t}\delta+(Y_i\bar{L})\xi^i+\frac{\partial\bar{L}}{\partial\eta^i}\left(\frac{\partial\xi^i}{\partial t}+\eta^jY_j\xi^i\right.$$

$$\left.-\eta^i\frac{\partial\delta}{\partial t}-\eta^i\eta^jY_j\delta\right)+\left((K_{0\,i}^k+K_{j\,i}^k\eta^j)\frac{\partial\bar{L}}{\partial\eta^k}+(G_{0\,i}^\alpha\right.$$

$$\left.+G_{j\,i}^\alpha\eta^j)\left(\widetilde{\frac{\partial L}{\partial\eta^\alpha}}\right)\right)(\xi^i-\eta^i\delta)+P_i(\xi^i-\eta^i\delta)$$

$$=\frac{\partial\bar{g}}{\partial t}+\eta^iY_i\bar{g} \qquad i,j,k=1,\cdots,\varepsilon;\ \alpha=1,\cdots,r;\ \varepsilon=m-r$$

$$(7.5.72\,b)$$

如果对于某个 $\bar{g}\in F^0(N)$，式 (7.5.72) 有解 δ，ξ^i，则存在由矢量场

$$\bar{Y}\equiv i^*Y=\delta\frac{\partial}{\partial t}+\xi^iX^i+\zeta^i\frac{\partial}{\partial\dot{\eta}^i}$$

$$=\delta Y_0+\xi^iY_i+\zeta^i\frac{\partial}{\partial\dot{\eta}^i} \qquad (7.5.73)$$

生成的首次积分

$$\bar{G}=i^*(g-Y\lrcorner\theta(L))$$

$$=\tilde{g}-\bar{Y}\lrcorner\widetilde{\theta(L)}=\tilde{g}-\tilde{L}\delta-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\eta^i}(\xi^i-\eta^i\delta) \quad (7.5.74)$$

式中 $s=1,\cdots,m$；$i=1,\cdots,\epsilon=m-r$；Y_0、Y_i 由式（7.5.45）定义；函数 ζ^i 由 δ 和 ξ^i 完全确定。经与得到式（7.5.63）相似的推导，得 ζ^i 所应满足的关系式

$$\left(\frac{\partial^2\tilde{L}}{\partial\eta^i\partial\eta^j}-\left(\widetilde{\frac{\partial L}{\partial\eta^\alpha}}\right)\frac{\partial C_i^\alpha}{\partial\eta^j}\right)\zeta^i=\left(\frac{\partial^2\tilde{L}}{\partial\eta^j\partial\eta^k}-\left(\widetilde{\frac{\partial L}{\partial\eta^\alpha}}\right)\frac{\partial C_k^\alpha}{\partial\eta^j}\right)(\bar{X}_L\xi^k$$
$$-\eta^k\bar{X}_L\delta+K_{0i}^k(\xi^i-\delta\eta^i)-K_{il}^k\xi^l\eta^i)$$
$$+\frac{\partial}{\partial\eta^j}\left(\widetilde{\frac{\partial L}{\partial\eta^\alpha}}\right)(G_{0i}^\alpha(\xi^i-\delta\eta^i)-G_{il}^\alpha\xi^i\eta^l)$$
$$+\left(\frac{\partial P_i}{\partial\eta^j}-(Q_\alpha+\lambda_\alpha)\frac{\partial C_i^\alpha}{\partial\eta^j}\right)(\xi^i-\eta^i\delta) \quad (7.5.75)$$

例 1 Appell-Hamel 例

Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz \quad (7.5.76)$$

非完整约束为

$$f=\dot{z}-a(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2} \quad (7.5.77)$$

取

$$\eta_1=\dot{x},\quad \eta_2=\dot{y},\quad \eta_3=\dot{z}$$

则相应的 Poincaré 基为

$$\frac{\partial}{\partial t},\quad X^1=\frac{\partial}{\partial x},\quad X^2=\frac{\partial}{\partial y},\quad X^3=\frac{\partial}{\partial z}$$

由式（7.5.46）、（7.5.45）和（7.5.72）得 Killing 方程

$$ma^2\eta_1(\eta_1^2+\eta_2^2)^{-1}(\eta_2\xi_1-\eta_1\xi_2)+m(1+a^2)\left(\eta_1\frac{\partial\xi_1}{\partial\eta_1}\right.$$
$$\left.+\eta_2\frac{\partial\xi_2}{\partial\eta_1}\right)=\frac{\partial\tilde{g}}{\partial\eta_1}$$

$$ma^2\eta_1(\eta_1^2+\eta_2^2)^{-1}(\eta_1\xi_2-\eta_2\xi_1)+m(1+a^2)\left(\eta_1\frac{\partial\xi_1}{\partial\eta_2}\right.$$

$$+\eta_2\frac{\partial\xi_2}{\partial\eta_1}\Big)=\frac{\partial\bar{g}}{\partial\eta_2} \tag{7.5.78}$$

$$mga(\eta_1^2+\eta_2^2)^{-1/2}(\eta_1\xi_1+\eta_2\xi_2)=-\frac{\partial\bar{g}}{\partial t}-\eta_1Y_1\bar{g}-\eta_2Y_2\bar{g}$$

对于 $\bar{g}=\eta_1\eta_2^{-1}$，式（7.5.76）有解

$$\xi_1=-\eta_2^{-1},\qquad \xi_2=\eta_1\eta_2^{-2}$$

于是有第一积分 $\bar{G}$ 为

$$\bar{G}=\bar{g}-(\eta_1\xi_1+\eta_2\xi_2)=\eta_1\eta_2^{-1} \tag{7.5.79}$$

7.5.3 Hamilton 原理

考虑一个有 m 个自由度的力学系统，其位形空间为微分流形 M^m，则 $J^1(\boldsymbol{R},M^m)$是其状态时间空间。设 $J^1(\boldsymbol{R},M^m)$ 上的局部坐标为 $\{q^i,\dot{q}^i,t\}$，若取前述的 ω^i 为

$$\omega^i=\mathrm{d}q^i \tag{7.5.80}$$

则

$$\eta^i=\dot{q}^i$$

并且

$$C^k_{0\,i}=C^k_{j\,i}=0$$

接触形式为

$$\theta^i=\mathrm{d}q^i-\dot{q}^i\mathrm{d}t$$

Cartan 形式为

$$\theta(L)=L\mathrm{d}t+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}(\mathrm{d}q^i-\dot{q}^i\mathrm{d}t)$$

显然，$\gamma:t\mapsto(q^i,t)$ 是系统的轨线的充要条件是：沿 $j^1(\gamma):t\mapsto\left(q^i(t),\ \dot{q}^i(t)=\frac{\mathrm{d}q^i(t)}{\mathrm{d}t},\ t\right)$满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=Q_i+\lambda_a\frac{\partial f^a}{\partial\dot{q}^i} \tag{7.5.81}$$

$$f^a=0 \tag{7.5.82}$$

设 X_γ 是 $j^1(\gamma)$的切矢量场，则沿 $j^1(\gamma)$ 满足式（7.5.81）的充要条件是

$$X_\gamma \lrcorner \Omega(L,\mu,\mathscr{P})=0 \tag{7.5.83}$$

式中，$\Omega(L,\ \mu,\mathscr{P})$ 是系统 $\mathscr{U}=(M^m,L,\mu,\mathscr{P})$ 的基本2-形式，且

$$\Omega(L,\mu,\mathscr{P})=\left(\mathrm{d}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}\mathrm{d}t-Q_i\mathrm{d}t-\lambda_a\frac{\partial f^a}{\partial \dot{q}^i}\mathrm{d}t\right)\wedge\theta^i \tag{7.5.84}$$

将式（7.5.83）在 $j^1(\gamma):[a,b]\to J^1(\boldsymbol{R},M^m)$ 上积分，得

$$\int_{j^1(\gamma)} X_\gamma \lrcorner \Omega(L,\mu,\mathscr{P})=0 \tag{7.5.85}$$

记

$$I(\gamma)=\int_{j^1(\gamma)} X_\gamma \lrcorner \Omega \tag{7.5.86}$$

命题 7a 若 $\gamma:[a,b]\to M^m$ 是系统 $\mathscr{U}$ 的轨线，则泛函 $I(\gamma)=0$。

上述命题就是非完整非保守系统的 Hamilton 原理，与 § 7.4 中完整保守系统的 Hamilton 原理不同，它已不再是稳定作用量原理。

7.5.4 高阶非完整力学系统的微分几何结构

1. n 次速度空间

设 $\gamma_1:\boldsymbol{R}\to M^m$ 和 $\gamma_2:\boldsymbol{R}\to M^m$ 是两条可微曲线，(γ_1,t_1) 和 (γ_2,t_2) 称为是等价的，如果对 M^m 上的任意可微函数 f，下式成立：

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(f\circ\gamma_1)(t_1)=\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(f\circ\gamma_2)(t_2)$$

$$k=0,1,2,\cdots,n \tag{7.5.87}$$

上述等价类的集合记作 $T^n(M^m)$，它是一个微分流形。特别是，$T^0(M^m)$就是 M^m 本身，而 $T^1(M^m)=TM^m$。(γ,t) 在上述意义下的等价类记作 $i_t^n\gamma$，$i_t^n\gamma\in T^n(M^m)$称为 γ 在 t 处的 n 速度。

定义 12 对每一个 $n'\leqslant n$，映射

$$\tau_M^{n,n'}: T^n(M^m) \to T^{n'}(M^m) \tag{7.5.88}$$

由下式定义

$$\tau_M^{n,n'}(i_t^n \gamma) = i_t^{n'} \gamma \tag{7.5.89}$$

显而易见，$\tau_M^{n,0}$ 与由下式定义的映射 $\tau_M^n: T^n(M^m) \to M^m$ 一致：

$$\tau_M^n(i_t^n \gamma) = \gamma(t) \tag{7.5.90}$$

特别是，当 $n=1$ 时，τ_M^1 就是切丛投影

$$\tau_M: TM^m \to M^m \tag{7.5.91}$$

命题 8[24] 积流形 $\boldsymbol{R} \times T^k(M^m)$ 即是 k-射流形 $J^k(\boldsymbol{R}, M^m)$。若记 $\gamma: \boldsymbol{R} \to M^m$ 在 t 处的 k 阶延伸为 $j_t^k(\gamma)$，则

$$j_t^k(\gamma): t \mapsto (t, i_t^k \gamma) \tag{7.5.92}$$

即

$$j^k(\gamma): \boldsymbol{R} \to J^k(\boldsymbol{R}, M^m): t \mapsto (t, i_t^k \gamma) \tag{7.5.93}$$

显然，流形 $T^k(M^m)$ 的维数是 $(k+1)m$，而 $J^k(\boldsymbol{R}, M^m)$ 的维数是 $(k+1)m+1$。

设 $\{q^i,\ i=1,\cdots,m\}$ 是 $U \subset M^m$ 上的局部坐标系。则如下定义的函数 $\{q_l^i \mid i=1,\cdots,m;\ l=0,\cdots,k\}$ 是 $(\tau_M^k)^{-1} U \subset T^k(M^m)$ 上的局部坐标函数：

$$q_l^i(i_t^k \gamma) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q^i \circ \gamma)(t) \tag{7.5.94}$$

其中 $\quad q_0^i = q^i,\ q_1^i = \dot{q}^i,\ q_2^i = \ddot{q}^i$

2. k-射流形 $J^k(\boldsymbol{R}, M^m)$上的高阶非完整力学系统

定义 13 $J^k(\boldsymbol{R}, M^m)$上的1-形式

$$\theta_l^i = \mathrm{d}q_l^i - q_{l+1}^i \mathrm{d}t, \quad (i=1,\cdots,m;\ l=0,\cdots,k-1) \tag{7.5.95}$$

称为接触形式，它满足接触条件

$$j^k(\gamma)^* \theta_l^i = 0 \tag{7.5.96}$$

其中 $\gamma: \boldsymbol{R} \to M^m$ 是可微曲线。记

$$\mathscr{C} = \mathrm{span}\{\theta_l^i \mid i=1,\cdots,m;\ l=0,\cdots,k-1\} \tag{7.5.97}$$

$\mathscr{C}$ 称为接触系统。记 $\mathscr{C}$ 的子空间

$$\mathscr{C}^*=\text{span}\{\theta_0^i|i=1,\cdots,m\} \qquad (7.5.98)$$

$\mathscr{C}^*$ 称为基本接触系统。

对于任意函数 $L\in F_0(J^r(\boldsymbol{R},M^m))$，如果它不是 $J^{r'}(\boldsymbol{R},M^m)$ 上的函数的提升，$r'<r$，即 $\frac{\partial L}{\partial q_r^i}$，$i=1,\cdots,m$，至少有一个不为零。则定义该函数的 Cartan 1-形式为

$$\theta(L)=L\mathrm{d}t+\frac{\partial L}{\partial q_r^i}\theta_0^i \qquad (r=0,\cdots,k) \qquad (7.5.99)$$

设 $\{F^a\}$ 是系统 $\mathscr{U}$ 的 k 阶约束组，且其中不包含 $J^{k'}(\boldsymbol{R},M^m)$上函数的提升，$k'<k$，称

$$\mathscr{P}=\text{span}\{\theta(F^a)|\alpha=1,\cdots,g\} \qquad (7.5.100)$$

为系统 $\mathscr{U}$ 的由 $\{F^a\}$ 生成的广义 Четаев 型 Pfaff 约束系统。

命题 9 设 $F^a\in J^k(\boldsymbol{R},M^m)$彼此独立，即

$$\mathrm{d}F^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}F^g\neq0 \qquad (7.5.101)$$

则

$$\theta(F_1)\wedge\cdots\wedge\theta(F^g)\neq0 \qquad (7.5.102)$$

证明与命题 1 的类似。

由命题 9 可以看出，k 阶约束组 $\{F^a|\alpha=1,\cdots,g\}$ 生成的 Pfaff系统 $\mathscr{P}$ 是 g 维的。

定义 14 一个 Lagrange 函数 L 是 $J^1(\boldsymbol{R},M^m)$ 上的一个光滑函数；力形式是 $J^k(\boldsymbol{R},M^m)$ 上的一个 1-形式，$\mu=Q_i\theta$，其中 $Q_i\in F_0(J^k(\boldsymbol{R},M^m))$；$\mathscr{P}=\text{span}\{\theta(F^a)|\alpha=1,\cdots,g\}$ 是由 k 阶约束组 $\{F^a|\alpha=1,\cdots,g\}$ 生成的广义 Четаев 型 Pfaff 约束系统。$\mathscr{U}=(M^m,L,\mu,\mathscr{P})$ 称为 $J^k(\boldsymbol{R},M^m)$ 上的一个 k 阶非完整力学系统。

当 $k=1$ 时，$\mathscr{U}$ 即为前述的一阶非完整力学系统。

定义 15 如果 $\mathscr{P}$ 在 Frobenius 意义下在 $J^{k'}(\boldsymbol{R},M^m)$ 上完全可积，则称 $\mathscr{P}$ 为 k 阶 i 次（($i=k-k'$)可积的非完整 Pfaff 约束系统。

对于 i 次可积的 Pfaff 约束系统 $\mathscr{P}$，一定存在一组函数 $f^a\in F_0(J^{k'}(\boldsymbol{R},\ M^m))$，$\alpha=1,\cdots,g$，使得 $\mathscr{P}$ 由 k' 阶约束组生成。特别是，当 $i=k$ 时，$\mathscr{P}$ 可以一个零阶约束组，即完整约束组生成，此时称 $\mathscr{P}$ 为完整的。

系统 $\mathscr{U}$ 的基本 2-形式为

$$\Omega(L,\mu,\mathscr{P})=\Omega(L,\mu)+\mu(\mathscr{P})\wedge \mathrm{d}t \qquad (7.5.103)$$

其中

$$\Omega(L,\mu)=\mathrm{d}\theta(L)+\mu\wedge\mathrm{d}t \qquad (7.5.104)$$

$$\mu(\mathscr{P})\in\mathscr{C}^* \qquad (7.5.105)$$

定义 16 设矢量场 $X_L\in\mathscr{X}(J^k(\boldsymbol{R},\ M^m))$。如果 $\mathscr{U}$ 是正规的，即矩阵 $\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial q_1^i\partial q_1^j}\right)$ 处处非异，且

$$X_L\lrcorner\,\mathrm{d}t=1 \qquad (7.5.106)$$

$$X_L\lrcorner\,\mathscr{C}^{**}=0,\ \mathscr{C}^{**}=\mathrm{span}\{\theta_l^i\,|\,l=1,\cdots,k-1\} \qquad (7.5.107)$$

$$X_L\lrcorner\,\mathscr{L}_{X_L}\mathscr{P}=0 \qquad (7.5.108)$$

$$X_L\lrcorner\,\Omega(L,\mu,\mathscr{P})=0 \qquad (7.5.109)$$

则称 X_L 为系统 $\mathscr{U}(M^m,L,\mu,\mathscr{P})$ 的 Lagrange 矢量场。

如果 $\gamma:\boldsymbol{R}\to M^m$ 的 k 阶延伸 $j^k(\gamma)$ 是 X_L 的积分曲线，且

$$j^k(\gamma)^*\mathscr{P}=0 \qquad (7.5.110)$$

则称 γ 为系统 $\mathscr{U}$ 的轨线。

展开 (7.5.109)，可知

$$X_L\lrcorner\,\mathscr{C}^*=0 \qquad (7.5.111)$$

命题 10 矢量场 $X\in\mathscr{X}(J^k(\boldsymbol{R},M^m))$。当且仅当

$$X=\frac{\partial}{\partial t}+q_1^i\frac{\partial}{\partial q_0^i}+\cdots+q_k^i\frac{\partial}{\partial q_{k-1}^i}+\Delta^i\frac{\partial}{\partial q_k^i} \qquad (7.5.112)$$

且满足

$$\mathscr{L}_X\frac{\partial L}{\partial q_1^i}-\frac{\partial L}{\partial q_0^i}=Q_i+\lambda_a\frac{\partial F^a}{\partial q_k^i} \qquad (7.5.113)$$

$$\mathscr{L}_X q_k^i=\Delta^i,\ \mathscr{L}_X F^a=0 \qquad (7.5.114)$$

其中 $\lambda_a\in F^0(J^k(\boldsymbol{R},M^m))$ 是 Lagrange 乘子。

证明只需将式 (7.5.106)~(7.5.109) 展开即可得到，详见

文献〔32〕。

命题 11 $\gamma: \boldsymbol{R} \to M^m: t \mapsto (t, q(t))$ 是系统 $\mathscr{U}$ 的轨线的充要条件是：沿 $j^k(\gamma)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial q_1^i} - \frac{\partial L}{\partial q_0^i} = Q_i + \lambda_a \frac{\partial F^a}{\partial q_k^i} \qquad (7.5.115)$$

和

$$F^a = 0$$

式（7.5.115）就是经典力学中带乘子的Lagrange方程。

命题 11 的证明由积分曲线的定义即可得到。

§7.6 历 史 资 料

7.6.1 名家介绍

E. Cartan（1869～1951）法国数学家。1941 年当选为英国皇家协会会员，是法国科学院院士，并于 1946 年任该院院长。主要贡献在连续群论，完整系统，相对论和旋量论等。他的著作《积分不变量讲义》（Leçons sur les invariants intégraux, Paris, 1921）是该领域内的经典著作，是近代微分几何的奠基性工作。他给出 Cartan 形式，Poincaré-Cartan积分不变量等。

7.6.2 年事介绍

1901 年 Poincaré 提出了力学方程的新形式——Poincaré 方程。

1922 年 E. Cartan 所著《Leçons sur les invariants intégraux》出版，开创了微分形式在力学方面的应用。

1926 年 J. L. Synge 写出了第一篇涉及 Riemann 流形上的力学的系统性论文。

1951～1952 年 E. Ehresmann 提出了射-流形理论。

1952 年 G. Reeb，首次对 Hamilton 系统和辛流形进行了

现代描述。

1962 年　J. Klein，用特殊外微分法建立了 Klein 体系的 Lagrange 方程。

1970 年　R. Hermann 发展了 Cartan 的微分形式理论和 E. Ehresmann 的射-流形理论。

1973 年　Q. K. Ghori 等给出了非完整力学系统的 Poincaré 方程。R. Hermann 研究了一类具有特殊 Pfaff 约束系统的力学系统的微分几何结构。

1974 年　Q. K. Ghori 等推广了 Hamilton-Jacobi 理论，并得到了变质量非完整力学系统的 Poincaré 方程。W. M. Tulczyjew 讨论了 Hamilton 系统、Lagrange 系统及 Legendre 变换，对两个系统之间的等价性作了探讨。

1977 年　G. B. Edelen 研究了完整非保守和非完整非保守系统的 Lagrange 力学。

1978 年　射-流形的一个推广由 W. M. Tulczyjew 作出。

1982 年　R. Hermann 从 Lagrange 的观点探讨了一般力学系统的微分几何结构。S. Benenti 讨论了分析力学中的辛关系。F. Cantrijin 得到了完整非保守力学系统的 Noether 型定理。

1984 年　F. Cantrijin 进一步研究完整非保守力学系统的辛结构。J. E. Werth 推广了 Legendre 变换，讨论了非保守的 Hamilton 力学和 Lagrange 力学的等价问题。

1985 年　M. DE. León 等用拟辛结构得到了经典完整高阶力学系统的广义 Klein 形式的运动方程。

7.6.3　关于近代分析力学

所谓“近代分析力学”是指用近代数学，特别是用近代微分几何（包括流形，张量丛，微分流形，辛流形等）来描述的分析力学。微分几何与力学大有“姻缘”，这种“姻缘”不仅从数学观点上提供了更严格的表达，而且可以使我们更好地了解其物理内

容。在近代分析力学方面，被称之为“圣经”的有三本著作，即 Abraham and Marsden (1978, 1980)[2]，Арнольд(1974)[1]，以及 Godbillon (1969)[6] 的书。

近代分析力学的主要内容有以下三个方面：（1）流形和 Lagrange 力学；（2）辛流形和 Hamilton 力学；（3）KAM 定理。在这一章里，我们涉及到前两个方面，当然，也涉及到非完整系统动力学的几何描述，至于第三个方面的有关问题将在下一章讨论。

近年来，国际上十分重视对近代分析力学的研究。1982 年 6 月在意大利都灵召开的国际分析力学近代发展讨论会上，许多力学家、数学家和物理学家介绍了他们在近代分析力学方面的研究成果[36]。加拿大学者 W. M. Tulczyjew 介绍了“Lagrange 力学的几何基础”，意大利学者 S. Benenti 介绍了“分析力学中的辛关系”，法国学者 J. M. Souriau 介绍了“二体问题的整体几何”，美国科学家 J. E. Marsden 等介绍了“有对称性的 Hamilton 系统”，法国学者 C. M. Marle 介绍了“分析力学中的接触流形，正则流形和 Hamilton-Jacobi 方法”等。

从 80 年代初，我国力学工作者也开始在近代分析力学方面作出了一些贡献[28-35]。不过总的说来，显得还很薄弱，尚需努力。

习　　题

1．设 $\Phi: M^m \to N^n$ 是映射，M^m、N^n 是微分流形。试证：若 (U,φ)、(U,φ^1) 是 M^m 上的图，(V,ψ)、(V,ψ^1) 是 N^n 上的图，且 $\Phi(U)\subset V$，则

$$\widetilde{\Phi}=\psi\circ\Phi\circ\varphi^{-1}$$

是 c^r 的充分必要条件是 $\widetilde{\Phi}^1=\psi^1\circ\Phi\circ(\varphi^1)^{-1}$ 是 c^r 的。

2．设 $\Phi: M^m \to N^n$ 是微分同胚，$X\in\mathscr{X}(M^m)$，$\gamma: I\to U\subset M^m$ 是 X 在 $x\in M^m$ 的积分曲线，F_t 是其流。试证：$\Phi\circ\gamma$ 是 Φ_*X 在 $\Phi(x)\in N^n$ 的积分曲线，且其流是 $\Phi\circ F_t\circ\Phi^{-1}$。

3．设 $F_t=e^{tX}$ 是 E 中线性矢量场 X 的流，试证：方程

$$\dot{x}=X(x)+f(x)$$

的带有初始条件 x_0 的解满足如下积分方程

$$x(t)=e^{tX}x_0+\int_0^t e^{(t-s)X}f(X(s))\,ds$$

4．如果对 M^m 上的每一点 x 都存在一个邻域 U，使得 $f\in F^0(U)$，$\mathscr{L}_X f=\mathscr{L}_Y f$，试证 $X=Y$。

5．设 X、$Y\in\mathscr{X}(M^m)$，F_t 和 G_t 分别是其流，试证下述说法等价：

（1）$[X,Y]=0$；（2）$(F_t)_*Y=Y$；（3）$F_t\circ G_t=G_t\circ F_t$

6．设 α 是 2-形式，β 是 1-形式，证

$$(\alpha\wedge\beta)(X_1,X_2,X_3)=\alpha(X_1,X_2)\beta(X_3)-\alpha(X_1,X_3)\beta(X_2)+\alpha(X_2,X_3)\beta(X_1)$$

其中 $X_1,X_2,X_3\in\mathscr{X}(M^m)$。

7．设 ω 是 M^m 上的一个 k-形式，$f\in F^0(M^m)$，且对任意的 $x\in M^m$，$f(x)\neq0$。若 $f\omega$ 是恰当的，试证存在 1-形式 θ，使得

$$d\omega=\theta\wedge\omega,\quad d\omega\wedge\omega=0$$

8．设 (M^{2m},Ω) 是辛流形，$f:M^{2m}\to M^{2m}$ 是局部微分同胚，则当且仅当对任意两个定向的、紧的流形 B 和 ∂B，有

$$\int_{\partial B}\theta=\int_{f(\partial B)}\theta$$

时，f 是辛的。其中 $B\subset M^{2m}$ 是子流形。

9．设 $X\in\mathscr{X}(M^m)$，定义 $P_X:T^*M^m\to\boldsymbol{R}:P_X(\alpha_x)=\alpha_x(X(x))$，$x\in M^m$，$\alpha_x\in T_x^*M^m$。试证如果 X、$Y\in\mathscr{X}(M^m)$，那么在自然辛结构上 $\{P_X,P_Y\}=-P_{[X,Y]}$。

10．设 (M^{2m},Ω) 是辛流形，X 是一个局部 Hamilton 矢量场，ω 是 M^{2m} 上的 $2m$-形式，且

$$\omega=f\omega_m,\quad \omega_m=\underbrace{\Omega\wedge\cdots\wedge\Omega}_{m\text{个}}$$

试证 ω 是关于 X 的一个不变形式当且仅当 f 是一个不变函数。

11．设 $L:TM^m\to R$ 是 Lagrange 函数，其 Lagrange 矢量场为 X_E。设 $\Phi:M^m\to N^n$ 是微分同胚，$T\Phi:TM^m\to TN^n$ 是 Φ 诱导出来的映射。那么关于 $\widetilde{L}=L\circ T\Phi^{-1}$ 的 Lagrange 矢量场是 $(T\Phi)_*X_E$。

12. 设 X_H 是辛流形 (M^{2m}, Ω) 上的 Hamilton 矢量场，Hamilton 函数是 H，其流是 F_t。则对任意的 $f\in F^0(M^{2m})$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ F_t)=\{f\circ F_t, H\}$$

13. 设 (M^{2m}, Ω) 是辛流形，f、$g\in F^0(M^{2m})$，则 $\mathrm{d}\{f, g\}=\{\mathrm{d}f, \mathrm{d}g\}$。其中

$$\{\mathrm{d}f, \mathrm{d}g\}=-\mathscr{L}_{X_f}\mathrm{d}g+\mathscr{L}_{X_g}\mathrm{d}f+\mathrm{d}(i_{X_f}i_{X_g}\Omega)$$

14. 设 (M^{2m}, Ω) 是辛流形，(U, φ) 是 M^{2m} 上的一张图，$\varphi(u)=\{q^1(u), \cdots, q^m(u), p_1(u), \cdots, p_m(u)\}$。则 (U, φ) 是辛图，即

$\Omega=\sum\limits_i \mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}q^i$，当且仅当

$$\{q^i, q^j\}=0,\quad \{q^i, p_j\}=\delta^i_j$$
$$\{p_i, p_j\}=0$$

15. 设 $L: TM^m\to R$ 是一个 Lagrange 函数（可能是退化的），$\Phi: M^m\to M^m$ 是一个微分同胚，$T\Phi: TM^m\to TM^m$ 是诱导映射，且 Φ 满足 $L\circ\Phi=L$，试证 $(T\Phi)^*\theta_L=\theta_L$，并且 $T\Phi$ 是辛的。

参 考 文 献

[1] Arnold V I. Mathematical method of classical mechanics. New York: Springer-Verlag, 1978.

[2] Abraham R, Marsden J E. Foundations of mechanics, Ⅱ ed., The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1978.

[3] Westenholz C Von. Differential forms in mathematical physics. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1981.

[4] 陈省身，陈维桓. 微分几何讲义. 北京：北京大学出版社，1983.

[5] 詹汉生. 微分流形导引. 北京：北京大学出版社，1987.

[6] Godbillon G. Géometrie différentielle et mécanique analytique. Paris: Hermann, 1969.

[7] Poincaré H. Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique. C. R. Acad. Sci. Paris, 132, 1901.

〔8〕 Synge J L. On the geometry of dynamics, Phil. Trans., 1926.

〔9〕 Reeb G. Variétés symplectiques, variétés presque-complexes et systèmes dynamiques. C. R. Acad. Sci. Paris, 235, 1952.

〔10〕 Tulczyjew W M. Geometric foundations of Lagrangian mechanics. 1983.

〔11〕 Lang S. Hamiltonian mechanics and geometry. Am. Math. Monthly, 77, 1970.

〔12〕 Cartan E. Leçons sur les invariants integraux. Paris: Hermann, 1922.

〔13〕 León M De, Rodriques P R. Generalized classical mechanics and field theory. Amsterdam: North-Holland P. C., 1985.

〔14〕 Tulczyjew W M. Hamilton systems, Lagrangian systems and Legendre transformation. Symposia Mathematica, 16, 1974.

〔15〕 Tulczyjew W M. A Generalization of jet theory. Buu. Acad. Polon. Sci. 1978.

〔16〕 Edelen D G B. Lagrange mechanics of nonconservative nonholonomic systems. NIPL, 1977.

〔17〕 Hermann R. The differential geometric structure of general mechanical systems from the Lagrangian point of view. J. Math. Phys., 23. 1982.

〔18〕 Cantrijin F. Symplectic approach to nonconservative mechanics. J. Math. Phys., 25, 1984.

〔19〕 Hermann R. Bundles in mathematical physics, Vol. 1, New York: Benjamin, 1970.

〔20〕 Cantrijin F. Vector fields generating invariants for classical dissipative systems. J. Math. Phys., 23, 1982.

〔21〕 Hermann R. Geometry, physics and systems. New York: Marcel Dekker, 1973.

〔22〕 Werth J E. The equivalence problem for nonconservative mechanics. J. Math. Phys., 25, 1984.

〔23〕 Klein J. Espaces variationnels et mécanique. Ann. Inst.

Fourier, 12, 1962.

〔24〕 Tulczyjew W M. The Legendre transformation. Ann. Inst. H. Poincaré, 27, 1977.

〔25〕 Ghori Q K, Hussian M. Poincaré equations for a nonholonomic systems with variable masses. Arch. Rat. Mech. Analysis, 56, 1974.

〔26〕 Djukić Dj S, Vujanović B D. Noether's theory in classical nonconservative mechanics. Acta Mech., 23, 1975.

〔27〕 Ghori Q K. Conservation laws for dynamical systems in Poincaré-Chetaev variables. Arch. Rat. Mech. Analysis, 64, 1977.

〔28〕 Wang Keming. A differential geometry version on nonlinear nonholonomic mechanics. Proc. of ICNM, Shanghai, 1985.

〔29〕 Zhao Shiying. The differential geometric principles of Chetaev type nonholonomic mechanical systems. Proc. of ICNM, Shanghai, 1985.

〔30〕 郭仲衡．Hamilton力学的几何理论．M. M. M会议论文，1986．

〔31〕 唐传龙．非完整非保守系统的微分几何理论．北京理工大学硕士论文，1988．

〔32〕 罗勇，史荣昌．高阶非完整力学系统的微分几何结构．第四届全国一般力学会议论文，1987．

〔33〕 刘端，史荣昌，梅凤翔．非完整力学的辛几何方法．北京理工大学学报，10，4(Ⅰ)，1990．

〔34〕 梅凤翔．非完整系统力学基础．北京：北京工业学院出版社，1985．

〔35〕 罗勇．非完整力学系统的广义Poisson定理．中国兵工学会一般力学理论与应用讨论会，1987．

〔36〕 Proc. of the IUTAM-ISIMM Symposium on modern developments in analytical mechanics. Torino: Accademia delle Scienze di Torino, 1983.

第八章　Hamilton 系统的混沌初步

牛顿力学认为，凡是初始条件已知，所受的作用的规律已知，则以后的运动或动态全是确定性的。但是研究发现，由牛顿运动定律所得的微分方程组的解也会出现随机运动，用任何可实现的办法对初始条件进行精确的测量和对轨道作出的精确计算都不能准确预言运动物体在长时间后的位置和速度。确定性的系统在长时间内就成为不可预测的，所得的结果好象是随机的，我们把这种随机性称为动力系统的内在随机性，或称作混沌[1]。

力学系统可以分为可积系统和不可积系统。可积系统只存在平移运动，周期运动和准周期运动。而不可积系统还存在着混沌运动。现实世界中大部分运动都是不可积的，因此混沌运动是一种普遍的运动形式[2]。

本章将考虑具有较少自由度（主要是二自由度）的简单 Hamilton 系统，并显示在大多数情况下，它们在相空间的运动都是十分复杂的，既不是规则运动，也不是简单的各态历经的，而是规则运动与混沌运动共存的。因此使我们了解到经典分析力学中大多数教科书中讨论的规则运动仅仅是一种例外的特殊情形。

本章主要介绍研究保守 Hamilton 近可积系统运动所需的基础知识和基本方法，即一些基本概念；作用-角变量；经典摄动理论；浸渐不变量；长期摄动理论；Hamilton 系统和正则映射。此外还给出近可积 Hamilton 系统运动的整体描述，即著名的 KAM 定理，以及 Poincaré-Birkhoff 定理和 Arnold 扩散的概念。

§8.1 一些基本概念

8.1.1 相空间中的运动

考虑 n 个自由度系统的 Hamilton 正则方程

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad \dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad (i=1,\cdots,n)\tag{8.1.1}$$

相应这些方程存在 $2n$ 个运动常数，它们是初始广义坐标和广义动量。这些常数唯一地决定了系统其后的运动。此运动可以考虑为点在系统的 $2n$ 维相空间中的运动，其运动轨迹有如下的特点。

（1）相空间的轨迹在一个给定时刻是不相交的，这可以由初始条件唯一地决定其后的运动这一事实得出。显然，如果两条轨迹相交，那么它们在那一时刻具有相同的 p 和 q 值，因此其后的运动便是相同的。假如 Hamilton 函数不显含时间，则相空间的轨迹便独立于时间，并在相空间不可能交叉。很明显，对于增加一维时间坐标的扩充相空间来说，即使 Hamilton 函数是时间的周期函数，相轨迹也不会交叉。

（2）相空间中在时刻 t_1 由边界 C_1 包围的一组初始条件将

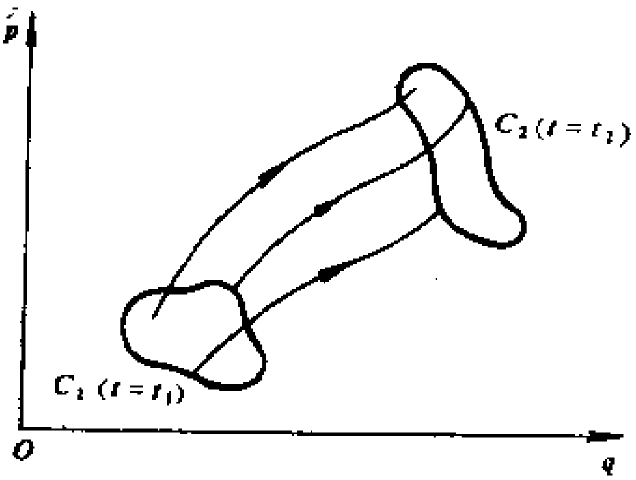


图 8.1 相空间的轨迹

变换到时刻 t_2 由边界 C_2 包围的另一组初始条件。这两组初始条件在 $t>t_2$ 决定同样的运动。这是第一个特性的直接推论。因为由边界内的初始条件决定的运动轨迹当穿过边界时，其随后的运动与边界具有同样的初始条件，因而这些初始条件将和其边界同样移动。此特性便是传递性：决定系统运动的一大组初始条件可以由相比之下小得多的一组初始条件替代。

(3) 考虑表示系统一种可能状态的所有初始条件的总体。记一个给定总体的概率或系统的点在相空间的密度分布为

$$\tau=\tau(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},t) \tag{8.1.2}$$

如果将 τ 归一化使得

$$\int_{\text{所有空间}}\tau\prod_i \mathrm{d}p_i\mathrm{d}q_i=1 \tag{8.1.3}$$

那么 $\mathrm{d}\mathscr{R}=\tau\prod_i \mathrm{d}p_i\mathrm{d}q_i$ 是时刻 t 点的概率，其总体具有与第 i 对正则坐标在 q_i 和 $q_i+\mathrm{d}q_i$ 以及 $p_i+\mathrm{d}p_i$ 之间位置相应的初始条件。相点 $\mathrm{d}\mathscr{R}$ 在无穷小相空间体积

$$\prod_i \mathrm{d}p_i\mathrm{d}q_i$$

中数量的变化速度可以由连续方程

$$\frac{\partial\mathrm{d}\mathscr{R}}{\partial t}+\sum_i\left[\frac{\partial}{\partial p_i}(\mathrm{d}\mathscr{R}\,\dot{p}_i)+\frac{\partial}{\partial q_i}(\mathrm{d}\mathscr{R}\,\dot{q}_i)\right]=0 \tag{8.1.4}$$

来获得。对上式除以体积可以得到在相空间中一固定位置的密度变化速率

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}+\sum_i\left(\dot{p}_i\frac{\partial\tau}{\partial p_i}+\tau\frac{\partial\dot{p}_i}{\partial p_i}+\dot{q}_i\frac{\partial\tau}{\partial q_i}+\tau\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_i}\right)=0 \tag{8.1.5}$$

考虑到 Hamilton 方程 (8.1.1)，有

$$\sum_i\left(\dot{p}_i\frac{\partial\tau}{\partial p_i}+\dot{q}_i\frac{\partial\tau}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial\tau}{\partial t}=0 \tag{8.1.6}$$

这就是相空间中流的不可压缩性。此结果便是著名的 Liouville

定理。[5]

8.1.2 扩充相空间

考虑显含时间 t 的 Hamilton 函数 H。根据 Hamilton 原理，有

$$\delta\left[\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H(p, q, t)\right)dt\right]=0 \qquad (8.1.7)$$

引进参数 ζ，可将上式写成形式

$$\delta\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\frac{dq_i}{d\zeta} - H\frac{dt}{d\zeta}\right)d\zeta=0 \qquad (8.1.8)$$

令

$$\begin{aligned}&\bar{p}_i=p_i,\ \ \bar{q}_i=q_i, \quad (i=1, \cdots, n)\\&\bar{p}_{n+1}=-H,\ \ \bar{q}_{n+1}=t\end{aligned} \qquad (8.1.9)$$

可以得到 Hamilton 原理的新形式

$$\delta\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\sum_{i=1}^{n+1}\bar{p}_i\frac{d\bar{q}_i}{d\zeta}d\zeta=0 \qquad (8.1.10)$$

这里我们将 $-H$ 和 t 与新的 $2n+2$ 维扩充相空间的其它广义动量和广义坐标一样看待，并且相流以“时间” ζ 为参数。

对新的坐标（p, $-H$, q, t）的新的 Hamilton 函数可以由母函数

$$F_2=\sum_{i=1}^{n}\bar{p}_iq_i+\bar{p}_{n+1}t \qquad (8.1.11)$$

导出。根据式（5.3.25），有

$$\bar{H}(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}})=H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)-H \qquad (8.1.12)$$

新的 Hamilton 正则方程为

$$\frac{d\bar{p}_i}{d\zeta}=-\frac{\partial\bar{H}}{\partial\bar{q}_i},\ \ \frac{d\bar{q}_i}{d\zeta}=\frac{\partial\bar{H}}{\partial\bar{p}_i}, \qquad (i=1,\cdots,n+1)\ (8.1.13)$$

在扩充相空间生成相流的新的Hamilton 函数是不显含“时

间”ζ的。由（8.1.13）中 $i=n+1$ 的方程，可以得到

$$t(\zeta)=\zeta \quad 和 \quad \bar{H}=\text{const}.$$

因此我们有如下的命题。

命题 具有显含时间的 Hamilton 函数的系统的运动等价于在不显含时间的 Hamilton 函数上附加一个自由度的运动。

逆命题也成立。给定一个不显含时间的 Hamilton 函数 $\bar{H}$，其有 n 个自由度，$2n$ 维相空间。选择任一广义坐标为新的“时间”ζ。与此广义坐标共轭的广义坐标便代表一个显含“时间”的自由度为 $n-1$ 的新 Hamilton 函数，它生成 $2n-1$ 维缩减相空间中的运动。例如，给定

$$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=H_0 \tag{8.1.14}$$

令

$$\bar{p}_i=p_i,\ \bar{q}_i=q_i, \qquad (i=1,\cdots,n-1) \tag{8.1.15}$$

由式（8.1.14）解出 $p_n=p_n(\bar{\boldsymbol{p}},\bar{\boldsymbol{q}},q_n)$，然后令 $\bar{H}=p_n$ 和 $\zeta=q_n$，我们可以获得缩减相空间（$\bar{\boldsymbol{p}}$，$\bar{\boldsymbol{q}}$）中的新 Hamilton 方程具有形式（8.1.13），这里新的 Hamilton 函数显含“时间”ζ。

通过这种方法，对不显含时间的 n 个自由度的 Hamilton 函数系统建立的理论可以应用于显含时间的 $n-1$ 个自由度的 Hamilton 函数系统[6]。特别是，一个二自由度的不显含时间的 Hamilton 函数与一个单自由度的显含时间的 Hamilton 函数是动力学等价的。

8.1.3 作用积分

现在讨论在固定时刻 t 计算的 Poiacaré 相对积分不变量和由不显含时间的 Hamilton 函数描述的一维振动系统的作用积分之间的关系。定义作用积分为

$$J=\frac{1}{2\pi}\oint p\mathrm{d}q \tag{8.1.16}$$

这里是相对振动在时间上的一个循环而积分的。

在扩充的相空间中，对于单自由度的振动系统，Poincaré 相对积分不变量可以写成

$$\oint(p\mathrm{d}q-H\mathrm{d}t)=\text{const.} \tag{8.1.17}$$

这里，积分路径在 $\zeta=\text{const.}$。但是因为 ζ 可以任意选择，新的路径，现在已包含时间的变分，可以这样选择使得它的一部分沿着相空间中系统的实际轨道上。对于 $H=\text{const.}$ 这种特殊情况，环绕任何封闭路径，上式第二项都是零。因此有

$$\oint p\mathrm{d}q=\text{const.} \tag{8.1.18}$$

现在，我们环绕轨道管积分，如图 8.2 所示，积分由两部分组成

$$\oint p\mathrm{d}q=\int_{C_1}p\mathrm{d}q+\int_{C_2}p\mathrm{d}q \tag{8.1.19}$$

其中 C_1 是沿着一个整循环的路径。对于周期系统，C_1 的端点有相同的 q 值。因此，路径 C_2 可以这样选择，使得 $q=\text{const.}$。

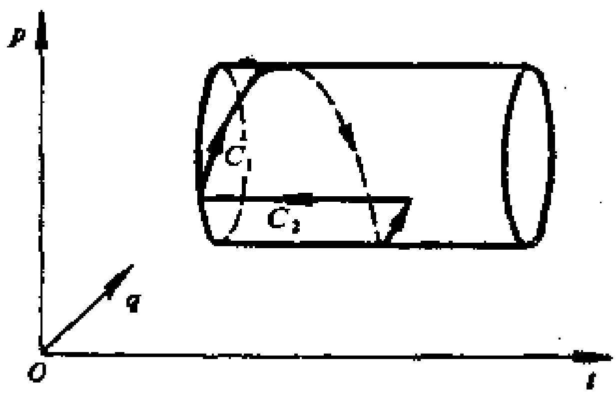


图 8.2 作用积分的计算路径

于是

$$\oint p\mathrm{d}q=\int_{C_1}p\mathrm{d}q \tag{8.1.20}$$

与式（8.1.17）比较，有

$$\int_{C_1}p\mathrm{d}q=\text{const.}=2\pi J \tag{8.1.21}$$

这表明了作用积分与这种情况下的相对积分不变量的等价性。作用积分十分重要，因为它组成了作用-角坐标中的正则动量。此外，它是系统运动的一个浸渐（adiabatic）不变量，即与上述振动周期在时间上相比较变化缓慢的 Hamilton 函数的近似常数。

8.1.4 截面

Hamilton 流的中心是关于 Poincaré 截面的定义。对于一个二自由度的自治系统，相空间是四维的。我们在相空间选择一个二维面 Σ_R 并标记其两面（例如左和右）。然后，研究一条轨迹与此曲面的逐次相交。这些交点是由轨迹每次在特定意义下（如从左到右）穿过此截面而产生的。

一种特别方便的选择截面 Σ_R 的方法如下。首先注意到在四维相空间里，轨迹是在三维等能面 $H(p_1, p_2, q_1, q_2)=H_0$ 上。这个方程定义了一个关系，使得两个变量中任一个，例如 p_2 可以表示成其它三个变量的函数

$$p_2 = p_2(p_1, q_1, q_2) \tag{8.1.22}$$

因此，我们考虑轨迹向三维体积（p_1, q_1, q_2）上的投影。如果运动是有界的，那么这个体积中的平面 $q_2=\text{const.}$将被轨迹重复地穿过。这个平面由坐标 q_1 和其共轭动量 p_1 组成，便可选为 Poincaré 截面。如果我们画出运动轨迹与截面逐次相交的交点，它们一般来说会出现在平面上一块有界区域的任何部分。如果运动除了能量积分外还存在首次积分

$$I(p_1, p_2, q_1, q_2)=\text{const.} \tag{8.1.23}$$

则联合式（8.1.22）和（8.1.23）可以得到

$$p_1 = p_1(q_1, q_2) \tag{8.1.24}$$

因此运动轨迹逐次穿过截面必然在 $q_2=\text{const.}$的一条唯一的曲线上。所以，通过检验轨迹与截面交点这种方式，可以确定运动不变量的存在性。一旦确定了其存在，则光滑曲线可用来检验局部稳定性和其它有趣的东西。

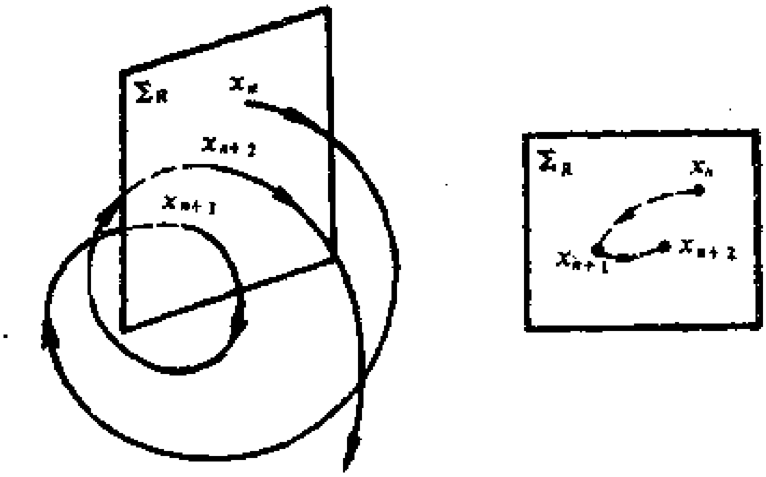


图 8.3 Poincaré 截面

必须注意，特殊的截面 (p_1, q_1) 恰恰是原先 Hamilton 系统的缩减相空间。逐次的穿过一个个都是通过由 Hamilton 方程决定的正则变换来获得的。因此截面上由封闭曲线作为边界的区域的面积在逐次穿过截面时是不变的。这个重要特性可以直接证明如下：写出普遍积分关系

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\mathrm{d}\mu,\ \mathrm{d}p = \frac{\partial p}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial p}{\partial\mu}\mathrm{d}\mu \tag{8.1.25}$$

这里 λ 和 μ 被认为是在截面上取的初始位置和动量。代入母函数 $F_2(\lambda, p)$ 的偏导数，并把 $\mathrm{d}p$ 和 $\mathrm{d}q$ 解出为 $\mathrm{d}\lambda$ 和 $\mathrm{d}\mu$ 的函数，那么

$$\begin{aligned} \mathrm{d}q &= \left(F_{\lambda p} - \frac{F_{pp}F_{\lambda\lambda}}{F_{\lambda p}}\right)\mathrm{d}\lambda + \frac{F_{pp}}{F_{\lambda p}}\mathrm{d}\mu \\ \mathrm{d}p &= -\frac{F_{\lambda\lambda}}{F_{\lambda p}}\mathrm{d}\lambda + \frac{1}{F_{\lambda p}}\mathrm{d}\mu \end{aligned} \tag{8.1.26}$$

这里为了紧凑起见，记 $\dfrac{\partial F_2}{\partial\lambda} = F_\lambda$。上式的系数行列式等于从 (λ, μ) 到 (q, p) 的变换的 Jacobi 行列式，可以看到是等于 1 的。因此变换是保面积的。

截面的概念可以推广到 $n>2$ 的系统，即两个以上自由度系统。对于 n 个自由度的不显含时间的 Hamilton 函数，相空间的

等能面是 $2n-1$ 维的。和前面一样，我们把某一个广义坐标，例如 p_n 解为其它广义坐标的函数，并考虑轨迹与 $2n-2$ 维截面 $q_n=\text{const.}$ 的逐次相交。此截面具有坐标 $p_1, \cdots, p_{n-1}, q_1, \cdots, q_{n-1}$，它也是缩减的相空间，其中保体积性质成立。如果运动存在一个或多个不变量，那么轨迹与截面的交点将在维数小于 $2n-2$ 的一个唯一的曲面上。否则交点将充满截面内 $2n-2$ 维的体积。

对于多维系统，如果运动的每一个自由度都是近似可分离的，那么将截面向 (p_i, q_i) 平面的 $n-1$ 次投影是一种显现运动轨迹点的有效方式。对于那些对 (p_i, q_i) 坐标完全可分离的规则轨迹来说，运动在每个 (p_i, q_i) 平面是保面积的，在第 i 个自由度存在一个运动不变量，轨迹交点在 (p_i, q_i) 平面上的一光滑曲线上。然而，对于一个大于两个自由度的系统，它是近似可分离的，即使对规则轨迹，其与截面的交点投影到任一个 (p_i, q_i) 平面，也不一定在光滑曲线上，而是充满具有有限面积的圆环区域。此圆环的厚度与在 (p_i, q_i) 的接近完全可分离的程度有关。在这种情况下，与截面的交点在一个 $n-1$ 维的曲面，它向 (p_i, q_i) 平面的投影是一个有限区域。

8.1.5　可积系统和近可积系统

1. 可积系统

考虑一 n 个自由度的 Hamilton 系统，如果我们总可以找到一组广义坐标，使得在这组广义坐标下其 Hamilton-Jacobi 方程可以分离成 n 个独立的方程，每一个方程对应一个自由度，那么我们称此系统为可积系统，有时也称作完全可积或完全可分离系统。分离常数 α_i 便是隔离积分或运动的完全不变量，因为每一个不变量通过在某正则坐标下的特性 $\frac{\partial H}{\partial p_i}=f(q_i)$ 隔离一个自由度。一个 n 自由度的 Hamilton 函数可积的必要充分条件就是

存在 n 个独立的隔离积分。

这 n 个独立的积分必须是内旋的，即它们相互之间的 Poisson 括号必须为零[6]，也就是说 $(\alpha_i, \alpha_j)=0$。这保证了 α 是变换后坐标系统新的动量的完全集合。任何 α 的 n 个函数的完全集合，例如后面将要讲到的作用角变量 J_i 便是一组隔离积分。这些函数的 Poisson 括号自动为零。

可积系统的典型行为是周期和准周期运动。所谓准周期运动发生在各种频率之比为无理数时。

2. 近可积系统

我们将这样的 Hamilton 系统，其可以当作可积系统的摄动，称作近可积系统。

近可积系统的突出特点是：规则运动轨迹与混沌区域同时出现，紧密地混和在一起。对于二自由度自治系统来说，规则轨线分隔着混沌区域。这些混沌轨迹是由确定性的，不含任何附加的特点“随机力”的 Hamilton 方程导出的运动的自发结果。对于两个以上自由度的自治系统，规则轨迹不再能分隔混沌区域，这些混沌区域联成一个网络，这便是 Arnold 扩散现象。所有这些都是我们在本章要研究的内容。

8.1.6 转动和摆动

周期性运动可以根据其运动过程中速度的符号是否改变而分成两种类型。

对于单自由度系统，如果系统的运动是周期性的，其坐标 q 可以表示成时间的函数，那么如果在运动的一个周期中

（1）$\dot{q}$ 总是具有同样的符号，则运动被称为转动。

（2）$\dot{q}$ 改变了符号，则称其为摆动。

显然，振动是摆动。如果相空间是整个实线，那么转动是不可能的，因为 q 的连续增加或减少不会是周期运动。但是，如果位形空间是圆，那么转动和摆动都可能发生。因此周期性运动的

类型依赖于位形空间的拓扑结构。如果位形空间是一个平面，那么在圆或任何封闭曲线上的运动相应于摆动。转动只有在相空间的图是 q 的周期函数时才出现。

对于多自由度系统，我们可以如下定义摆动和转动：

如果对于每一个自由度

（1） p_i 和 q_i 都是时间的同样周期的函数，这便是摆动。

（2） p_i 是 q_i 的周期函数，这就是转动。

每一个自由度的周期可以不相同。如果周期之比不是有理数，那么运动被称为拟周期性或准周期性。

§8.2 作用-角变量

8.2.1 作用-角变量

用来建立一个问题的表达式的变量，并不总是求解问题的最容易的变量。一般来说，我们常常希望用一个相对简单的系统的解做为复杂问题求解的出发点。因此，我们希望能选择这样的变量，使得比较简单的问题的解能以最简洁的方式表示出来。对于保守自治的 Hamilton 可积系统来说，这些变量便是作用-角变量。

对于独立于时间的一维 Hamilton 系统，系统存在着一个不变量，即能量积分。对于独立于时间的 n 个自由度系统，如果 Hamilton-Jacobi 方程对某组坐标完全可分离，即是可积系统，那么也可以找到 n 个不变量。我们用 S 这个通用的符号来代替第二类母函数 F_2。假设存在一分离解

$$S=\sum_i S_i(q_i,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n) \tag{8.2.1}$$

其中 α_i 是相应于运动的 n 个不变量的新的广义动量。如果 Hamilton 函数可以写成分离形式

$$H=\sum_i H_i\left(\frac{\partial S_i}{\partial q_i},\ q_i\right) \tag{8.2.2}$$

则 Hamilton-Jacobi 方程可以分离为 n 个方程

$$H_i\left(\frac{\partial S_i}{\partial q_i},\ q_i\right)=\alpha_i \tag{8.2.3}$$

我们可以将 S_i 解为 q_i 的函数。新的动量 α_i 于是便成为 Hamilton-Jacobi 方程的分离常数，并且满足

$$\sum_i \alpha_i=H_0 \tag{8.2.4}$$

新旧广义坐标间的关系满足式（5.3.25）。新的 Hamilton 函数 $\bar{H}$ 仅是动量 α_i 的函数，并且 Hamilton 运动方程很易求解。

选择分离常数 α_i 作为新的动量是任意的。我们同样可以选择作为 α_i 的独立函数的 n 个 J_i

$$J_i=J_i(\boldsymbol{\alpha}) \tag{8.2.5}$$

作为新的广义动量。由这 n 个方程反解出 α_i

$$\alpha_i=\alpha_i(\boldsymbol{J}) \tag{8.2.6}$$

将它代入式（8.2.1），则变换到新动量 J_i 的母函数可以表示为

$$\bar{S}(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{J})=S(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{J})) \tag{8.2.7}$$

新的 Hamilton 函数为

$$\bar{H}(\boldsymbol{J})=\sum_i \alpha_i(\boldsymbol{J}) \tag{8.2.8}$$

同样，Hamilton 方程可以被容易地解出。

对于完全可分离的周期性系统，一种选择 J_i 作为 α_i 的函数的特殊方法是非常有用的。为了定义作用量 J_i 作为 α_i 的函数，我们先做作用积分，并且利用（5.3.25）第一式来代替 p_i，则

$$J_i=\frac{1}{2\pi}\oint p_i\mathrm{d}q_i=\frac{1}{2\pi}\oint\frac{\partial S(q_i,\ \boldsymbol{\alpha})}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i \tag{8.2.9}$$

其中 J_1, …, J_n 是新的广义动量。反解上式可以得到新的母函数 $\bar{S}(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{J})$。

根据式 (8.2.8)，显然$\dot{J}_i=-\frac{\partial \bar{H}}{\partial \theta_i}=0$，因此 $\boldsymbol{J}=\text{const.}$

$$\dot{\theta}_i=\frac{\partial \bar{H}}{\partial J_i}=\text{const.}=\omega_i \tag{8.2.10}$$

因此共轭坐标给出为

$$\theta_i=\omega_i t+\beta_i \tag{8.2.11}$$

其中 ω_i 和 β_i 是常数。相对于一个完整的振动周期 T，积分 θ_i，得到

$$\Delta\theta_i=\int_t^{t+T}\mathrm{d}\theta_i=\omega_i T \tag{8.2.12}$$

但由 (5.3.25) 第二式，有

$$\mathrm{d}\theta_i=\frac{\partial}{\partial q_i}\ \frac{\partial \bar{S}}{\partial J_i}\mathrm{d}q_i \tag{8.2.13}$$

将式 (8.2.13) 代入式 (8.2.12)，并交换导数顺序，有

$$\Delta\theta_i=\frac{\partial}{\partial J_i}\oint\frac{\partial \bar{S}}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i=\frac{\partial}{\partial J_i}\oint p_i\mathrm{d}q_i=2\pi \tag{8.2.14}$$

比较式 (8.2.12) 与 (8.2.14)，有

$$\omega_i T=2\pi \tag{8.2.15}$$

这表明常数 ω_i 恰恰是振动的圆频率。因此，作用-角变量公式给我们提供了一种不需要求解运动方程而得到振动频率的简便方法。如果我们研究的系统是近可积系统，那么几乎总可以预先作一个给定系统可积部分到作用-角变量的变换，以便于系统进一步用摄动理论或其它方法来进行研究。

8.2.2 作用-角变量的应用

下面讨论作用-角变量对单自由度的 Hamilton 系统的具体应用。

对于单自由度 Hamilton 系统来说，相当一部分运动是时间的周期函数，即是摆动或者转动。作用-角变量对这两种情况都适用，只存在微小的区别。我们先考虑摆动，它要求相曲线是闭

的，但不是一个分界线。为此我们选择如下形式的 Hamilton 函数

$$H(q,\ p)=\frac{p^2}{2m}+V(q) \qquad (8.2.16)$$

其典型的势能和相曲线如图 8.4 所示。

在 $(q,\ p)$ 坐标表示中，能量 E 的相曲线由下面的双值函数表示

$$p(q,\ E)=\pm[2m(E-V(q))]^{\frac{1}{2}} \qquad (8.2.17)$$

这种多值性是难以令人满意的。因此，我们转而寻求一种新的共轭变量，即作用-角变量 $(\theta,\ J)$，它们具有这样的特性：(1) 每一条相曲线唯一地由 J 确定，并且 J 沿每条相曲线均是常数。

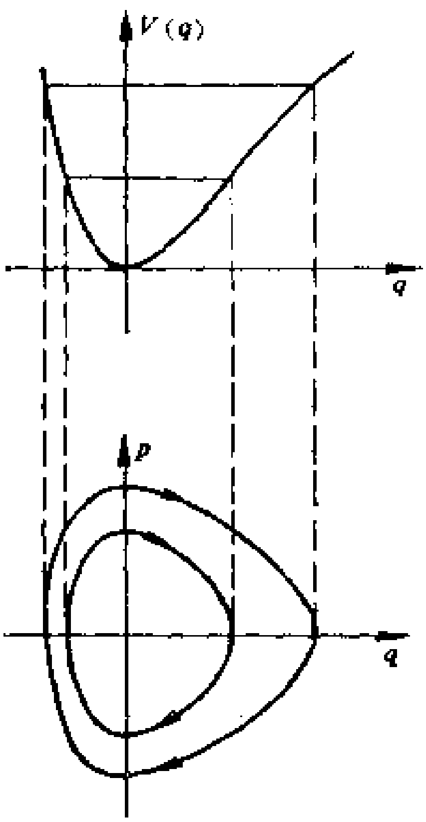


图 8.4 势能和相曲线

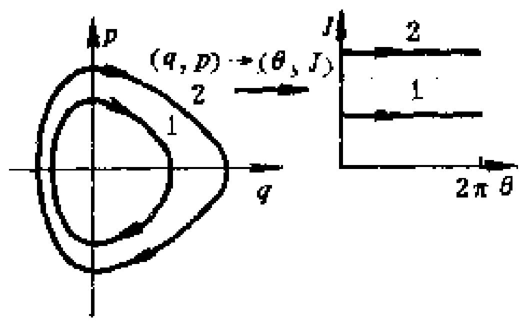


图 8.5 相曲线在 $(q,\ p)$ 和 $(\theta,\ J)$ 坐标系的表示

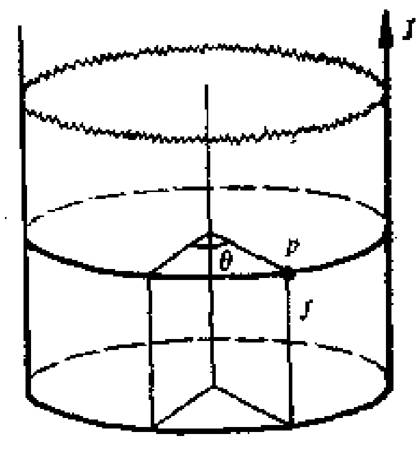


图 8.6 作用-角坐标

(2) 相曲线上每个点由 θ 的单值函数确定。

在 $(\theta,\ J)$ 坐标表示中，轮廓线是常量 J 的直线。角变量 θ 是时间的线性函数，在每个周期增加 2π，在作用-角描述中，相

曲线是平行于 θ 轴的直线。

此外，因为点 (θ, J) 和 $(\theta+2\pi, J)$ 表示同样的相点，所以 (θ, J) 坐标可以在一个半无限圆柱上表示，其中 θ 是环绕圆柱的角度，J 是沿圆柱轴向的坐标。

在这个圆柱上，q 和 p 均是 θ 的以 2π 为周期的周期函数

$$q(\theta+2\pi, J)=q(\theta, J), \quad p(\theta+2\pi, J)=p(\theta, J) \tag{8.2.17}$$

一条分界线将相空间划分为包含不同特性的不变区域。在每个不变区域内，所有的运动或是周期性的，或者都不是周期性的。当运动是周期性的，可以定义作用-角变量，但是它们在分界线上无定义，并且作用-角变量在不同的区域是不相关的。

考虑到式 (8.2.9) 和 (8.2.16)，有

$$J(E)=\frac{1}{\pi}\int_{q_1}^{q_2}\mathrm{d}q[2m(E-V(q))]^{1/2} \tag{8.2.18}$$

而由式 (8.2.13)，可以推导出

$$\theta(q)=\frac{\partial}{\partial J}\int_0^q \mathrm{d}q\,p(q, J) \tag{8.2.19}$$

通过反解式 (8.2.18)，可以把能量表示成作用量的函数 $E(J)$。但是我们通常标记这个函数为 $H(J)$ 或 $K(J)$，因为通常用 E 这个符号表示能量的某一确定值。

在应用式 (8.2.19) 计算 $\theta(q)$ 时应注意到 $p(q, J)$ 是 q 的多值函数。例如在图 8.4 中，当 q 增加时 p 是正的，反之则是负的。因此，当相点沿整个相曲线顺时针转动时 $\theta(q)$ 单值连续地增加，并且在一个周期内增加 2π。

作用变量和动量矩具有同样的量纲，即能量×时间。而角变量则是无量纲的，而且经常就是相空间的一个角，当然并不总是这样。

对于图 8.4 这种类型的势能，有一个极小值 E_0。也就是说，当小于这个能量时，运动是不可能的。对于图 8.4 来说 $E_0=0$。

在这个能量下，(q, p) 描述中的相曲线缩减为一个点，并且 $J(E_0)=0$，即作用量有一个自然边界 $J=0$。

例 1 一运动质点具有势能

$$V(q)=U\mathrm{tg}^2\alpha q \tag{a}$$

其中 U 和 α 是正的常数。试求其作用-角度量和 Hamilton 函数。

由式（8.2.18）有

$$J=\frac{1}{\pi}\int_{q_1}^{q_2}\mathrm{d}q[2m(E-U\mathrm{tg}^2\alpha q)]^{1/2} \tag{b}$$

其中 $\mathrm{tg}^2\alpha q_2=E/U$，$q_1=-q_2$。积分这个函数得

$$\alpha J=[2m(E+U)]^{1/2}-[2mU]^{1/2} \tag{c}$$

考虑到 $J\geqslant 0$，并且仅当 $E=0$ 时等式才能成立，由此关系反解出 Hamilton 函数

$$H(\theta, J)=E(J)=\alpha J[\alpha J+2(2mU)^{1/2}]/2m \tag{d}$$

圆频率为

$$\omega=\frac{\partial H}{\partial J}=\alpha[\alpha J+(2mU)^{1/2}]/m$$

$$=\alpha[2(E+U)/m]^{1/2} \tag{e}$$

根据式（8.2.19），有

$$\theta(q)=\frac{\partial}{\partial J}\int_0^q\mathrm{d}q[2m(E(J)-U\mathrm{tg}^2\alpha q)]^{1/2}$$

将上式先在积分号里求导，然后将（d）代入得

$$\theta(q)=m\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}J}\int_0^q\mathrm{d}q[2m(E-U\mathrm{tg}^2\alpha q)]^{-1/2}$$

$$=\arcsin\left[\left(\frac{E+U}{E}\right)^{1/2}\sin\alpha q\right] \tag{f}$$

当然，我们也可以得到其逆函数

$$q(\theta)=\frac{1}{\alpha}\arcsin\left[\left(\frac{E}{E+U}\right)^{1/2}\sin\theta\right] \tag{g}$$

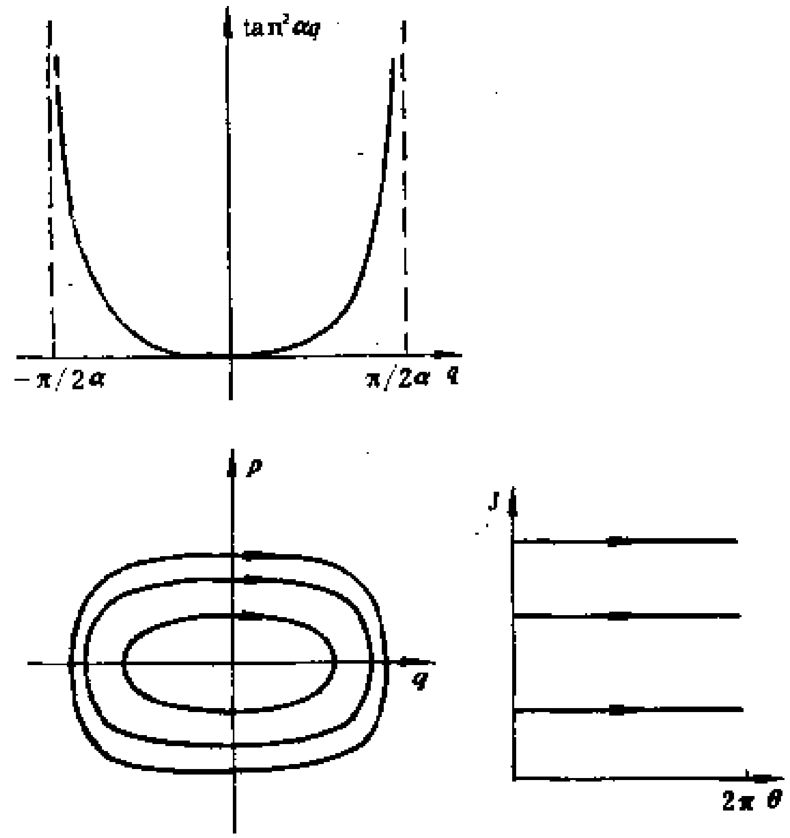


图 8.7 势能 $\mathrm{tg}^2\alpha q$ 以及相曲线在 (q, p) 和 (θ, J) 的表示

考虑到 $\theta=\omega t+\beta$，可以将 q 表示为 t 的函数。

现在我们来看一看由相空间描述 (q, p) 到作用-角变量描述 (θ, J) 的正则变换的母函数有什么特点。显然，第二类母函数 S_2 在一个运动周期的变化为

$$\Delta S_2(J)=\oint \mathrm{d}q\frac{\partial S_2}{\partial q}$$

$$=\oint \mathrm{d}q\, p=2\pi J \qquad (8.2.20)$$

而母函数 S_1 为

$$S_1(\theta, q)=S_2(J, q)-\theta J,\quad \theta=\frac{\partial S_2}{\partial J} \qquad (8.2.21)$$

它在一周期的变化为

$$\Delta S_1=\Delta S_2-\Delta(J\theta)=\Delta S_2-J\Delta\theta=0 \qquad (8.2.22)$$

因此，在一周期 $S_1(\theta, q)$ 又返回原值，而 $S_2(J, q)$ 则增加 $2\pi J$。所以 $S_1(\theta, q)$ 是 θ 的周期函数，但 $S_2(J, q)$ 则不是。

例 2 试求出线性振子

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{a}$$

的作用-角变量和母函数 $S_1(\theta, q)$ 以及 $S_2(J, q)$。

由式（8.2.18）知

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{\pi}\int_{-q_1}^{q_1} dq\left[2m\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2\right)\right]^{1/2} \\ &= E/\omega \end{aligned} \tag{b}$$

其中 $m\omega^2 q_1^2 = 2E$。因此 Hamilton 函数在作用-角变量描述下为

$$H(J) = \omega J \tag{c}$$

由式（a）和（c），可以求出

$$p = [2m\omega J - (m\omega q)^2]^{1/2} \tag{d}$$

利用式(8.2.19)，我们可以得到角变量

$$\theta = \int_0^q dq\left[\frac{m\omega}{2J - m\omega q^2}\right]^{1/2} = \arcsin\left[q\left(\frac{m\omega}{2J}\right)^{1/2}\right] \tag{e}$$

或

$$q = \left(\frac{2J}{m\omega}\right)^{1/2} \sin\theta \tag{f}$$

所以 $S_2(J,q)$ 可以由与式（8.2.20）类似的公式求出

$$\begin{aligned} S_2(J,q) &= \int_0^q dq(2m\omega J - m^2\omega^2 q^2)^{1/2} \\ &= J\arcsin\left[q\left(\frac{m\omega}{2J}\right)^{1/2}\right] + \frac{1}{2}q(2Jm\omega - m^2\omega^2 q^2)^{1/2} \end{aligned} \tag{g}$$

利用式(8.2.21)，得到

$$S_1(\theta, q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \operatorname{ctg}\theta \tag{h}$$

由（h），我们还可求出

$$p=\frac{\partial S_1}{\partial q}=m\omega q\ \mathrm{ctg}\ \theta=(2Jm\omega)^{1/2}\cos\theta$$

下面讨论转动情形下的作用-角变量。对于转动来说，相曲线在平面内不是封闭的，我们用 ψ 来代替广义坐标 q，则 $\psi(t)$ 随着时间或无限增加，或无限减小。Hamilton 函数是 ψ 的周期函数，假设周期为 2π

$$H(\psi+2\pi,p)=H(\psi,p) \tag{8.2.23}$$

与摆动一样，也可以通过向作用-角变量的变换把相曲线变成直线

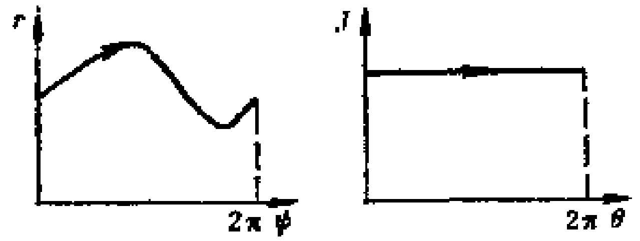


图 8.8 转动情形的相曲线在（q,p）和（θ,J）坐标系中的表示

作用量可以作为能量的函数。我们可以通过令（ψ，p）和（θ，J）两种描述下的相曲线与水平轴间所夹的面积相等来求出，即

$$J(E)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\psi\, p(\psi,E) \tag{8.2.24}$$

其中 $p(\psi,E)$ 可以利用能量方程

$$H(\psi,p)=E \tag{8.2.25}$$

解出。通常这不止一个解。当 Hamilton 函数具有式（8.2.16）这种类型时，有两个解，相应于平方根的正负号，表示不同的转向。因此，对每一个能量，由式（8.2.25）可以解出两个 J，相应于两个运动方向。选择不同的水平轴，由方程（8.2.24）给出具有不同的附加常数的作用 J。所以。不同于摆动，对于转动，

作用量没有自然边界，因此其上可以附加一个任意常数。

例 3 试求一个物体在下述周期性势能场中转动的作用-角变量

$$V(\psi)=\begin{cases}-U\psi/\pi & (-\pi\leqslant\psi\leqslant 0)\\ U\psi/\pi & (0\leqslant\psi\leqslant\pi)\end{cases} \tag{a}$$

$$V(\psi)=V(\psi+2\pi)$$

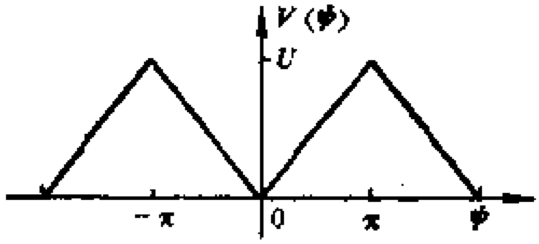


图 8.9

系统的 Hamilton 函数是

$$H(\psi,p)=\frac{p^2}{2G}+V(\psi) \tag{b}$$

其中G是惯性矩。显然E必须大于U，E是总能量。

由式（8.2.24）求出

$$\begin{aligned}J&=\frac{(2G)^{1/2}}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\mathrm{d}\psi\left(E+\frac{U\psi}{\pi}\right)^{1/2}\\&\quad+\frac{(2G)^{1/2}}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}\psi\left(E-\frac{U\psi}{\pi}\right)^{1/2}\\&=\frac{(2G)^{1/2}}{\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}\psi\left(E-\frac{U\psi}{\pi}\right)^{1/2}\\&=\frac{2(2G)^{1/2}}{3U}[E^{3/2}-(E-U)^{3/2}]\end{aligned}$$

对E求导，可得到频率

$$\frac{1}{\omega}=\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}E}=\frac{(2G)^{1/2}}{U}[E^{1/2}-(E-U)^{1/2}]$$

或

$$\omega=\frac{E^{1/2}+(E-U)^{1/2}}{(2G)^{1/2}}U$$

角变量则由式（8.2.19）给出

$$\theta(\psi)=\int_0^{\psi}\mathrm{d}\psi\frac{\partial p}{\partial J}=\omega\int_0^{\psi}\mathrm{d}\psi\frac{\partial p}{\partial E}$$

$$=\omega\left(\frac{G}{2}\right)^{1/2}\int_0^{\psi}\frac{\mathrm{d}\psi}{[E-V(\psi)]^{1/2}}$$

上式给出

$$\theta(\psi)=\begin{cases}\dfrac{\pi\{[1+(\bar{U}\psi/\pi)]^{1/2}-1\}}{1-(1-\bar{U})^{1/2}} & (-\pi\leqslant\psi\leqslant 0)\\ \dfrac{\pi\{1-[1-(\bar{U}\psi/\pi)]^{1/2}\}}{1-(1-\bar{U})^{1/2}} & (0\leqslant\psi\leqslant\pi)\end{cases}$$

这里 $\bar{U}=U/E$。图 8.10 便是 $\theta(\psi)$ 对不同 $\bar{U}$ 的一个草图。 ‖

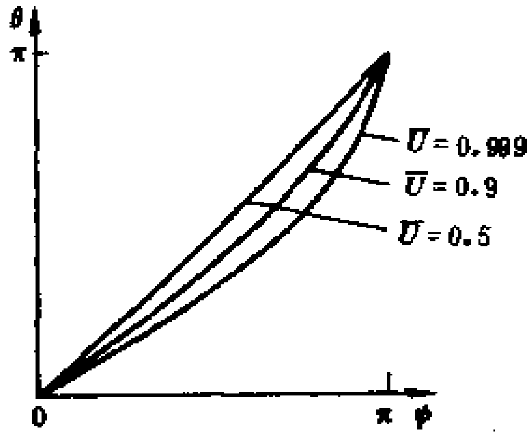


图 8.10 θ和 ψ 的关系图

§8.3 经典摄动理论

大多数多维和驱动系统是不可积的。也就是说，找不到Hamilton-Jacobi 方程的解。然而对于那些与可积系统差别不太大的系统，我们可以尝试通过将母函数展开成为小参数的幂级数的

形式，然后相应各次幂依次求解 Hamilton-Jacobi 方程来获得所需精度的解。尽管小分母的出现会破坏这种级数的收敛性，但是以这种方法获得的结果在相空间的某些区域还是能很好地描述系统的行为的。而且，这种方法对获得那些很难得到封闭形式积分的单自由度问题的近似解，以及获得多自由度系统向作用-角变量的预备变换都是非常有用的。

8.3.1 单自由度系统

1. 一阶展开

考虑如下形式的 Hamilton 函数

$$H=H_0(J)+\epsilon H_1(J,\theta)+\epsilon^2H_2(J,\theta)+\cdots \tag{8.3.1}$$

其中 H_0 仅是作用量 J 的函数，因此它的解为

$$J=J_0,\quad \theta=\omega t+\beta,\quad \omega=\frac{\partial H_0}{\partial J} \tag{8.3.2}$$

这里 J_0，ω，β 都是常数。根据 Poincaré[7]和 Von Zeipel[8] 的方法，我们寻求一个向新变量 $\bar{J}$，$\bar{\theta}$ 的变换，这个变换使得新的 Hamilton 函数仅是作用量 $\bar{J}$ 的函数，利用母函数 $S(\bar{J},\theta)$，我们将 S 和 $\bar{H}$ 展为 ϵ 的幂级数

$$S=\bar{J}\theta+\epsilon S_1+\cdots \tag{8.3.3}$$

$$\bar{H}=\bar{H}_0+\epsilon\bar{H}_1+\cdots \tag{8.3.4}$$

这里 S 的最低阶项可以生成恒等变换 $J=\bar{J}$ 和 $\bar{\theta}=\theta$。

旧的作用量和新的角变量可以由式（5.3.25）的前两式分别求出为 ϵ 的幂级数

$$J=\bar{J}+\epsilon\frac{\partial S_1(\bar{J},\theta)}{\partial\theta}+\cdots,\quad \bar{\theta}=\theta+\epsilon\frac{\partial S_1(\bar{J},\theta)}{\partial\bar{J}}+\cdots \tag{8.3.5}$$

新的 Hamilton 函数可以由（5.3.25）第三式求出。为了得到新的 Hamilton 函数。我们必须由式（8.3.5）反解旧变量为新变量的函数。对于 ϵ 阶，这是很容易做到的

$$J=\bar{J}+\varepsilon\frac{\partial S_1(\bar{J},\bar{\theta})}{\partial\bar{\theta}}+\cdots,\theta=\bar{\theta}-\varepsilon\frac{\partial S_1(\bar{J},\bar{\theta})}{\partial\bar{J}}+\cdots \tag{8.3.6}$$

于是，根据（5.3.25）第三式，有

$$\bar{H}(\bar{J},\bar{\theta})=H(J(\bar{J},\bar{\theta}),\theta(\bar{J},\bar{\theta})) \tag{8.3.7}$$

展开这个方程的右端为 ε 的幂级数，并利用式（8.3.6），得

$$H_0(J(\bar{J},\bar{\theta}))=H_0(\bar{J})+\varepsilon\frac{\partial H_0}{\partial\bar{J}}\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\theta}}+\cdots \tag{8.3.8}$$

$$\varepsilon H_1(J(\bar{J},\bar{\theta}),\theta(\bar{J},\bar{\theta}))=\varepsilon H_1(\bar{J},\bar{\theta})+\cdots$$

将这些式子代回式（8.3.7），相应于 ε 的零阶，得

$$\bar{H}_0=H_0(\bar{J}) \tag{8.3.9}$$

相应于 ε 的一阶，有

$$\bar{H}_1=\omega(\bar{J})\frac{\partial S_1(\bar{J},\bar{\theta})}{\partial\bar{\theta}}+H_1(\bar{J},\bar{\theta}) \tag{8.3.10}$$

我们的目的是使新的 Hamilton 函数仅是 $\bar{J}$ 的函数，因此必须这样选择式(8.3.10）中的 S_1，以使 H_1 依赖于 $\bar{\theta}$ 的部分被消去。引入 H_1 的平均部分

$$\langle H_1\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\bar{\theta}\,H_1(\bar{J},\bar{\theta}) \tag{8.3.11}$$

和振动部分

$$\{H_1\}=H_1-\langle H_1\rangle \tag{8.3.12}$$

由式（8.3.10）可以得到以下两个方程

$$\bar{H}_1=\langle H_1\rangle \tag{8.3.13}$$

$$\omega\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\theta}}=-\{H_1\} \tag{8.3.14}$$

联立式（8.3.9）和（8.3.13)，我们得到精确到 ε 一次项的变换后的 Hamilton 函数

$$\bar{H}=H_0(\bar{J})+\varepsilon\langle H_1(\bar{J},\bar{\theta})\rangle+\cdots \tag{8.3.15}$$

它具有新的频率 $\bar{\omega}=\frac{\partial\bar{H}}{\partial\bar{J}}$。式（8.3.14）可以用来求 S_1。可以

看到，精确到一阶小量，新的 Hamilton 函数是对旧 Hamilton 函数的相角取平均。

为了求出 S_1，我们做 $\{H_1\}$ 和 S_1 的 Fourier 级数

$$\{H_1\}=\sum_{n\neq 0} H_{1n}(\bar{J})e^{in\bar{\theta}}, \quad S_1=\sum_{n} S_{1n}(\bar{J})e^{in\bar{\theta}} \tag{8.3.16}$$

根据式(8.3.14)，立即可以得到 $S_{10}=\text{const.}$，并且

$$S_{1n}=-\frac{H_{1n}}{in\omega}=\frac{H_{1n}}{n\omega}i, n\neq 0 \tag{8.3.17}$$

当 $\omega(\bar{J})\neq 0$ 时得到一个收敛的 Fourier 级数。将式（8.3.17）代入式（8.3.16）中便可以很容易求出坐标变换（8.3.6）。

2．高阶展开

由于一阶修正项为零或所需精度的增加，有时必须展开到 ϵ 的高阶项。Poincaré—Von Zeipel 方法可以用到 ϵ 的任意阶。但是，从式（8.3.5）到（8.3.8）求解新旧变量的关系的代数式会十分繁琐。如果变量的反演是不需要的，那么计算新的Hamilton 函数，以及摄动后的频率的步骤就相对直接多了。下面我们给出计算相对 ϵ 的二阶精度的新的 Hamilton 函数所需的公式。更高阶的请参阅文献[9]。当 S 和 $\bar{H}$ 象式(8.3.3)和(8.3.4)那样写成 ϵ 的幂级数时，则式（8.3.8)的两式可以相应表示如下（假设 H_0 和 H_1 不为零）

$$H_0(J(\bar{J},\theta))=H_0(\bar{J})+\sum_{m,n}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m H_0}{\partial \bar{J}^m}\left(\epsilon^n\frac{\partial S_n}{\partial\theta}\right)^m$$

$$\epsilon H_1(J(\bar{J},\theta),\theta)=\epsilon\left[H_1(\bar{J},\theta)+\sum_{m,n}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m H_1}{\partial \bar{J}^m}\times\left(\epsilon^n\frac{\partial S_n}{\partial\theta}\right)^m\right] \tag{8.3.18}$$

假设 $\bar{H}$ 仅是 $\bar{J}$ 的函数，将 $\bar{H}$ 写成 ϵ 的幂级数，并使 $\bar{H}=H$，象式（8.3.9）和（8.3.10）一样得到精确到 ϵ 的零阶和一阶时的

公式。不反解 θ，可以得到精确到 ϵ^2 项的公式

$$\bar{H}_2=\frac{\partial H_0}{\partial \bar{J}}\frac{\partial S_2}{\partial \theta}+\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 H_0}{\partial \bar{J}^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta}\right)^2+\frac{\partial H_1}{\partial \bar{J}}\ \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \tag{8.3.19a}$$

因为 $\bar{H}_2$ 仅是 $\bar{J}$ 的函数，有

$$\bar{H}_2=\left\langle\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 H_0}{\partial \bar{J}^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta}\right)^2+\frac{\partial H_1}{\partial \bar{J}}\ \frac{\partial S_1}{\partial \theta}\right\rangle_\theta \tag{8.3.19b}$$

此外，S_2 是 θ 的周期函数，由下式给出

$$\frac{\partial H_0}{\partial \bar{J}}\ \frac{\partial S_2}{\partial \theta}=-\left\{\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 H_0}{\partial \bar{J}^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta}\right)^2+\frac{\partial H_1}{\partial \bar{J}}\ \frac{\partial S_1}{\partial \theta}\right\}_\theta \tag{8.3.19c}$$

这里〈　〉和{　}分别代表平均和振动部分。象前面一样，振动的频率 $\bar{\omega}=\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{J}}$。对于精确到 ϵ 的更高阶的频率的近似值也可通过类似的方法不用变换的反演而求得。

例 1 精确到一阶精度，计算摆的非线性摆动，其 Hamilton 函数为

$$H_p=\frac{1}{2}Gp^2-F\cos\phi=E \tag{a}$$

假设 H_{0p} 代表二次项，它生成一线性振动。把其余项考虑为扰动。将 H_p 展为 Taylor 级数并略去常数项，则

$$H_p=\frac{1}{2}Gp^2+\frac{1}{2}F\phi^2-\frac{\epsilon}{4!}F\phi^4+\frac{\epsilon^2}{6!}F\phi^6-\cdots$$

这里前两项组成 H_{0p}。引入小参数 ϵ 是为了方便地鉴别摄动项，并且为了以后的用途，还保留了 ϵ^2 项。实际上展开参数是摆动和分界线能量的比率，因此在计算的最后我们可令 $\epsilon=1$。

为了摄动理论做准备，我们将未扰动的系统先变到作用-角变量来获得新的 Hamilton 函数，$H=E+F$

$$H=\omega_0 J-\frac{\varepsilon}{6}GJ^2\sin^4\theta+\frac{\varepsilon^2}{90}\frac{G^2J^3}{\omega_0}\sin^6\theta-\cdots \tag{b}$$

其中 $\omega_0=(FG)^{1/2}$ 是未受扰的摆动频率。将 $\sin\theta$ 的幂展开为 Fourier 级数，得到

$$H_0=\omega_0 J \tag{c}$$

$$H_1=-\frac{GJ^2}{48}(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta) \tag{d}$$

$$H_2=\frac{G^2J^3}{2880\omega_0}(10-15\cos 2\theta+6\cos 4\theta-\cos 6\theta) \tag{e}$$

应用展开技巧，并就（d）对 θ 取平均，根据式（8.3.15）我们立即得到精确到 ε 一阶的新的 Hamilton 函数

$$\bar{H}=\omega_0\bar{J}-\frac{\varepsilon}{16}G\bar{J}^2 \tag{f}$$

和新频率

$$\bar{\omega}=\frac{\partial\bar{H}}{\partial\bar{J}}=\omega_0-\frac{\varepsilon}{8}G\bar{J}$$

母函数可以通过积分式（8.3.14）获得

$$S_1=-\frac{GJ^2}{192\omega_0}(8\sin 2\theta-\sin\theta) \tag{g}$$

应用此表达式可以很容易求出新老变量的变换公式（8.3.6）。‖

8.3.2 两个和两个以上自由度

如果受扰的 Hamilton 函数是高于一个自由度的自治系统或是明显依赖于时间的一个或一个以上自由度的系统，那么前面的展开步骤便不会收敛。为了看出这一点，我们将 Poincaré-Von Zeipel 方法推广到 n 个自由度的自治系统。对时间的明显依赖性则可以通过引进扩充相空间来讨论。

考虑如下的 Hamilton 函数

$$H(\boldsymbol{J},\boldsymbol{\theta})=H_0(\boldsymbol{J})+\varepsilon H_1(\boldsymbol{J},\boldsymbol{\theta}) \tag{8.3.20}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 是 H_0 的 n 维作用-角变量，H_1 是角变量的多重周期函数

$$H_1 = \sum_{\boldsymbol{m}} H_{1\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{J}) e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\theta}} \tag{8.3.21}$$

其中

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\theta} = m_1\theta_1 + \cdots + m_n\theta_n \tag{8.3.22}$$

这里 m_i 是整数，求和是关于 m_i 的 n 重和。我们还是来寻找一种向新矢量 $\overline{\boldsymbol{J}}$，$\overline{\boldsymbol{\theta}}$ 的变换，以使新的 Hamilton 函数仅是 $\overline{\boldsymbol{J}}$ 的函数。我们引进一个近恒等母函数，它的一阶项也是一个 n 重和，是关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的多重周期函数

$$S = \overline{\boldsymbol{J}}\cdot\boldsymbol{\theta} + \sum_{\boldsymbol{m}} S_{1\boldsymbol{m}}(\overline{\boldsymbol{J}}) e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\theta}} + \cdots \tag{8.3.23}$$

就象一维情况，我们将旧的变量用母函数写成新变量的函数，并且将它们代入（5.3.25）第三式，使 ϵ 的各阶幂相等，我们得到零阶近似

$$\overline{H}_0(\overline{\boldsymbol{J}}) = H_0(\overline{\boldsymbol{J}}) \tag{8.3.24}$$

和一阶近似

$$\overline{H}_1 = \boldsymbol{\omega}(\overline{\boldsymbol{J}})\cdot\frac{\partial S_1(\overline{\boldsymbol{J}},\overline{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\boldsymbol{\theta}} + H_1(\overline{\boldsymbol{J}},\overline{\boldsymbol{\theta}}) \tag{8.3.25}$$

这里

$$\boldsymbol{\omega}(\overline{\boldsymbol{J}}) = \frac{\partial H_0(\overline{\boldsymbol{J}})}{\partial\overline{\boldsymbol{J}}} \tag{8.3.26}$$

是未受扰运动的频率矢量。

象一维一样，对式（8.3.25）相对所有的角变量取平均，得

$$\overline{H} = H_0(\overline{\boldsymbol{J}}) + \epsilon\langle H_1(\overline{\boldsymbol{J}},\overline{\boldsymbol{\theta}})\rangle \tag{8.3.27}$$

此外

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\partial S_1}{\partial\boldsymbol{\theta}} = -\{H_1\} \tag{8.3.28}$$

S_1 的解包括了系统的零阶轨道上的积分，因为

$$\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial S_1}{\partial t}+\frac{\partial S_1}{\partial \overline{\boldsymbol{\theta}}}\cdot\frac{\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\theta}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial S_1}{\partial \overline{\boldsymbol{J}}}\cdot\frac{\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{J}}}{\mathrm{d}t} \tag{8.3.29}$$

并且，对零阶来说，第一项和第三项是零，因此得到式(8.3.28)的左端，于是

$$S_1=-\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\{H_1(\overline{\boldsymbol{J}},\overline{\boldsymbol{\theta}}(t'))\} \tag{8.3.30}$$

另外，可以通过对 H_1 的 Fourier 级数一项一项地积分来解出 S_1，可以得到

$$S(\overline{\boldsymbol{J}},\overline{\boldsymbol{\theta}})=\overline{\boldsymbol{J}}\cdot\overline{\boldsymbol{\theta}}+\varepsilon i\sum_{\boldsymbol{m}\neq 0}\frac{H_{1\boldsymbol{m}}(\overline{\boldsymbol{J}})}{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}(\overline{\boldsymbol{J}})}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{m}\cdot\overline{\boldsymbol{\theta}}}+\cdots \tag{8.3.31}$$

这样，我们立即面临了小分母问题。因为对任意的 $\overline{\boldsymbol{J}}$ 可以找到一矢量 $\boldsymbol{m}$ 使得 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}$ 可以任意接近零。这便很明显破坏了级数的收敛性。可以指出这个现象和象共所面临的数学困难一样，也代表了物理困难，因为它是由改变了相空间轨迹的真实共振引起的。不过，在发展那些至少在高阶展开中延缓奇异性的展开方法方面人们已经做了大量的努力。这些方面的工作使我们可以得到在相空间的某些区域里，对发生在有限但很长时间内的运动的收敛到真实解的近似解。此外，这些解在某些情况下在相空间的某一局部在任意长的时间里都非常接近真实运动，这是由于在一些特定的 $\overline{\boldsymbol{J}}$ 值下某些（KAM）级数的真实收敛性。在后面我们将会看到，对两个自由度系统来说，这些解封闭地包围着共振解，因此把非常复杂的共振轨迹约束到近似于非共振解。

8.3.3 对时间的明显依赖性

现在我们对单自由度明显依赖于时间的系统来推导摄动公式。系统的 Hamilton 函数为

$$H=H_0(J)+\varepsilon H_1(J,\theta,t) \tag{8.3.32}$$

这里摄动项对 θ 的周期是 2π，而对时间的周期是 $2\pi/\Omega$，有

$$H_1=\sum_{l,m} H_{1lm}(J)e^{i(l\theta+m\Omega t)} \tag{8.3.33}$$

令 S 具有如下形式

$$S=\bar{J}\theta+\varepsilon S_1(\bar{J},\theta,t) \tag{8.3.34}$$

它可以给出象式（8.3.6）那样新旧坐标之间的关系。因为 H_1 明显依赖于时间，将式（8.3.7）改写为

$$\bar{H}(\bar{J},\bar{\theta},t)=H(J,\theta,t)+\varepsilon\frac{\partial S_1(\bar{J},\theta,t)}{\partial t} \tag{8.3.35}$$

对 ε 展开有

$$\bar{H}_0=H_0(\bar{J}) \tag{8.3.36}$$

$$\bar{H}_1=\frac{\partial S_1}{\partial t}+\omega\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\theta}}+H_1 \tag{8.3.37}$$

再选择 S_1 以消去 H_1 的振动部分，有

$$\bar{H}=H_0+\varepsilon\langle H_1\rangle \tag{8.3.38}$$

这里平均是对 θ 和 t 这两者的振动来取的。并且

$$\frac{\partial S_1}{\partial t}+\omega\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\theta}}=-\{H_1\} \tag{8.3.39}$$

为了决定 S_1，我们展开得到 Fourier 级数形式

$$S_1=i\sum_{l,m\neq 0}\frac{H_{1lm}(\bar{J})}{l\omega(\bar{J})+m\Omega}\exp[i(l\bar{\theta}+m\Omega t)] \tag{8.3.40}$$

这里我们又遇到了破坏级数收敛性的小分母。

尽管共振明显地出现在最低阶，但经典摄动理论在决定足够远离主共振的作用量的不变性方面还是非常有用的。为了表明这一点，我们选择 H_1 的一种简单形式，即其中不含 θ 的高次谐波

$$H_1=U(J,t)+V(J,t)\cos\theta \tag{8.3.41}$$

把 H_1 和 S_1 展为 Fourier 级数

$$H_1(\bar{J},\bar{\theta},t)=\sum b_{lm}(\bar{J})\cos(l\bar{\theta}-m\Omega t) \tag{8.3.42}$$

$$S_1(\bar{J},\bar{\theta},t)=\sum a_{lm}(\bar{J})\sin(l\bar{\theta}-m\Omega t) \tag{8.3.43}$$

其中求和是对 $l=0,1$ 和所有 m 来取的。将式（8.3.43）代入式

(8.3.39)，解出对 $l,m\neq 0$ 的系数 a_{lm}

$$a_{lm}=\frac{b_{lm}}{m\Omega-l\omega(\bar{J})}\tag{8.3.44}$$

如果我们选择 $\bar{J}$ 使得分母远离零，那么 a_{lm} 有意义，并且精确到 ϵ 阶，我们有新的 Hamilton 函数的作用-角变量的形式(8.3.38)，即

$$\bar{H}=H_0(\bar{J})+\epsilon b_{00}(\bar{J})\tag{8.3.45}$$

将新的不变量写成旧的作用-角变量的函数

$$\bar{J}(J,\theta,t)=J-\epsilon\frac{\partial S_1(J,\theta,t)}{\partial\theta}\tag{8.3.46}$$

任何函数 $I(\bar{J})$ 仍是不变量。在后面我们将利用这一事实在接近基共振来构造全局成立的不变量。

§8.4 浸渐不变量

8.4.1 概述

有一类特殊的 Hamilton 系统，它的 Hamilton 函数虽然明显依赖于时间，但可以通过摄动展开就某阶精度来构造近似不变量，以达到降阶甚至求解的目的。这类 Hamilton 函数除了某个自由度外，其余的自由度以及时间的变化都是缓慢的，并且在慢的时间尺度范围内，Hamilton 函数的变化很小。这种 Hamilton 函数的缓慢变化被称作浸渐。而通过展开构造的系统的不变量便是浸渐不变量。

浸渐理论有许多应用。例如，慢变长度的单摆在时间保持方面很重要，如今相似的理论已被用于现代钟表的石英晶体振子上。浸渐理论还描述了行星的运动，因为此运动受到太阳质量变化的影响，而太阳质量每年变化大约为 10^{-13} 倍。此外，在微观领域内浸渐理论也有广泛应用[4]。

本节我们先研究浸渐变化的效果。所得结果十分简单，即在浸渐变化时，作用变量几乎是常量。然后，给出 Hamilton 系统的浸渐不变量的一阶近似的构造方法。

现在我们来看看近可积 Hamilton 系统的小摄动与我们构造方法中将要用到的慢（或浸渐）摄动在展开级数的阶数方面的差别。对于小摄动来说，Hamilton 函数具有如下普遍形式

$$H=H_0(\boldsymbol{J},t)+\epsilon H_1(\boldsymbol{J},\boldsymbol{\theta},t)+\cdots \tag{8.4.1}$$

这里 H_0 代表了完全可积系统。ϵ 是小参数，代表了 H 的不可积部分的量值。对于小摄动，H_0 的导数和 H_1 的导数与 H_0 和 H_1 具有同样的阶，即

$$\left|\frac{\partial H_0}{\partial t}\right|\sim|H_0|,\ \left|\frac{\partial H_1}{\partial J}\right|\sim|H_1|,\ \text{等等}$$

但对于慢摄动，我们假设求导产生的项要比求导前的项小一个 ϵ 阶。也就是说，对慢的时间变分

$$\left|\frac{\partial H_0}{\partial t}\right|\sim\epsilon|H_0|$$

等等，为了保证这种阶的差别，通常引入小参数 ϵ，将 Hamilton 函数写成

$$H_0=H_0(\epsilon t)$$

这样

$$\frac{\partial H_0}{\partial t}=\epsilon H_0'$$

这里“$'$”表示了对 $\tau=\epsilon t$ 的导数。

本节，我们将研究这样的 Hamilton 函数，它除了一个自由度以外，其它的自由度以及时间的变化都是缓慢的。基于以上因素，它可以表示为

$$H=H_0(J,\epsilon\boldsymbol{y},\epsilon t)+\epsilon H_1(J,\theta,\epsilon\boldsymbol{y},\epsilon t)+\cdots \tag{8.4.2}$$

这里 J 和 θ 是未受扰（$\epsilon=0$）的运动的单快变自由度的作用-角变量。$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ 是其它自由度的慢变正则变量，并不一定要是作用-角变量的形式。因为当 $\epsilon=0$ 时，系统实际上是单自由度的，因此它是可积的，J 和 θ 总是可以求出的。小参数 ϵ 在我们

对H求导来构造摄动级数时将自动保持着阶，并且在计算的最后可令其为1。

8.4.2 浸渐不变量

下面我们就一般的单自由度 Hamilton 系统来看一下当系统浸渐变化时，系统作用变量的变化。多自由度系统的情况类似。

考虑 Hamilton 系统

$$H=H(q,p,\tau) \tag{8.4.3}$$

这里τ是一个参数。若τ是常数，则系统的运动是有界的，因此对每一个固定的τ，存在相应的作用-角变量。很显然，Hamilton 的浸渐变化在选择

$$\tau(t)=\varepsilon t,\quad (0\leqslant\varepsilon\leqslant 1) \tag{8.4.4}$$

时可以表示。这时有

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial H}{\partial \tau} \tag{8.4.5}$$

我们称一个函数$F(q,p,\tau)$是系统的一个浸渐不变量，如果对于任意的满足$0<\varepsilon\leqslant 1$的ε，

$$F(t)=F(q(t),\ p(t),\ \tau(t))$$

在时间范围内$0<t<\varepsilon^{-1}$内变化很小。精确地说，有如下定义。

定义 如果对于任意的$\eta>0$，可以找到一个ε_0，使得对任意满足$0<\varepsilon<\varepsilon_0$的$\varepsilon$，对函数$F(t)=F(q(t),\ p(t),\ \tau(t))$总成立

$$|F(t)-F(0)|<\eta,\qquad (0<t<\varepsilon^{-1})$$

则F便被称作是一个浸渐不变量。

显然，浸渐不变量是一个给定的，有限的时间间隔中的近似常数。

我们假设，对于固定的τ，Hamilton 函数（8.4.3）可以通过参数地依赖于τ的母函数$S_1(\theta,q,\tau)$的正则变换$(q,p)\rightarrow(\theta,J)$变换到作用-角变量$(\theta,J)$的形式。

若 τ 随时间变化时，则母函数亦随时间变化，由 S_1 导出的变换 $(q,p)\to(\theta,J)$ 仍是正则的，但变量 (θ,J) 已不再是系统的作用-角变量。

新的 Hamilton 函数应用式（5.3.17）可以表示为

$$\bar{H}(\theta,J,\tau)=H(J,\tau)+\epsilon\frac{\partial S_1}{\partial\tau} \tag{8.4.6}$$

其中

$$H(J,\tau)=H(q(\theta,J,\tau),p(\theta,J,\tau),\tau) \tag{8.4.7}$$

仅是 J 和 τ 的确定函数。

运动的 Hamilton 方程为

$$\dot{\theta}=\omega(J,\tau)+\epsilon R_1(\theta,J,\tau),\quad \dot{J}=-\epsilon R_2(\theta,J,\tau) \tag{8.4.8}$$

其中

$$\omega(J,\tau)=\frac{\partial\bar{H}}{\partial J}(J,\tau) \tag{8.4.9}$$

$$R_1=\frac{\partial^2 S_1}{\partial\tau\partial J},\qquad R_2=\frac{\partial^2 S_1}{\partial\tau\partial\theta} \tag{8.4.10}$$

引理 对于 Hamilton 函数（8.4.1）来说，作用变量 J 是系统的浸渐不变量。

〔证明〕 在 8.2.2 小节我们已经证明了母函数 S_1 是 θ 的周期函数，因此 R_1 和 R_2 也是 θ 的周期函数。R_2 的平均值为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}R_2\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 S_1}{\partial\tau\partial\theta}\mathrm{d}\theta \tag{8.4.11}$$

其中积分时 J 和 τ 保持不变。上式的右端可以写成

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{2\pi}\frac{\partial S_1}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}[S_1]\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}=0 \tag{8.4.12}$$

即，因为 S_1 是 θ 的周期函数，所以 R_2 的平均值是零。

令

$$R_3(\theta,J,\tau)=\int_0 R_2(\theta',J,\tau)\mathrm{d}\theta' \tag{8.4.13}$$

因为R_2的平均值为零，因此R_3亦是θ的周期函数。因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{R_3}{\omega}\right)=\frac{1}{\omega}\ \frac{\partial R_3}{\partial\theta}\ \dot\theta+\frac{\partial}{\partial J}\left(\frac{R_3}{\omega}\right)\dot J+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{R_3}{\omega}\right)\dot\tau \tag{8.4.14}$$

上式可以整理为

$$R_2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{R_3}{\omega}\right)-\varepsilon M(t) \tag{8.4.15}$$

其中

$$M(t)=\frac{R_1R_2}{\omega}-R_2\ \frac{\partial}{\partial J}\left(\frac{R_3}{\omega}\right)+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{R_3}{\omega}\right) \tag{8.4.16}$$

将式（8.4.16）代入（8.4.8）第二式中有

$$\dot J=-\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{R_3}{\omega}\right)+\varepsilon^2M(t)$$

因为R_1，R_2，R_3的周期性和$\omega\neq0$，所以$M(t)$是有界的

$$|M(t)|\leqslant M_1 \tag{8.4.17}$$

同样

$$\left|\frac{R_3}{\omega}\right|\leqslant M_2 \tag{8.4.18}$$

这里M_1，M_2是常数，因此$J(t)$和它的初值的差为

$$|J(t)-J_0|\leqslant 2\varepsilon M_2+\varepsilon^2tM_1 \tag{8.4.19}$$

因此存在一个常数K，使得

$$|J(t)-J_0|\leqslant K\varepsilon\qquad(0<t<\varepsilon^{-1}) \tag{8.4.20}$$

这意味着对时间区间（0，ε^{-1}）的所有时间，$J(t)$无限接近于它的初值。 ‖

以上推证的简单结果十分有用。它经常可以使我们从相应的简单得多的不明显依赖时间的 Hamilton 系统的运动来获得依赖于时间的 Hamilton 系统的运动情况，例如下例。

例 1 一个质量为m的质点在势能

$$V(q)=U\,\mathrm{tg}^2\,\alpha q \tag{a}$$

场中运动，若α缓慢增加，试问系统的能量，振幅和频率怎样变化？

当问题涉及浸渐变化，我们总是先考虑相应的独立于时间的问题。在 8.2.2 节例 1 中我们已经求出能量和作用量的关系为

$$E=\alpha J[\alpha J+2(2mU)^{1/2}]/2m \tag{b}$$

以及频率为

$$\omega=\alpha[\alpha J+(2mU)^{1/2}]/2m \tag{c}$$

在 Hamilton 函数浸渐变化时，作用量J保持常量。因为 Hamilton 函数的值不是常量，所以能量变化了。但是上面的能量，α和J的关系式仍近似成立。因此，能量与时间的关系可以简单地写成

$$E(t)\simeq\alpha(t)J[\alpha(t)J+2(2mU)^{1/2}]/2m \tag{d}$$

同样，系统的运动频率近似为

$$\omega(t)\simeq\alpha(t)[\alpha(t)J+(2mU)^{1/2}]/2m \tag{e}$$

在这种情况下，运动的能量和频率均随着$\alpha(t)$的增长而增长。‖

8.4.3 浸渐不变量的构造

现在对 Hamilton 函数（8.4.2)来构造经典的浸渐不变量。

对零阶精度来说，不变量就是与快变自由度相应的作用量J。现在要构造具有一阶精度的浸渐不变量，因此要考虑扰动εH_1的影响。为此，象 8.3 节一样，我们来寻找从$J,\theta,\boldsymbol{y}$到$\overline{J}$，$\overline{\theta}$，$\overline{\boldsymbol{y}}$的正则变换，以使新的 Hamilton 函数

$$\overline{H}=\overline{H}_0+\varepsilon\overline{H}_1+\cdots \tag{8.4.21}$$

独立于快相变量$\overline{\theta}$。引进近恒等变换母函数

$$S=\overline{J}\theta+\overline{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{q}+\varepsilon S_1(\overline{J},\theta,\overline{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{q},t)+\cdots \tag{8.4.22}$$

于是，精确到一阶近似，正则变换为

$$J=\bar{J}-\varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\theta}},\quad \theta=\bar{\theta}-\varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial\bar{J}}$$

$$\boldsymbol{p}=\bar{\boldsymbol{p}}+\varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\boldsymbol{q}}},\quad \boldsymbol{q}=\bar{\boldsymbol{q}}-\varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\boldsymbol{p}}} \tag{8.4.23}$$

将这些式子代入 H_0，展开到 ε 的一阶

$$H_0(J,\varepsilon\boldsymbol{y},\varepsilon t)=H_0(\bar{J},\varepsilon\bar{\boldsymbol{y}},\varepsilon t)+\varepsilon\omega\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\theta}} \tag{8.4.24}$$

其中 $\omega=\frac{\partial H_0}{\partial\bar{J}}$ 是快变频率。注意到在展开式中应有的

$$-\frac{\partial H_0}{\partial\bar{\boldsymbol{q}}}\cdot\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\boldsymbol{p}}},\qquad \frac{\partial H_0}{\partial\bar{\boldsymbol{p}}}\cdot\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\boldsymbol{q}}} \tag{8.4.25}$$

因为是 ε 的二阶项故已被略去。于是，根据（5.3.25）第三式

$$\bar{H}(\bar{J},\bar{\theta},\varepsilon\bar{\boldsymbol{y}},\varepsilon t)=H(J,\theta,\varepsilon\boldsymbol{y},\varepsilon t)$$

$$+\varepsilon\frac{\partial S(\bar{J},\theta,\varepsilon\bar{\boldsymbol{p}},\varepsilon\boldsymbol{q},\varepsilon t)}{\partial(\varepsilon t)} \tag{8.4.26}$$

将 $\bar{H}$、H、S 利用式（8.4.23）展开，并令 ε 的各阶幂相等，精确到零阶，有

$$\bar{H}_0(\bar{J},\varepsilon\bar{\boldsymbol{y}},\varepsilon t)=H_0(\bar{J},\varepsilon\bar{\boldsymbol{y}},\varepsilon t) \tag{8.4.27}$$

精确到一阶为

$$\bar{H}_1(\bar{J},\bar{\theta},\varepsilon\bar{\boldsymbol{y}},\varepsilon t)=\omega\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\theta}}+H_1(\bar{J},\bar{\theta},\varepsilon\bar{\boldsymbol{y}},\varepsilon t) \tag{8.4.28}$$

其中 $S_1=S_1(\bar{J},\bar{\theta},\varepsilon\bar{\boldsymbol{y}},\varepsilon t)$。注意到式（8.4.26）中的项 $\frac{\partial S_1}{\partial t}$ 也是二阶项，因此在式（8.4.28）中已被略去。

因为需要使 $\bar{H}_1$ 独立于 $\bar{\theta}$，所以我们选择 S_1 以使 H_1 的关于 $\bar{\theta}$ 的振动部分被消去。保持慢的角变量不变，我们定义对 $\bar{\theta}$ 的平均为

$$\langle H_1\rangle_{\bar\theta}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H_1\mathrm{d}\,\bar\theta \tag{8.4.29}$$

关于$\bar\theta$的振动部分为

$$\{H_1\}_{\bar\theta}=H_1-\langle H_1\rangle_{\bar\theta} \tag{8.4.30}$$

将式（8.4.28）分成其平均和振动部分，得到精确到一阶的$\bar H$的表达式

$$\bar H(\bar J,\ \epsilon\bar{\boldsymbol y},\ \epsilon t)=H_0+\epsilon\langle H_1\rangle_{\bar\theta} \tag{8.4.31}$$

和S_1的方程

$$\omega\frac{\partial S_1}{\partial\bar\theta}=-\{H_1\}_{\bar\theta} \tag{8.4.32}$$

它很容易被积分。精确到零阶，浸渐不变量是J。精确到一阶，新的不变量是$\bar J$，根据式（8.4.23）第一式可以表示为旧变量的函数

$$\bar J(J,\ \theta,\epsilon\boldsymbol y,\ \epsilon t)=J-\epsilon\frac{\partial S_1}{\partial\theta} \tag{8.4.33}$$

将式（8.4.32）代入式（8.4.33），并将哑变量$\bar\theta$写成θ，得到

$$\bar J=J+\frac{\epsilon\{H_1\}_\theta}{\omega} \tag{8.4.34}$$

事实上，任何$\bar J$的函数也可以选择作为浸渐不变量。

通过构造一个浸渐不变量实际上在浸渐近似的极限内将Hamilton系统从n个自由度降到$n-1$个自由度。这是因为由一个ϵ的渐近级数给出的变换后的Hamilton函数

$$\bar H=\bar H(\bar J,\ \epsilon\bar{\boldsymbol y},\ \epsilon t,\epsilon) \tag{8.4.35}$$

是独立于$\bar\theta$的，因此$\bar J$是常量。假如此系统余下的自由度中经历一个振动，这个振动相应其它自由度来说是快的，那么我们可以引入第二个小参数ϵ_2，变换未受扰（$\epsilon_2=0$）的系统的快变量到作用-角变量，然后去找第二个浸渐不变量。这一方法也许可以获得一组浸渐不变量，直到系统降到一个自由度，并且可以积分

以获得最后的不变量。

浸渐不变量实际上可以就各阶精度而求出，并且最后的级数都是渐近的。

当然，浸渐理论也是有限制的。因为共振也许会改变或破坏不变量。如果精确到一阶 ε 将 $\boldsymbol{y}$ 写成作用-角变量形式 $\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{J}_y, \boldsymbol{\theta}_y)$，不略去式（8.4.25）和 $\dfrac{\partial S_1}{\partial t}$，则式（8.4.32）为

$$\omega\frac{\partial S_1}{\partial \bar{\theta}}+\varepsilon\boldsymbol{\omega}_y\cdot\frac{\partial S_1}{\partial(\varepsilon\bar{\boldsymbol{\theta}}_y)}+\varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial(\varepsilon t)}=-\{H_1\}_{\bar{\theta}} \quad (8.4.36)$$

因为 S_1 和 $\{H_1\}_{\bar{\theta}}$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 和 Ωt 的周期函数，展开为 Fourier 级数可以得到

$$S_1=i\sum_{\substack{\boldsymbol{n}=(k,l,\boldsymbol{m})\\ k\neq 0}}\frac{H_{1\boldsymbol{n}}(\bar{J},\bar{\boldsymbol{J}}_y)}{k\omega-\varepsilon\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}_y+\varepsilon l\Omega}\exp[i(k\bar{\theta}$$

$$+\boldsymbol{m}\cdot\varepsilon\bar{\boldsymbol{\theta}}_y+l\Omega\varepsilon t)] \quad (8.4.37)$$

可以看到慢变量和 $\bar{\theta}$ 的快振动之间的高阶共振（$\boldsymbol{m}$，l 很大）会引起小分母。充分接近这些共振，在式（8.4.36）中忽略 ε 阶项是不正确的。事实上，忽略了这些共振效应的浸渐级数是渐近的，实际上是发散的，并且只有在时间远小于或等于慢的时间尺度的阶时才成立。

例2 试求慢变谐振子

$$H_1=\frac{1}{2}G(\tau)p^2+\frac{1}{2}F(\tau)q^2，\text{其中 } \tau=\varepsilon t \quad (a)$$

的浸渐不变量。并研究共振对它的影响。

我们看到小参数通过利用 $\tau=\varepsilon t$ 已被写进系统的 Hamilton 函数。首先我们要把 Hamilton 函数变换到 $H_0=H_{10}(\varepsilon=0)$ 的作用-角变量形式。利用如下的母函数 $F_1(q,\theta,\tau)$

$$F_1(q,\theta,\tau)=\frac{1}{2}Rq^2\operatorname{ctg}\theta \quad (b)$$

其中 $R(\tau)=(F/G)^{1/2}$。根据式（5.3.17），我们得到变换后的

Hamilton 函数为

$$H=\omega_0 J+\varepsilon\frac{1}{2}\frac{R'}{R}J\sin 2\theta \qquad (c)$$

这里 $\omega_0(\tau)=(FG)^{1/2}$，并且"$'$"表示对 τ 求导。于是系统就成为式（8.4.2）的形式。下面就可以通过慢摄动展开来构造浸渐不变量。精确到零阶，浸渐不变量恰是

$$J=\frac{H_0}{\omega_0}=\text{const.} \qquad (d)$$

精确到一阶，我们对（c）应用式（8.4.34），得到

$$\bar{J}=J(1+\varepsilon P\sin 2\theta)=\text{const.} \qquad (e)$$

其中 $P(\varepsilon t)=(R'/2\omega_0 R)$。这表明精确到一阶无穷小，$J$ 有一个以快变量的频率的两倍来振动的微小的附加部分。

可以通过直接对 t 求导来验证 $\bar{J}$ 的确是不变量。因为

$$\dot{\bar{J}}=\dot{J}+\varepsilon\dot{P}J\sin 2\theta+2\varepsilon PJ\omega_0\cos 2\theta+O(\varepsilon^2) \qquad (f)$$

根据 Hamilton 方程

$$\dot{J}=-\frac{\partial H}{\partial\theta}=-\varepsilon\frac{R'}{R}J\cos 2\theta=-2\varepsilon PJ\omega_0\cos 2\theta$$

因此

$$\dot{\bar{J}}=\varepsilon\dot{P}J\sin 2\theta \qquad (g)$$

根据慢摄动的阶的关系

$$\dot{P}\sim\varepsilon P$$

所以 $\dot{\bar{J}}$ 是 ε^2 阶。所以 $\bar{J}$ 是一阶不变量。

现在考虑由于振动和振子参数的慢的周期性变化的共振而引起的浸渐不变量的长期变化。为此，把 $\dot{P}$ 展开为 Fourier 级数，有

$$\dot{P}=\varepsilon\sum_{n\neq 0}a_n\exp(in\omega_1\varepsilon t) \qquad (h)$$

其中 $\varepsilon\omega_1$ 是慢振动的频率，并且 ω_1/ω_0 和 1 同阶。将（h）代入（g），有

$$\dot{\bar{J}} = \frac{\varepsilon^2}{2\mathrm{i}}\bar{J}\sum_{n\neq 0} a_n\{\exp[\mathrm{i}(n\omega_1\varepsilon t + 2\theta)]$$
$$-\exp[\mathrm{i}(n\omega_1\varepsilon t - 2\theta)]\} \qquad (i)$$

这里精确到一阶无穷小用 $\bar{J}$ 代替 J。在慢振动的一个周期上积分（i），得

$$\frac{\Delta\bar{J}}{\bar{J}} \sim \varepsilon^2 \qquad (j)$$

当然在对 t 和对 θ 的振动频率可通约，即

$$\frac{\omega_0}{\varepsilon\omega_1} = \frac{s}{2}$$

其中 s 是一个具有 ε^{-1} 阶的整数的情况下，（i）式中 $n = \pm s$ 项将是对 t 的常数，并且对慢周期的积分可得

$$\frac{\Delta\bar{J}}{\bar{J}} \sim \varepsilon^2 |a_s| \frac{2\pi\varepsilon^{-1}}{\omega_1} \qquad (k)$$

或者说

$$\frac{\Delta\bar{J}}{\bar{J}} \sim \varepsilon$$

因此，若在时间 $\sim 2\pi\varepsilon^{-1}/\omega$ 共振保持，则一阶不变量被破坏。这意味着浸渐性被严重地违反。当然这并不一定表示运动不存在不变量，而只是因为不变量不具有上面这种形式。事实上，线性振子（a）是可积的，因此有不变量存在。如果振子是非线性的，那么不变量可能存在，也可能它的拓扑结构被改变，也可能被完全破坏。这里我们仅用线性振子来说明展开技巧和它们的局限。‖

§8.5 长期摄动理论

在接近未受扰 Hamilton 系统共振处，由上一节标准方法给出的一阶浸渐不变量将出现小分母。这些谐振变量可以通过向以谐振频率转动的参考系的正则变换从未受扰的 Hamilton 函数中消去。新的坐标量度了变量在共振处的值的慢振荡，而共振则是

新的相平面的椭圆固定点。在共振被排除后，可用上一节的方法对快转动相位作平均。下面我们讨论两个自由度的自治 Hamilton 系统，向非自治系统的推广可以通过引入一个扩展的相空间而很容易做到。

8.5.1 共振的排除

假设 Hamilton 函数有如下形式

$$H = H_0(\boldsymbol{J}) + \epsilon H_1(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}) \tag{8.5.1}$$

其中 H_0 可以解出为作用-角变量的形式，并且 H_1 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的周期函数

$$H_1 = \sum_{l, m} H_{l,m}(\boldsymbol{J})\exp(i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\theta}) \tag{8.5.2}$$

这里 $\boldsymbol{n}=(l, m)$ 是一个整数矢量。如果在未受扰的频率之间存在一个共振，即

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r}{s}, \quad r, s \text{ 是整数} \tag{8.5.3}$$

其中

$$\omega_1(\boldsymbol{J}) = \frac{\partial H_0}{\partial J_1}, \quad \omega_2(\boldsymbol{J}) = \frac{\partial H_0}{\partial J_2} \tag{8.5.4}$$

那么应用 8.3 和 8.4 节的摄动理论来解决系统的运动只能产生长期解。我们用式（8.5.3）来表示系统的主共振或由主共振生成的岛振动的谐波频率产生的次共振。在这两种情况下，长期项都可以通过应用消去原作用量 J_1 或 J_2 的一个变换来排除。我们选择如下形式的母函数

$$F_2 = (r\theta_1 - s\theta_2)\hat{J}_1 + \theta_2\hat{J}_2 \tag{8.5.5}$$

它定义了一个从 $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}$ 到 $\hat{\boldsymbol{J}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的一个正则变换，使得

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial \theta_1} = r\hat{J}_1, \quad J_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_1} = \hat{J}_2 - s\hat{J}_1 \\ \hat{\theta}_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial \hat{J}_1} = r\theta_1 - s\theta_2, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \hat{J}_2} = \theta_2 \end{aligned} \tag{8.5.6}$$

在其上新变量的变化率

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = r\dot{\theta}_1 - s\dot{\theta}_2 \tag{8.5.7}$$

量度了离共振的慢偏差。

在用式（8.5.5）这种形式的母函数来排除共振时，可以选择任意一个原相变量保持不变。这里，我们假设 $\dot{\theta}_2$ 是两个频率中较慢的一个，令 $\hat{\theta}_2 = \theta_2$ 为不变的变量。因此，在就变换后的快相位对 Hamilton 函数作平均时，是对较慢的原变量取平均。这种选择的方便之处在于：如果要排除高阶共振，可以保持二阶相互作用的最低谐波。

把式（8.5.6）代入式（8.5.1），有

$$\hat{H} = \hat{H}_0(\hat{\boldsymbol{J}}) + \epsilon H_1(\hat{\boldsymbol{J}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \tag{8.5.8}$$

其中

$$\hat{H}_1 = \sum_{l,m} H_{l,m}(\hat{\boldsymbol{J}}) \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{r}[l\hat{\theta}_1 + (ls + mr)\hat{\theta}_2]\right\} \tag{8.5.9}$$

同上节一样，对 $\hat{\theta}_2$ 取平均，可以得到精确到一阶的变换后的 Hamilton 函数

$$\bar{H} = \bar{H}_0(\hat{\boldsymbol{J}}) + \epsilon \bar{H}_1(\hat{\boldsymbol{J}}, \hat{\theta}_1) \tag{8.5.10}$$

其中

$$\bar{H}_0 = \hat{H}_0(\hat{\boldsymbol{J}}) \tag{8.5.11}$$

$$\bar{H}_1 = \langle H_1(\hat{\boldsymbol{J}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})\rangle_{\hat{\theta}_2} = \sum_{p=0}^{\infty} H_{-pr,ps}(\hat{\boldsymbol{J}})\exp(-\mathrm{i}p\hat{\theta}_1) \tag{8.5.12}$$

平均在接近共振时也成立，这时 $\dot{\hat{\theta}}_2 \gg \dot{\hat{\theta}}_1$。因为 $\bar{H}$ 独立于 $\hat{\theta}_2$，因此

$$\hat{J}_2 = \hat{J}_{20} = \text{const.} \tag{8.5.13}$$

这便是 Hamilton 函数（8.5.3）浸渐不变量级数的第一项。由（8.5.6）第二式可知，$\hat{J}_2$ 表示了系统不变量的组合，即

$$\hat{J}_2 = J_2 + \frac{s}{r} J_1 = \text{const.} \tag{8.5.14}$$

转动坐标的作用就在于明确地表示接近共振系统改进的不变量。但是，对于高阶共振，即 $s \gg r$，改进的不变量 $\hat{J}_2$ 只是一个常数乘上未改进的不变量 J_1。因此，对于改进的不变量来说，具有重要意义的共振只是那些具有低谐波数 s 的共振。

当 $\hat{J}_2$ 是常数时，由 Hamilton 函数(8.5.10) 给出的 $\hat{J}_1 - \hat{\theta}_1$ 相平面的运动等效于单自由度的运动，因而是可积的。相平面 $\hat{J}_1 - \hat{\theta}_1$ 存在一个或一组驻值点 $\hat{J}_{10}$，$\hat{\theta}_{10}$，它们满足

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \hat{J}_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial \hat{\theta}_1} = 0 \tag{8.5.15}$$

它代表了受扰后的 Hamilton 系统的周期解。未受扰的 Hamilton 系统在由式（8.5.3）给出的特殊 $\boldsymbol{J}$ 下对所有 $\boldsymbol{\theta}$ 存在的周期解，在 $\boldsymbol{\theta}$ 是退化的。通过摄动，这种退化性被排除，只剩下由式（8.5.15）给出的周期解。

Fourier 级数的振幅 $H_{-pr,ps}$ 当 p 增加时一般下降得很快。因此，作为很好的近似，我们描述 $\hat{J}_1 - \hat{\theta}_1$ 平面的可积运动时，只需用 $p=0$，± 1 项。所以

$$\bar{H} = \hat{H}_0(\hat{\boldsymbol{J}}) + \varepsilon H_{0,0}(\hat{\boldsymbol{J}}) + 2\varepsilon H_{r,-s}(\hat{\boldsymbol{J}}) \cos \hat{\theta}_1 \tag{8.5.16}$$

其中不失一般性，我们令 $H_{-r,s} = H_{r,-s}$，这总可以通过一个普通的变量变换 $\hat{\theta}_1 \to \hat{\theta}_1 + \text{const.}$ 来达到。

将式（8.5.16）代入式（8.5.15），可以得到固定点的位置

$$\frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \hat{J}_{10}} + \varepsilon \frac{\partial H_{0,0}}{\partial \hat{J}_{10}} + 2\varepsilon \frac{\partial H_{r,-s}}{\partial \hat{J}_{10}} \cos \hat{\theta}_{10} = 0 \tag{8.5.17}$$

$$-2\varepsilon H_{r,-s} \sin \hat{\theta}_{10} = 0 \tag{8.5.18}$$

从式（8.5.18）可知两个固定点在 $\hat{\theta}_{10} = 0, \pi$。根据式（8.5.17）和共振条件

$$\frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \hat{J}_{10}} = s \frac{\partial H_0}{\partial J_1} - r \frac{\partial H_0}{\partial J_2} = s\omega_1 - r\omega_2 = 0 \tag{8.5.19}$$

$\hat{J}_{10}$由下式给出

$$\frac{\partial H_{0,0}}{\partial \hat{J}_{10}} \pm 2\frac{\partial H_{r,-s}}{\partial \hat{J}_{10}} = 0 \qquad (8.5.20)$$

其中上式中正号相应于$\hat{\theta}_{10}=0$，负号相应于$\hat{\theta}_{10}=\pm\pi$。

8.5.2 偶然退化和内在退化

现在我们讨论 Hamilton 系统的两种情形。

定义 1 如果未受扰的 Hamilton 函数只是对特殊的J_1和J_2才出现共振，那么 Hamilton 函数H_0被称作偶然退化。

这是 Hamilton 函数的普遍情形，对这种情形来说，未受扰的 Hamilton 函数变换到转动系统是变换后的两个作用量坐标的函数，即

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_0(\hat{J}_1, \hat{J}_2) \qquad (8.5.21)$$

定义 2 如果未受扰的 Hamilton 函数具有这样的特性，即对于所有的J_1和J_2共振条件都满足，那么H_0被称作是内在退化的。

显然，内在退化的 Hamilton 函数为

$$H_0 = H_0(sJ_1 + rJ_2) \qquad (8.5.22)$$

这就保证了式（8.5.3）对所有的J_1和J_2都成立。利用(8.5.6)第一式和第二式将式（8.5.22）变换到转动系统，则

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_0(\hat{J}_2) \qquad (8.5.23)$$

即内在退化情形下，H_0独立于$\hat{J}_1$。这种情形经常出现在对物理系统的主共振感兴趣的情况下，虽然主共振可能是偶然的或内在的，二阶共振却由于其频率依赖于作用量坐标的复杂程度而几乎总是偶然的。

1. 偶然退化

考虑到式（8.5.16）和（8.5.21），在$\hat{J}_1$和$\hat{\theta}_1$的偏移为

$$\dot{\hat{J}}_1 = O(\varepsilon H_{r,-s}), \quad \dot{\hat{\theta}}_1 = O(1) \qquad (8.5.24)$$

因此可以关于驻值总在 $\hat{J}_1$ 而不是 $\hat{\theta}_1$ 展开式（8.5.16）。引入

$$\Delta\hat{J}_1=\hat{J}_1-\hat{J}_{10} \tag{8.5.25}$$

我们有

$$\hat{H}_0(\hat{\boldsymbol{J}})=\hat{H}_0(\hat{\boldsymbol{J}}_0)+\frac{\partial\hat{H}_0}{\partial\hat{J}_{10}}\Delta\hat{J}_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\hat{H}_0}{\partial\hat{J}_{10}^2}(\Delta\hat{J}_1)^2+\cdots$$

$$H_{0,0}(\hat{\boldsymbol{J}})=H_{0,0}(\hat{\boldsymbol{J}}_0)+\frac{\partial H_{0,0}}{\partial\hat{J}_{10}}\Delta\hat{J}_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_{0,0}}{\partial\hat{J}_{10}^2}(\Delta\hat{J}_1)^2+\cdots \tag{8.5.26}$$

$$H_{r,-s}(\hat{\boldsymbol{J}})=H_{r,-s}(\hat{\boldsymbol{J}}_0)+\frac{\partial H_{r,-s}}{\Delta\hat{J}_{10}}\Delta\hat{J}_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_{r,-s}}{\partial\hat{J}_{10}^2}(\Delta\hat{J}_1)^2+\cdots$$

将式（8.5.26）代入式（8.5.16）中，略去常数项，考虑到条件（8.5.17），仅保留 ϵ 和 $\Delta\hat{J}_1$ 的最低阶项，我们得到描述接近共振运动的 Hamilton 函数

$$\Delta\bar{H}=\frac{1}{2}G(\Delta\hat{J}_1)^2-F\cos\hat{\theta}_1 \tag{8.5.27}$$

这里 G 是非线性性参数

$$G(\hat{\boldsymbol{J}}_0)=\frac{\partial^2\hat{H}_0}{\partial\hat{J}_{10}^2} \tag{8.5.28}$$

并且 F 是扰动强度和 Fourier 模振幅的乘积

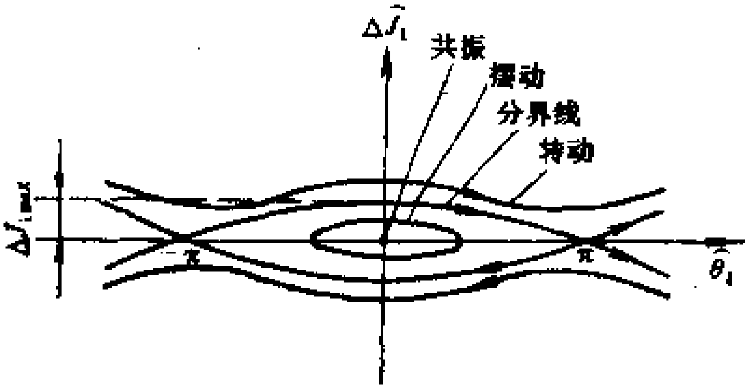
$$F(\hat{\boldsymbol{J}}_0)=-2\epsilon H_{r,-s}(\hat{\boldsymbol{J}}_0) \tag{8.5.29}$$

这个结果十分完美，它表明在接近每一个共振的运动就好象一个摆的运动一样，由摆动，分界线和转动组成。式（8.5.27）曾被许多研究者用来描述 Hamilton 系统接近共振的普遍运动，并且是研究与这些共振相应的分界线处的混沌运动的基础。在某种意义上，式（8.5.27）提供了接近所有共振运动的通用描述工具。因此我们有时称 $\Delta\bar{H}$ 为标准 Hamilton 函数。

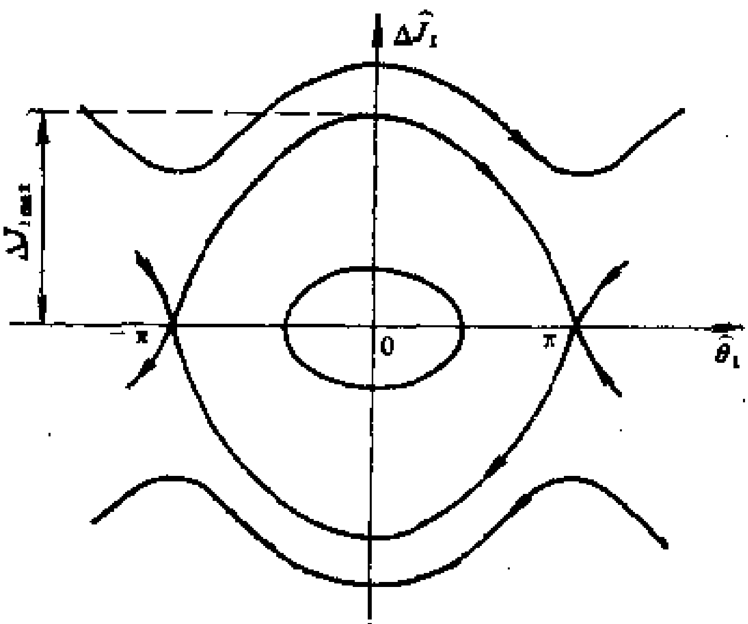
在扰动下原运动经变换后其接近共振的运动如图 8.11(a)所示。对于 $GF>0$，稳定的固定点在 $\hat{\theta}_1=0$，而不稳定点在 $\pm\pi$。$\hat{J}_1-\hat{\theta}_1$ 摆动的频率在接近稳定点是慢的

$$\hat{\omega}_1=(FG)^{1/2}=O[(\varepsilon H_{\gamma,-s})^{1/2}] \qquad (8.5.30)$$

并且当接近分界线时，这个频率减小到零。它总是远远小于 $\hat{J}_2-\hat{\theta}_2$ 振动的频率，此频率和1同阶。最大偏移 $\Delta\hat{J}_{1max}$ 很小，它出现在分界线，并等于分界线宽度的一半（在 $\theta_1=0$ 处）。



(a)



(b)

图 8.11 接近-孤立共振的浸渐运动
(a) 偶然退化。(b) 内在退化。

$$\Delta\hat{J}_{1max}=2(F/G)^{1/2}=O[(\varepsilon H_{r,-s})^{1/2}] \qquad (8.5.31)$$

接近稳定固定点，相轨迹轨道是椭圆，其半轴的长度比为

$$\frac{\Delta \hat{J}_1}{\Delta \hat{\theta}_1} = (F/G)^{1/2} = O[(\epsilon H_{r,-s})^{1/2}] \qquad (8.5.32)$$

2. 内在退化

类似偶然退化，但注意式（8.5.23），即 $\hat{H}_0$ 独立于 $\hat{J}_1$，用下式来替换式（8.5.24）

$$\dot{\hat{J}}_1 = O(\epsilon H_{r,-s}), \quad \dot{\hat{\theta}}_1 = O(\epsilon H_{0,0}, \epsilon H_{r,-s}) \qquad (8.5.33)$$

这表明在 $\hat{J}_1$ 和在 $\hat{\theta}_1$ 的偏移是同阶的。我们不能象偶然退化那样仅对 $\hat{J}_1$ 来展开式（8.5.16）。为了检验解的特性，我们把式（8.5.16）在椭圆固定点 $\hat{\theta}_{11} = 0$ 线性化。记 $\Delta\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1$，将式（8.5.16）展为开 $\Delta\hat{\theta}_1$ 和 $\Delta\hat{J}_1$ 的直到二阶近似的级数，有

$$H_{0,0}(\hat{\boldsymbol{J}}) = H_{0,0}(\hat{\boldsymbol{J}}_0) + \frac{\partial H_{0,0}}{\partial \hat{J}_{10}}(\Delta \hat{J}_1) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_{0,0}}{\partial \hat{J}_{10}^2}(\Delta \hat{J}_1)^2 + \cdots \qquad (8.5.34)$$

$$H_{r,-s}(\hat{\boldsymbol{J}}) = H_{r,-s}(\hat{\boldsymbol{J}}_0) + \frac{\partial H_{r,-s}}{\partial \hat{J}_{10}}(\Delta \hat{J}_1) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_{r,-s}}{\partial \hat{J}_{10}^2}(\Delta \hat{J}_1)^2 + \cdots \qquad (8.5.35)$$

$$\cos\hat{\theta}_1 = 1 - \frac{1}{2}(\Delta\hat{\theta}_1)^2 + \cdots \qquad (8.5.36)$$

将上面三个式子代入式（8.5.16），考虑到条件（8.5.17）并略去常数项，我们得到与简谐振子相同的 Hamilton 函数

$$\Delta \bar{H} = \frac{1}{2}G(\Delta \hat{J}_1)^2 + \frac{1}{2}F(\Delta\hat{\theta}_1)^2 \qquad (8.5.37)$$

其中

$$G = \frac{\partial^2 \hat{H}_0}{\partial \hat{J}_{10}^2} + \epsilon\frac{\partial^2 H_{0,0}}{\partial \hat{J}_{10}^2} + \epsilon\frac{\partial^2 H_{r,-s}}{\partial \hat{J}_{10}^2} \qquad (8.5.38)$$

$$F = -2\epsilon H_{r,-s} \qquad (8.5.39)$$

对于内在退化情形，式（8.5.38）第一项为零，因此 G 和 F 均是 ϵ 阶。所以 $\hat{J}_1 - \hat{\theta}_1$ 接近椭圆点的振动的频率是

$$\hat{\omega}_1 = (FG)^{1/2} = O(\epsilon) \qquad (8.5.40)$$

并且椭圆半轴的比为

$$\frac{\Delta \hat{J}_1}{\Delta \hat{\theta}_1}=\left(\frac{F}{G}\right)^{1/2}=O(1) \qquad (8.5.41)$$

在椭圆固定点附近从偶然退化向内在退化的过渡由式（8.5.38）来决定。当式（8.5.38）中第一项通过极限零，则系统由偶然退化变为内在退化。

类似上述方法就 $\hat{\theta}_1=\pm\pi$ 进行线性化可以得到双曲轨道的渐近线与 $\hat{\theta}_1$ 轴的倾角为 $\pm\chi$

$$\mathrm{tg}\chi=(F/G)^{1/2} \qquad (8.5.42)$$

因此 $G\neq 0$。对于内在退化和偶然退化情形在此大致是类似的。一般来说我们发现对于弱非线性，内在退化导致复杂的特性，而偶然退化则一般是比较简单的。

8.5.3 高阶共振的排除

1. 高阶共振的排除

若 ε 不是足够小，那么出现在 Hamilton 函数（8.5.9）中的次共振将引起长期项，它会改变或破坏浸渐不变量 $\hat{J}_2$。这些共振是前面推导的 $\hat{J}_1-\hat{\theta}_1$ 相振动的谐波与基频 ω_2 之间的共振。在浸渐极限内，它们将产生图 8.12(a) 所示的岛链。这些共振可通过和 8.5.1 节类似的方法排除，尽管在下文将可看到结果有一些附加的特点。

考虑平均后的 Hamilton 函数（8.5.10）。首先我们需要将它表示成 $\hat{J}_1-\hat{\theta}_1$ 运动的作用-角变量形式。为此我们不是直接去解 Hamilton-Jacobi 方程，而是对接近椭圆奇点的运动应用摄动理论。假设变换后的 Hamilton 函数为 K_0，作用-角变量是 I_1 和 ϕ_1，那么如果对 Hamilton 函数（8.5.10）来说式（8.5.16）是一个很好的近似的话，那么利用 § 8.3 例 1 中（f）式，并且为了符号上的统一，令 $I_2=\hat{J}_2$，则

$$K_0(I_1,I_2)=\hat{H}_0(\hat{J}_{10},I_2)+\hat{\omega}_1 I_1-\frac{\varepsilon}{16}GI_1^2+\cdots \quad (8.5.43)$$

这里G和$\hat{\omega}_1$是I_2的函数，由式（8.5.38）和（8.5.40）给出。在对$\hat{\theta}_2$的平均成立的情况下，方程（8.5.43）是正规解。它独立于角变量，因此$I_2=\hat{J}_2$和I_1是运动的两个常数。向作用-角变量的变换可见图8.12(b)。

为了考虑次共振对这个解改变的影响，我们重新引进在对$\hat{\theta}_2$作平均时忽略的项$\hat{H}'_1$

$$\hat{H}'_1(\hat{\boldsymbol{J}},\hat{\boldsymbol{\theta}})=\hat{H}_1(\hat{\boldsymbol{J}},\hat{\boldsymbol{\theta}})-\bar{H}_1(\hat{\boldsymbol{J}},\hat{\theta}_1) \tag{8.5.44}$$

它的Fourier展开为

$$\hat{H}'_1=\sum_{l,m}{}' H_{lm}(\hat{\boldsymbol{J}})\exp\left[i\frac{l}{r}\hat{\theta}_1+\mathrm{i}\left(l\frac{s}{r}+m\right)\hat{\theta}_2\right] \tag{8.5.45}$$

式中“$'$”表示$ls+mr=0$的项已从式中去掉。关于椭圆奇点$\hat{\theta}_{10}=0$展开上式，有

$$\hat{H}'_1=\sum_{l,m}{}' H_{lm}(\hat{J}_{10}+\Delta\hat{J}_1,\hat{J}_2)\exp\left[\mathrm{i}\frac{l}{r}\Delta\hat{\theta}_1+\mathrm{i}\left(l\frac{s}{r}+m\right)\hat{\theta}_2\right] \tag{8.5.46}$$

将这个受扰Hamilton函数对$\Delta\hat{J}_1-\Delta\hat{\theta}_1$摆动变换到作用-角变量的最低阶，应用§8.2例2（f）式，并且将$\hat{\theta}_2$写成ϕ_2，我们有

$$K_1=\sum_{l,m,n}{}' H_{lm}(\hat{J}_{10},I_2)\exp\left[\mathrm{i}\left(l\frac{s}{r}+m\right)\phi_2\right]\times\exp\left[\frac{\mathrm{i}l}{r}\left(\frac{2I_1}{R}\right)^{1/2}\sin\phi_1\right] \tag{8.5.47}$$

其中$R=(F/G)^{1/2}$。因为我们考虑的是偶然退化，根据式（8.5.32）知$\Delta\hat{J}_1$偏移很小，因此略去。展开第二个指数

$$K_1=\sum_{l,m,n}{}' V_{lmn}(\hat{J}_{10},\boldsymbol{I})\exp\left[\mathrm{i}n\phi_1+\mathrm{i}\left(l\frac{s}{r}+m\right)\phi_2\right] \tag{8.5.48}$$

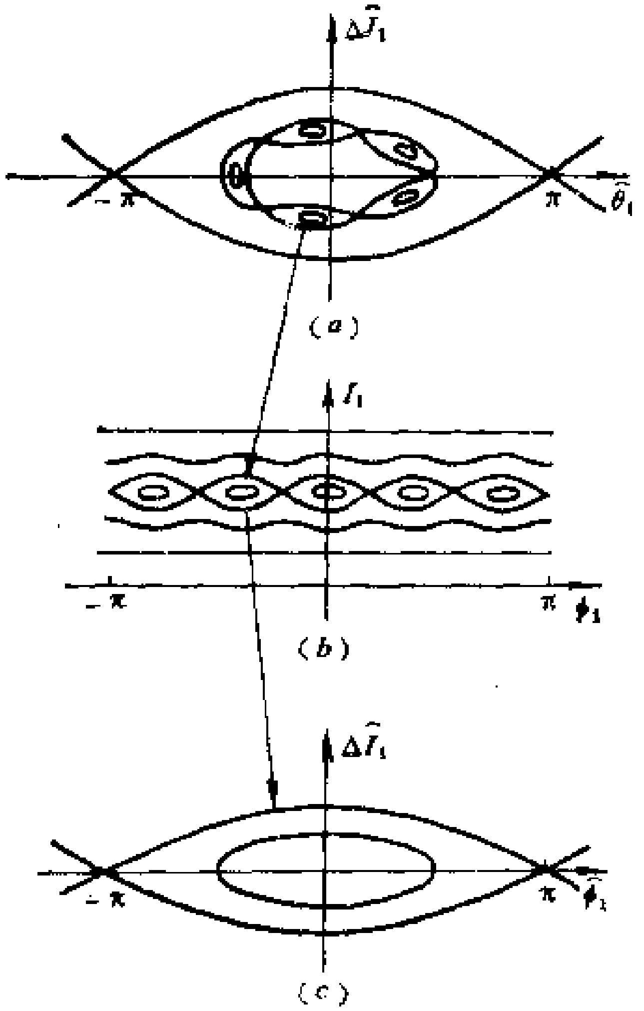


图 8.12 近次共振运动。(a) $5\hat{\omega}_1 \approx \hat{\omega}_2$ 情形，次共振岛在 $\hat{J}_1-\hat{\theta}_1$ 坐标系。(b) 变换到未受扰 $\hat{J}_1-\hat{\theta}_1$ 摆动的作用一角变量 $I_1-\phi_1$。(c) 变换到相应于 $\hat{I}_1-\hat{\phi}_1$ 次摆动的转动坐标系，又获得单摆的相平面

其中

$$\Gamma_{lmn}=\hat{H}_{lm}(\hat{J}_{10}, I_2)\mathscr{J}_n\left[\frac{l}{\gamma}\left(\frac{2I_1}{R}\right)^{1/2}\right] \tag{8.5.49}$$

这里 $\mathscr{J}_n$ 是 n 阶 Bessel 函数。

由式（8.5.48）可以清楚地看到 ϕ_2 和 ϕ_1 之间存在着高阶的共振，使得关于 ϕ_2 的平均不为零。为了得到新的不变量，利用式（8.5.43）和（8.5.48），可以将整个 Hamilton 函数写成

$$K=K_0(I_1, I_2)+\varepsilon_2 K_1(I_1, I_2, \phi_1, \phi_2) \tag{8.5.50}$$

它和式（8.5.1）具有类似的形式，只是具有新的阶参数 ϵ_2。因此我们可以用 8.5.1 节的方法排除次共振。假设共振为

$$\frac{\hat{\omega}_2}{\hat{\omega}_1}=\frac{p}{q} \tag{8.5.51}$$

其中，$\hat{\omega}_2$ 类似式（8.5.4）

$$\hat{\omega}_2=\frac{\partial K_0}{\partial I_2}=\omega_2=O(1) \tag{8.5.52}$$

$\hat{\omega}_1$ 类似式（8.5.30）

$$\hat{\omega}_1=\frac{\partial K_0}{\partial I_1}=O(\epsilon^{1/2}) \tag{8.5.53}$$

象式（8.5.6）一样，变换到新的变量$\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$, $\hat{\phi}_1$和$\hat{\phi}_2$，这里

$$\hat{\phi}_1=p\phi_1-q\phi_2 \tag{8.5.54}$$

是由母函数

$$F_2=(p\phi_1-q\phi_2)\hat{I}_1+\phi_2\hat{I}_2 \tag{8.5.55}$$

导出的慢变量。在快相角 $\hat{\phi}_2=\phi_2$ 上作平均，由式（8.5.48）和（8.5.51），得到

$$nq=-\left(l\frac{s}{r}+m\right)p$$

其中 nq, $l(s/r)p$, mp 是整数。这相当于在变换后的式(8.5.48)中只保留以下项

$$n=-jp,\quad l=kr,\quad m=jq-ks \tag{8.5.56}$$

其中 j 和 k 是整数。在转动系统对 Hamilton 函数 $\hat{K}$ 作平均

$$\bar{K}=\bar{K}_0(\hat{I}_1,\hat{I}_2)+\epsilon_2\bar{K}_1(\hat{I}_1,\hat{I}_2,\hat{\phi}_1) \tag{8.5.57}$$

其中

$$\bar{K}_0(\hat{\boldsymbol{I}})=K_0(I_1(\hat{\boldsymbol{I}}),I_2(\hat{\boldsymbol{I}})) \tag{8.5.58}$$

$$\bar{K}_1=\sum_j K_{-jp,jq}\exp(-ij\hat{\phi}_1) \tag{8.5.59}$$

这里

$$K_{-jp,jq}=\sum_k \Gamma_{k,jq-k,-jp} \qquad (8.5.60)$$

是 $\hat{\phi}_1$ 振动的第 j 个谐波的 Fourier 系数。因为 $\bar{K}$ 独立于 $\hat{\phi}_2$，我们立即得到

$$\hat{I}_2=I_2+\left(\frac{q}{p}\right)I_1=\text{const.} \qquad (8.5.61)$$

这便是岛振动的浸渐不变量。还可看到，$\hat{I}_1-\hat{\phi}_1$ 运动是可积的。将式（8.5.57），（8.5.59）与式（8.5.10），（8.5.12）相比较，可以发现前面的结果都用到高阶共振这里。向转动系统变换后的运动在图 8.12(c) 表出。

2. 岛振动的振幅

为了估计次共振的强度，我们取式（8.5.60）中最大的项，它是 $|j|=1$ 和 $|k|=1$。此外，我们令 $q=1$，相应于与 $\varphi_2=\hat{\theta}_2$ 振动的基波的共振。根据式（8.5.49）和（8.5.60），最大的项正比于

$$\mathscr{J}_p\left[\left(\frac{2I_1}{R}\right)^{1/2}\right]$$

从式（8.5.51）可知 p 是一个具有 $\epsilon^{-1/2}$ 阶的整数。因为 $I_{1\max}$ 和 R 同阶，自变量 $(2I_1/R)^{1/2}$ 的最大值与单位 1 同阶。因此，对于 p 很大（ϵ 很小），可以把 Bessel 函数用其展开式的第一项来近似

$$\mathscr{J}_p\left(\sqrt{\frac{2I_1}{R}}\right)\sim\frac{(I_1/2R)^{p/2}}{p!}<O\left[\frac{1}{(\epsilon^{-1/2})!}\right] \qquad (8.5.62)$$

从式（8.5.62）可以看到相互作用项的幅度正比于 $I_1^{p/2}$，因此当 I_1 减小时，岛振动的幅度递减得很快。把式（8.5.30）和（8.5.31）中的 $H_{-r,s}$ 用 $K_{-p,q}$ 来代替，并利用式（8.5.62），可以看到在 $\hat{I}_1$ 的振动幅度和频率至少是 $O[1/(\epsilon^{-1/2})!]^{1/2}$ 的一个因子，小于在 $\hat{J}_1$ 振动的振幅和频率。我们之所以称新的 $\hat{I}_1$ 振动为岛振动是因为它在 $\hat{J}_1-\hat{\theta}_1$ 相平面上呈现一个岛链。

尽管展示由于二阶共振而引起的岛振动的不变量曲线的方法和用于获得主共振不变量曲线的方法相同，但所得结果却略有不同。岛共振的振幅象式（8.5.62）那样强烈地依赖于ε，而主共振的强度对ϵ的依赖关系则较弱，为$\varepsilon^{1/2}$。因此，对很小的ε，岛振动很快就变得可以忽略。但另一方面，对相对大的ε，岛共振将会变得和主共振一样在决定浸渐不变量的极限方面十分重要。

高阶岛链在接近椭圆奇点处尺寸很快减小这表明它们自身在适度的扰动幅度下在这些岛的稳定状态。因而，既使在相当大的扰动下，不变量不仅存留在主周期解的邻域，也同样存留在二阶周期解的邻域，就象我们可以从稳定的二阶岛链中看到的。

这一小节排除接近椭圆固定点的次共振的方法是一种重正化方法[10]。这就是推导一种从第n阶到第$n+1$阶共振的变换，它保持 Hamilton 函数的形式，但其中的参数则要相应变换到更高阶。

§8.6 Hamilton 系统和正则映射

8.6.1 可积系统

考虑二自由度不显含时间的保守 Hamilton 系统，因为假设H可积，因此它可以表示成作用-角变量的形式

$$H(J_1, J_2)=E \tag{8.6.1}$$

E是系统不变的能量，J_1和J_2是运动常数。不变的能量使相空间的运动由四维降到三维。两个作用量中任何一个的不变性可以进一步将系统从三维不变能量空间降到二维曲面。在二维曲面上，角运动由各自由度的相应频率来决定

$$\theta_1=\omega_1 t+\theta_{10},\ \ \theta_2=\omega_2 t+\theta_{20} \tag{8.6.2}$$

这里每个角变量都是以2π为周期的周期函数。

1. 环面上的运动

系统的运动可以表示在相空间的环面上。这也可以推广到两个以上自由度系统，它是描述运动的方便的方法。我们来看看二自由度系统。假设E是系统的给定能量，检查两个自由度中任一自由度（例如第一个自由度），则J_1作为同心圆的半径，θ_1则是环绕各圆的转角，整个环面还必须附加一个θ_2角才能确定。θ_2与θ_1成直角，组成了整个环面。系统的运动轨迹始终沿着这个环面。

选择一个给定的E并固定J_1，当然也就固定了J_2，因为$\omega_1=\omega_1(\boldsymbol{J})$，$\omega_2=\omega_2(\boldsymbol{J})$，因此比率

$$\alpha=\frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{8.6.3}$$

也是固定的，称之为旋转数。对于$\alpha=r/s$，其中r, s是互质整数，这两个频率是可通约的，那么系统的运动退化为环面上一维曲线的周期轨迹。它在经过r个θ_1循环和s个θ_2循环后自行封闭。一般来说，α将是无理数，在这种情况下，轨迹将映射到整个曲面。因为r和s都可很大，因此作用空间中的周期轨道可以任意接近。

环面上的运动特别有用之处在于它可以推广到两个以上自由度的系统。每个不变的作用量使相空间的轨迹所张曲面的维数减小一维，因此n自由度系统有n个常作用量，它把在$2n$维相空间的运动缩减到一个n维曲面或流形上。这个流形或曲面由n个角变量变化而成。完全类似图8.13，n个角变量互相垂直，具有周期2π，$\boldsymbol{J}=\text{const.}$。

以上讨论的另一个重要结果是在任何正则空间里的可积运动

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{\theta}),\quad \boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{\theta}) \tag{8.6.4}$$

是可以分解为

$$\boldsymbol{p}(t)=\sum_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{p}_m(\boldsymbol{J})\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}t+\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\beta})] \tag{8.6.5}$$

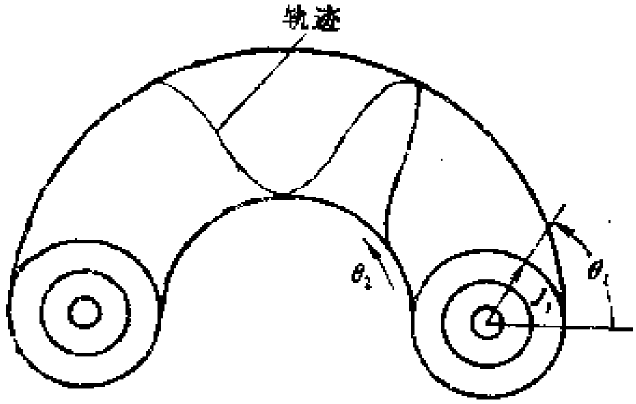


图 8.13 环面 $J_1=\text{const}$，$J_2=\text{const}$.上的运动

$$\boldsymbol{q}(t)=\sum_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{q}_{m}(\boldsymbol{J})\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}t+\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\beta})]$$

其中 $\boldsymbol{m}$ 是一个具有整数分量的 n 维矢量，$\boldsymbol{\beta}$ 是一个常矢量。方程（8.6.5）由角变量的 Fourier 展开得到，而且可以得到 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ 的拟周期运动。为了得到周期解，令

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}=0 \tag{8.6.6}$$

因为 $\boldsymbol{m}$ 有整数分量，这表明 $\boldsymbol{\omega}$ 的分量之间有整数关系，即 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{n}\omega_0$，其中 n_i 没有公因子。在一个周期后，轨线出现闭合

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi n_i}{\omega_i} \tag{8.6.7}$$

这里 n_i 是对具有圆频率 ω_i 的第 i 个自由度所需的环路数目。

2．扭映射

研究相空间轨迹的一个方便的方法是借助于截面。这种方法对二自由度系统尤其有用。对于 Hamilton 函数（8.6.1）有两种选择截面的方法：$J_1-\theta_1$ 平面（$\theta_2=\text{const.}$）和 $J_2-\theta_2$ 平面（$\theta_1=\text{const.}$）。我们选择前者，来检查一下运动轨迹与 $J_1-\theta_1$ 截面的交点。逐次的交点具有 $J_1=\text{const.}$，并且被时间 $\Delta t=2\pi/\omega_2$ 隔离开。在这段时间里，θ_1 增加了 $\omega_1\Delta t=2\pi\alpha(J_1)$，这里 α 是旋转数。因为 $J_2=J_2(J_1,E)$，对于给定的 E，α 可以认为仅是 J_1 的函数。为了便于标记，略去下标 1，得到描述运动从

第 n 到第 $n+1$ 次交点的方程

$$J_{n+1}=J_n,\ \theta_{n+1}=\theta_n+2\pi\alpha(J_{n+1}) \qquad (8.6.8)$$

这里为了方便起见将 α 写成 J_{n+1} 而不是 J_n 的函数。式（8.6.8）给出的映射被称为扭映射。它将圆仍映射为圆，但是旋转数一般依赖于圆的半径。对于 α 为无理数，任何圆上的初始条件当 $n\to\infty$ 均匀地充满整个圆。对于 $\alpha=r/s$ 是有理数，r 和 s 互质，我们得到映射的固定点。对它来说，任何初始条件经过 s 次相交后重新出现。这两种情况都如图 8.14 所示，其中 $s=6$。

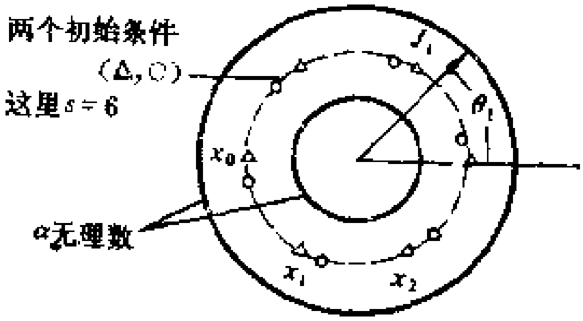


图 8.14 轨迹与截面 $\theta_2=\mathrm{const.}$ 经许多次相交后的交点

二维扭映射是保面积的，即

$$\frac{\partial(J_{n+1},\ \theta_{n+1})}{\partial(J_n,\ \theta_n)}=1 \qquad (8.6.9)$$

对于具有 n 个自由度的可积系统来说，$H=\mathrm{const.}$。假如选择 $\theta_n=\mathrm{const.}$ 为截面，我们得到对 $n-1$ 对剩下的作用-角坐标的扭映射

$$\boldsymbol{J}_{n+1}=\boldsymbol{J}_n,\ \boldsymbol{\theta}_{n+1}=\boldsymbol{\theta}_n+2\pi\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{J}_{n+1}) \qquad (8.6.10)$$

其中 $\alpha_i=\omega_i/\omega_n$ 是第 i 对的转动数。显然，相应于二维映射保面积特性，对于 n 维扭映射，Poisson 括号条件显然成立。

8.6.2 近可积系统

我们考虑二维可积系统略受扰动使得 Hamilton 函数是角变量的函数

$$H(\boldsymbol{J},\boldsymbol{\theta})=H_0(\boldsymbol{J})+\varepsilon H_1(\boldsymbol{J},\boldsymbol{\theta}) \qquad (8.6.11)$$

在 $J_1-\theta_1$ 截面 $\theta_2=\text{const.}(\text{mod } 2\pi)$，扭映射（8.6.8）变化成为受扰扭映射

$$J_{n+1}=J_n+\varepsilon f(J_{n+1},\theta_n),$$

$$\theta_{n+1}=\theta_n+2\pi\alpha(J_{n+1})+\varepsilon g(J_{n+1},\theta_n) \quad (8.6.12)$$

其中 f、g 是 θ 的周期函数。因为从 n 到 $n+1$ 的变换由 Hamilton 方程产生，因此这个变换必然是保面积的。我们选择 f 和 g 为 J_{n+1} 的函数而不是 J_n 的函数，这样保面积特性可以表示成非常简单的形式。事实上，由母函数

$$F_2=J_{n+1}\theta_n+2\pi a(J_{n+1})+\varepsilon b(J_{n+1},\theta_n) \quad (8.6.13)$$

可以求出

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}J_{n+1}},\quad f=-\frac{\partial b}{\partial\theta_n},\quad g=\frac{\partial b}{\partial J_{n+1}} \quad (8.6.14)$$

因此，保面积特性表示为

$$\frac{\partial f}{\partial J_{n+1}}+\frac{\partial g}{\partial\theta_n}=0 \quad (8.6.15)$$

有时比较感兴趣的映射是 f 独立于 J，并且 $g\equiv0$。这样式（8.6.12）便取下面形式

$$J_{n+1}=J_n+\varepsilon f(\theta_n),\quad \theta_{n+1}=\theta_n+2\pi\alpha(J_{n+1}) \quad (8.6.16)$$

此映射被称之为径向扭映射。

如果我们把（8.6.16）第二式在周期为 1 的周定点 $J_{n+1}=J_n=J_0$ 线性化，其中 $\alpha(J_0)$ 是一个整数，则对于邻近的作用量

$$J_n=J_0+\Delta J_n \quad (8.6.17)$$

用新的作用量

$$I_n=2\pi\alpha'\Delta J_n \quad (8.6.18)$$

来替代，则（8.6.16）成为广义标准映射

$$I_{n+1}=I_n+Kf^*(\theta),\quad \theta_{n+1}=\theta_n+I_{n+1},\ \text{mod}2\pi \quad (8.6.19)$$

这里

$$K=2\pi\alpha'\varepsilon f_{\max} \quad (8.6.20)$$

是随机性参数，$f^*=f/f_{\max}$ 是作用量的跃迁，其最大值归一化

为单位1。因此，广义标准映射在局部等价于任何径向扭映射。对于 $f^*=\sin\theta_n$，式（8.6.19）成为标准映射

$$I_{n+1}=I_n+K\sin\theta_n,\quad \theta_{n+1}=\theta_n+I_{n+1} \qquad (8.6.21)$$

受扰扭映射向两个以上自由度保守自治的 Hamilton 系统的推广由如下母函数得出

$$F_2=\boldsymbol{J}_{n+1}\cdot\boldsymbol{\theta}+2\pi a(\boldsymbol{J}_{n+1})+\varepsilon b(\boldsymbol{J}_{n+1},\boldsymbol{\theta}_n) \qquad (8.6.22)$$

对于在截面的 $n-1$ 对作用-角变量，有

$$\boldsymbol{J}_{n+1}=\boldsymbol{J}_n+\varepsilon\boldsymbol{f}(\boldsymbol{J}_{n+1},\boldsymbol{\theta}_n)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{n+1}=\boldsymbol{\theta}_n+2\pi\boldsymbol{a}(\boldsymbol{J}_{n+1})+\varepsilon\boldsymbol{g}(\boldsymbol{J}_{n+1},\boldsymbol{\theta}_n) \qquad (8.6.23)$$

由于是由母函数 F_2 导出的，这些变量是正则的。如果 b 不是 $\boldsymbol{J}_{n+1}$ 的函数，便得到 $2n-2$ 维径向扭映射。

通常把以上这些映射通过引进 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{J},\boldsymbol{\theta})$ 改写为

$$\boldsymbol{x}_{n+1}=T\boldsymbol{x}_n \qquad (8.6.24)$$

其中 T 表示映射。

8.6.3 Hamilton 形式和映射

Hamilton 形式和映射的转换在计算动力学系统的运动中具有广泛应用。Hamilton 系统的一般特性通常用映射来描述，反之映射的正则特性通常用 Hamilton 描述来处理。我们将看到，映射有其自己的 Hamilton 表示，它可以用来将它们的分析与 Hamilton 理论相联系。下面，我们先来研究 Hamilton 描述向映射的转换，接着考虑逆问题，即写出一类映射的 Hamilton 形式。

1. 向映射的转换

在二维情况，受扰扭映射（8.6.12）中的函数 f 和 g 精确到 ε 阶可由 Hamilton 方程

$$\frac{\mathrm{d}J_1}{\mathrm{d}t}=-\varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial\theta_1} \qquad (8.6.25)$$

来确定。关于环绕环面的 θ_2 运动的一个周期来积分式(8.6.25)，

得

$$\Delta J_1=-\varepsilon\int_0^{T_1}\frac{\partial H_1}{\partial\theta_1}(J_{n+1},J_2,\theta_n+\omega_1 t,\theta_{20}+\omega_2 t)\mathrm{d}t \quad (8.6.26)$$

这里 J_2,ω_1 和 ω_2 都是 J_{n+1} 的函数。精确到 ε 阶，利用 $\boldsymbol{J},\boldsymbol{\theta}$ 的未受扰值，即在未受扰的轨道上积分 $\frac{\partial H_1}{\partial\theta_1}$。作用量 J 的跃迁于是为

$$\varepsilon f(J_{n+1},\theta_n)=\Delta J_1(J_{n+1},\theta_n) \quad (8.6.27)$$

相角的相应跃迁可以很容易由保面积条件（8.6.15）获得，当应用于受扰扭映射时，得到

$$g(J,\theta)=-\int^{\theta}\frac{\partial f}{\partial J}\mathrm{d}\theta' \quad (8.6.28)$$

对于径向扭映射，$g\equiv 0$。

2. 向 Hamilton 形式的变换

考虑径向扭映射（8.6.16）这类映射。我们需要将这些方程表示成 Hamilton 形式，其中叠代次数 n 起着时间的作用。为此，引进周期 δ 函数

$$\delta_1(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(n-m)=1+2\sum_{q=1}^{\infty}\cos 2\pi qn \quad (8.6.29)$$

上式最后的形式是 Fourier 展开。于是式（8.6.16）取如下形式

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}n}=\varepsilon f(\theta)\delta_1(n),\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}n}=2\pi\alpha(J) \quad (8.6.30)$$

式（8.6.30）是 Hamilton 形式，其 Hamilton 函数为

$$H(J,\theta,n)=2\pi\int^{J}\alpha(J')\mathrm{d}J'-\varepsilon\delta_1(n)\int^{\theta}f(\theta')\mathrm{d}\theta' \quad (8.6.31)$$

可见，Hamilton 函数 H 是一个非自治的单自由度函数。

以上的结论都很容易推广到 n 个自由度的系统。

§ 8.7 正则映射的一般特性

现在讨论非线性耦合振子系统的一般特性和相空间的结构，主要结果是 KAM 定理。此定理保证了不变量环面的存在，可应用于两个或两个以上自由度的系统。当然，定理的某些结论对两个自由度与两个以上自由度系统有明显的差别，即对两个以上自由度系统存在着 Arnold 扩散。下面，我们把注意力放在二维保面积映射来说明 KAM 定理和相空间的一般特性。

8.7.1 无理旋转数和 KAM 稳定性

若一个可积系统略受扰动，使得 Hamilton 函数是角变量的函数，即

$$H(\boldsymbol{J},\boldsymbol{\theta})=H_0(\boldsymbol{J})+\epsilon H_1(\boldsymbol{J},\boldsymbol{\theta})$$

那么，由前面几节可知，各自由度之间的共振会破坏关于未受扰系统的各种幂级数展开式的收敛性。但是，可以证明这样一个定理，即当某些条件满足时，非线性耦合系统仍会存在不变量。

KAM 定理 如果下列条件满足

（1）频率的线性独立性，即

$$\sum_i m_i\omega_i(\boldsymbol{J})\neq 0 \tag{8.7.1}$$

在 $\boldsymbol{J}$ 的某些区域成立（充分非线性）。上式中 ω_i 是 $\boldsymbol{\omega}=\frac{\partial H_0}{\partial \boldsymbol{J}}$ 的分量，m_i 是整数矢量 $\boldsymbol{m}$ 的分量。

（2）摄动的光滑条件，即 H_1 有足够阶数的连续导数。

（3）初始条件离共振足够远，即对所有的 $\boldsymbol{m}$ 满足

$$|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}|\gg\gamma|\boldsymbol{m}|^{-\tau} \tag{8.7.2}$$

其中 τ 依赖于自由度数目和 H_1 的光滑度。γ 依赖于 ϵ，受扰 Hamilton 函数 H_1 的大小和未受扰的 Hamilton 函数 H_0 的非线

性性 G。

那么，系统存在一个不变量环面（$\boldsymbol{J},\boldsymbol{\theta}$）由 $\boldsymbol{\xi}$ 决定，满足下面关系

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_0+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi},\epsilon) \tag{8.7.3a}$$

和

$$\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi},\epsilon) \tag{8.7.3b}$$

这里 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的周期函数，并且当 $\epsilon=0$ 时为零。并且 $\dot{\boldsymbol{\xi}}=\boldsymbol{\omega}$，是环面上未受扰的频率。

KAM 定理是二十世纪力学最有代表性的成果，它是由 Колмогоров[11] 提出的推测，其后由 Арнольд[12] 关于解析的 H_1 证明的，后来 Moser[13] 又对有足够阶连续导数的 H_1 给出了证明。这个定理被称作 KAM 定理就是为了纪念这三位数学力学家的杰出工作。这个定理提供了非线性耦合系统存在不变量的基础。下面我们讨论这个定理的含义，证明的思路以及适用性条件的意义。

因为当 γ 太大时式（8.7.2）不成立，而 γ 随着 ϵ，$|H_1|$ 和 $1/G$ 的增加而增加，因此 KAM 环面存在的条件必须是充分小的扰动。条件(1)和(3)也意味着适度非线性这一条件。如果定理的条件都被满足，则一个扭映射的圆象图8.15那样扰动成一个近似圆，并不改变其拓扑结构，这便是 KAM 环面与截面的交。

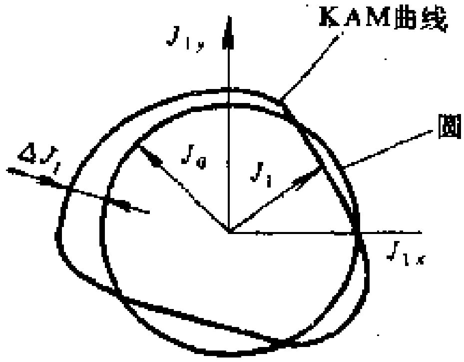


图 8.15 扰动后的曲线位于未受扰的曲线附近

现在我们来指出证明 KAM 定理的困难。考虑一个二自由度的受扰扭映射。受扰后的轨迹与截面的相继交点（见图 8.15）由一对差分方程来表示，它们依据前一次相交时截面变量 J_1 和 θ_1 的值给出 J_1 和 θ_1 的新值。按照假设的不变量曲线（8.7.3 a），J_1 的差分方程具有如下形式

$$J_1(\theta_1+2\pi\alpha)=J_1(\theta_1)+v(\theta_1) \tag{8.7.4}$$

它可以通过对 θ_1 的 Fourier 展开来求解

$$J_1(\theta_1)=\sum a_k\exp(ik\theta_1),\quad v(\theta_1)=\sum b_k\exp(ik\theta_1) \tag{8.7.5}$$

因为我们需要根据 b_k 来表示 a_k，所以

$$J_1(\theta_1+2\pi\alpha)-J_1(\theta_1)=\sum a_k[\exp(ik2\pi\alpha)-1]\exp(ik\theta_1) \tag{8.7.6}$$

因此系数 a_k 为

$$a_k=\frac{b_k}{\exp(ik2\pi\alpha)-1} \tag{8.7.7}$$

虽然 a_k 不象 b_k 那么快趋于零，并且它在 α 为有理数时无定义。这也恰是阻止摄动理论收敛的零分母问题。如果 α 是 J_1 的函数，则 J_1 的值必须这样选择以使分母不为零。这就需要一个适当修改的展开方法和 b_k 足够快的减小。下面我们讨论证明的思路，实际的证明十分复杂，可参看参考文献。证明的基本方法是：在每一步展开过程中变化初始条件以保持离所有的共振足够远，因而展开可以进行到下一步。

1. 线性独立性或充分非线性性

我们已经看到，如果在未受扰系统的两个自由度之间存在着共振，那么由扰动引入的相轨迹在此共振的邻域会发表畸变。假如未受扰频率是作用量的函数，那么作用量的有效变化通常扰动系统离开共振并限制作用量的偏移。如果受扰后的作用量 J 的偏移远小于未受扰的作用量 J_0，则 KAM 不变量曲线可能存在，它接近未受扰的不变量 $J=J_0$。这便是式（8.7.1）给出的线性独立要求 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}\neq0$ 的意义，它保证了式（8.7.3 a）中当 $\varepsilon\to0$ 时，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)\to0$

下面来计算频率的线性独立性条件。为了简单起见，仅考虑二自由度系统。假设频率由 $\omega_1(J_1,J_2)$ 和 $\omega_2(J_1,J_2)$ 由下式联系

$$f(\omega_1,\omega_2)=0$$

对上式微分，有

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial\omega_1}\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial J_1}\mathrm{d}J_1+\frac{\partial\omega_1}{\partial J_2}\mathrm{d}J_2\right)+\frac{\partial f}{\partial\omega_2}\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial J_1}\mathrm{d}J_1+\frac{\partial\omega_2}{\partial J_2}\mathrm{d}J_2\right)=0$$

它对任意的 $\mathrm{d}J_1$ 和 $\mathrm{d}J_2$ 成立，因此

$$\boldsymbol{\omega}_J\cdot\boldsymbol{f}_\omega=\begin{bmatrix}\frac{\partial\omega_1}{\partial J_1} & \frac{\partial\omega_1}{\partial J_2}\\ \frac{\partial\omega_2}{\partial J_1} & \frac{\partial\omega_2}{\partial J_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial\omega_1}\\ \frac{\partial f}{\partial\omega_2}\end{bmatrix}=0 \tag{8.7.8}$$

若 $\det\boldsymbol{\omega}_J\neq0$，则唯一解为 $\boldsymbol{f}_\omega=0$。于是，对所有的 $\boldsymbol{J}$，下面的关系就不可能成立

$$f=m_1\omega_1+m_2\omega_2=0 \tag{8.7.9}$$

因此，频率线性独立（非线性依赖）的必要条件便是

$$\det\boldsymbol{\omega}_J\neq0 \tag{8.7.10}$$

这是经常引用的条件。

对于给定的共振，可以使用一个具有更少限制的条件。它只需要频率在 J 的实际变化方向上不是常数。考虑如下二自由度系统

$$H=H_0(J_1,J_2)+\epsilon\sum_{l,m}H_{l,m}(J_1,J_2)\exp[\mathrm{i}(l\theta_1-m\theta_2)] \tag{8.7.11}$$

选择一个特殊共振 $l=r$，$m=s$ 和 $\omega_2/\omega_1=r/s$，由 Hamilton 方程可知 $\frac{\mathrm{d}J_1}{\mathrm{d}J_2}=-r/s$。共振时 $f=r\omega_1-s\omega_2=0$，故 $\mathrm{d}f=0$。考虑到 $\frac{\partial f}{\partial\omega_1}=r$，$\frac{\partial f}{\partial\omega_2}=-s$，则共振的必要条件为

$$r^2\frac{\partial^2H_0}{\partial J_1^2}-2rs\frac{\partial^2H_0}{\partial J_1\partial J_2}+s^2\frac{\partial^2H_0}{\partial J_2^2}=0$$

因此，要避开此共振，则只需满足非线性性条件

$$r^2\frac{\partial^2H_0}{\partial J_1^2}-2rs\frac{\partial^2H_0}{\partial J_1\partial J_2}+s^2\frac{\partial^2H_0}{\partial J_2^2}\neq0 \tag{8.7.12}$$

它也是 KAM 定理证明中用到的非线性性的充分条件。对于任意

自由度系统，Chirikov 找到类似的条件[14]

$$m_i \frac{\partial^2 H_0}{\partial J_i \partial J_j} m_j \neq 0 \tag{8.7.13}$$

实际上，用长期振动理论也可以推证得到式（8.7.12）这样的结论。取母函数为

$$F_2 = (r\theta_1 - s\theta_2)\hat{J}_1 + \theta_2 \hat{J}_2 \tag{8.7.14}$$

对 Hamilton 函数（8.7.11），可以象式（8.5.6）那样得到新的变量。象 §8.5 那样关于作用量的共振值展开，并对快变量取平均，可以得到 ϵ 的最低阶

$$\Delta \hat{H} = \frac{\partial^2 \hat{H}_0}{\partial \hat{J}_1^2} \frac{\Delta \hat{J}_1^2}{2} + 2\epsilon H_{rs} \cos\hat{\theta}_1 \tag{8.7.15}$$

这里为了方便起见，我们选择 H_{rs} 是实数。若 $\frac{\partial^2 \hat{H}_0}{\partial \hat{J}_1^2} = 0$，则非线性只出现在更高一阶，并且分界线的宽度也不限制在 $\epsilon^{1/2}$ 阶。因此我们得到与式（8.7.12）等价的非线性条件

$$G = \frac{\partial^2 \hat{H}_0}{\partial \hat{J}_1^2} \neq 0 \tag{8.7.16}$$

这一条件将偶然退化$\left(\frac{\partial^2 \hat{H}_0}{\partial \hat{J}_1^2} \neq 0\right)$或强非线性系统与内在退化$\left(\frac{\partial^2 \hat{H}_0}{\partial \hat{J}_1^2} = 0\right)$或弱非线性系统分开了。对于偶然退化系统，KAM 定理所需的非线性条件是满足的。这可以通过展开式（8.7.16）

$$\frac{\partial^2 \hat{H}_0}{\partial \hat{J}_1^2} = \frac{\partial}{\partial \hat{J}_1}\left(\frac{\partial H_0}{\partial J_1}\frac{\partial J_1}{\partial \hat{J}_1} + \frac{\partial H_0}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \hat{J}_1}\right) \neq 0 \tag{8.7.17}$$

考虑到 $\frac{\partial J_1}{\partial \hat{J}_1} = r$ 和 $\frac{\partial J_2}{\partial \hat{J}_1} = s$，由式（8.7.17）我们可以得到式（8.7.12）。

对于固定的 ϵ，所需的非线性性 G 可以从图 8.15 中估测，即作用量的偏移 ΔJ_1 应该远小于未扰作用量 J_0。分界线的整个宽度为 $\Delta J_1 = r\Delta \hat{J}_1$，考虑到式（8.7.15），有

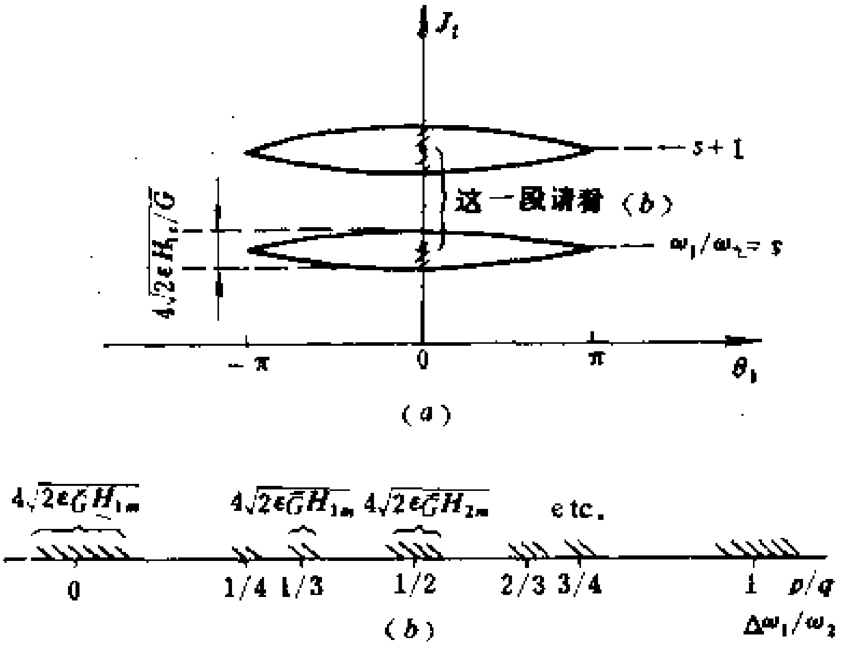


图 8.16 (a)光滑条件。被用来检验次共振的主共振之间区域。(b)两个主共振之间的作用量区域利用 $\Delta\omega=G\Delta J$ 转化成频率 R 度。次共振由阴影线表示，当充分光滑时，次共振是孤立的。

$$4r\left(\frac{2\varepsilon H_{rs}}{G}\right)^{1/2}\ll J_0$$

或者

$$G\gg\frac{32r^2\varepsilon H_{rs}}{J_0^2} \tag{8.7.18}$$

对于内在退化，线性独立条件（8.7.10）不满足。研究发现，KAM理论的结构（不变量曲线，岛等）对于这类系统的存在与否要视具体情况[3]。

2. 光滑条件

关于摄动项的光滑（连续导数的阶数）的一个必要性条件可以通过注意到KAM曲线只在离开所有的岛扰动才存在这一事实来获得。如果两个低阶共振之间的岛充满它们之间的整个相空间，那么结论显然是KAM曲线不存在。我们还是讨论二自由度系统。考虑Hamilton函数（8.7.11）。为了明瞭起见，选择

$\omega_1/\omega_2=s$，并且 H_0 线性地依赖于 J_2，因此当 J_1 变化时相邻的主共振可以通过 $\delta\omega_1=\omega_2$ 分离开。这里 ω_2 是常数，独立于 J_1 和 J_2，如图 8.16(a)。在这对主共振之间是具有值 $\omega_1/\omega_2=s+p/q$（p、q 是整数，$p<q$）的次共振的总和。在式（8.7.11）中令 $l=q$，m 取遍次共振的所有整数

$$m(p,q)=p+sq \tag{8.7.19}$$

利用对每个共振分界线宽度 $\Delta\hat{J}_1$ 的值（8.5.31），有

$$\Delta\hat{J}_1=4\left(\frac{2\varepsilon H_{qm}}{G}\right)^{1/2}$$

以及定义 $\Delta J_1=q\Delta\hat{J}_1$ 和 $G=q_2\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial J_1^2}=q^2\bar{G}$，则

$$\sum\Delta J_1=4\left(\frac{2\varepsilon}{\bar{G}}\right)^{1/2}\sum_{p,q}H_{qm}^{1/2} \tag{8.7.20}$$

这里是对所有次共振取和。根据频率变化

$$\Delta\omega_1=\frac{\partial\omega_1}{\partial J_1}\Delta J_1=\bar{G}\Delta J_1 \tag{8.7.21}$$

二阶岛宽度的总和，即图 8.16(b)的阴影线部分与主共振岛之间距离的比值为

$$\frac{\sum\Delta\omega_1}{\delta\omega_1}=\frac{4(2\varepsilon\bar{G})^{1/2}}{\omega_2}\sum_{p,q}H_{qm}^{1/2} \tag{8.7.22}$$

若对受扰的 Hamilton 函数指定一个光滑度，例如 M 阶连续导数，那么因为 m 是 q 的线性函数，Fourier 振幅对大的 q 下降为

$$H_{qm}\sim\frac{A_0}{q^{M+2}} \tag{8.7.23}$$

其中 A_0 是一个常数。将式（8.7.23）代入式（8.7.22），并注意到

$$\sum_{p}H_{qm}^{1/2}\sim qH_{qm}^{1/2} \tag{8.7.24}$$

便得到

$$\frac{\sum\Delta\omega_i}{\delta\omega_1}\sim\frac{4(2\varepsilon\bar{G}A_0)^{1/2}}{\omega_2}\sum_{q=1}^{\infty}q^{-M/2} \tag{8.7.25}$$

式（8.7.25）的求和对于$M>2$收敛于一个正数σ。因此，独立于求和前面的系数，我们得到KAM曲面存在的一个重要条件，即连续导数的阶数M满足

$$M>2$$

可以将$M>2$这个结果与实际的KAM条件（8.7.2）相比较。将式（8.7.2）对二自由度改写为

$$\left|\frac{\omega_1}{\omega_2}-\frac{r}{s}\right|>\gamma s^{-(\tau+1)} \tag{8.7.26}$$

图8.16(*b*)中阴影部分长度的总和，也就是在$0\leqslant\frac{\Delta\omega_1}{\omega_2}\leqslant1$中所有使式（8.7.26）不成立的区间长度的总和$L$可以通过给式（8.7.26）乘以$s$并对$s$取和而得到，即

$$L<\gamma\sum_{s=1}^{\infty}s^{-\tau} \tag{8.7.27}$$

比较式（8.7.27）与(8.7.25)，可以认为$\tau=M/2$。从式(8.7.27)也可看出当$\tau>1$时，$\sum\limits_{s=1}^{\infty}s^{-\tau}=\text{const.}$，这与$M>2$相一致。此外显然$\gamma=\gamma(\varepsilon)$并且当$\varepsilon\to0$时，$\gamma\to0$。所以，式（8.7.27）表明使式（8.7.26）成立的频率比即使在受扰后仍具有非零测度$1-\text{const.}\gamma(\varepsilon)$。

现在，研究者们已经证明，对于二自由度系统，$M\geqslant3$是KAM曲面存在的充分条件，而必要条件只需$M\geqslant2$[15]。对于n个自由度系统，Chirikov证明必要条件为[14]

$$M\geqslant2n-2$$

而Moser曾给出过一个严格的充分条件[16]

$$M\geqslant2n+2$$

并且还要求当 ϵ 趋于零时亦为零的 γ 必须选择得充分小。

3．充分无理性和适度非线性

假设式(8.7.25)的和收敛于 σ，我们看到如果 $\alpha=\omega_1/\omega_2$ 落到图 8.16(b)的阴影线区域里，则 KAM 环面不存在。因为这些区域的宽度正比于 $(\epsilon\bar{G})^{1/2}$，并且当 q 增加时减小，这表明存在着这样一个条件，它要求 α 必须离有理数 p/q 足够远。对于很小的 ϵ，这个条件容易满足，但当 ϵ 增加时，只有对那些最难以有理数近似的无理数才能得出 KAM 环面。随着 ϵ 的增大，扰动 ϵH_1 将破坏所有的环面，最后被破坏的 KAM 环面是频率比为"最坏无理数" $\omega_1/\omega_2=(\sqrt{5}-1)/2$。

令式(8.7.25)的左边等于 1，则得到

$$4(2\epsilon\bar{G}A_0)^{1/2}\lesssim\frac{\omega_2}{\sigma}\qquad(8.7.28)$$

这便是上面提到的充分小的 ϵ 必须满足的条件。并且当固定 ϵ 时，也是充分小非线性性条件。联合式(8.7.18)与(8.7.28)，可以得到适度非线性性条件

$$\frac{32\epsilon A_0}{J_2^2}<\bar{G}<\frac{\omega_2^2}{32\epsilon A_0\sigma^2}\qquad(8.7.29)$$

其中我们在式(8.7.18)中用到了 $(r^2/q^2)H_{rs}\sim A_0$ 这个条件。

KAM 定理的一般证明需要选择极小的 ϵ 值以保证对于一个给定的共振，扰动幅度 ϵH_{lm} 足够小。

综上所述，对于二自由度的保守稳定 Hamilton 系统，KAM 定理可以简单地表述成如下形式。

定理 如果二自由度的保守稳定 Hamilton 系统的频率的 Jacobi 矩阵行列式不为零，即

$$\left|\frac{\partial\omega_i}{\partial J_j}\right|=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\omega_1}{\partial J_1} & \dfrac{\partial\omega_1}{\partial J_2}\\ \dfrac{\partial\omega_2}{\partial J_1} & \dfrac{\partial\omega_2}{\partial J_2}\end{vmatrix}\neq 0\qquad(8.7.30)$$

那么其频率比 ω_2/ω_1 是充分无理性，使得

$$\left|\frac{\omega_1}{\omega_2}-\frac{r}{s}\right|>\gamma(\epsilon)s^{-2.5}, \qquad (\gamma(\varepsilon\to 0)\to 0) \qquad (8.7.31)$$

成立的环面（这里 r 和 s 是互质整数），在 $\epsilon\ll 1$ 的限制下，经扰动 ϵH_1 后仍是稳定的。

8.7.2 有理旋转数和 Poincaré-Birkhoff 定理

我们继续考察受扰扭映射。已经看到，当无理数曲面距有理数 $\alpha=r/s$ 足够远时，KAM 定理告诉我们曲面将保持其拓扑结构，只是由未受扰的曲面略加变形。但是，对于有理数曲面 $\alpha=r/s$ 及其邻域，KAM 定理不成立。下面讨论旋转数 $\alpha=\omega_1/\omega_2$ 为有理数的情形。我们将会看到在这种情况下，原先的环面将会分解为越来越小的环面，依据 KAM 定理这些新产生的环面中有一些是稳定的。然而在这些稳定的环面间，运动是混沌的。

1. Poincaré-Birkhoff 定理[17]

考虑扭映射 T，对于频率比为有理数 $\alpha(J_0)=r/s$，半径为 J_0 的圆上的每一点 θ_0 将是 T^s 的一个固定点，即周期为 s 的映射的固定点。这是因为

$$T^s\begin{pmatrix}J_0\\ \theta_0\end{pmatrix}=\begin{cases}J_0\\ \theta_0+2\pi\dfrac{r}{s}\cdot s=\theta_0+2\pi r\end{cases} \qquad (8.7.32)$$

如果 H_0 受到小扰动 ϵH_1，则扭映射成为受扰扭映射

$$\left.\begin{aligned}J_{n+1}&=J_n+\epsilon f(J_n,\theta_n)\\ \theta_{n+1}&=\theta_n+2\pi\alpha(J_n)+\epsilon g(J_n,\theta_n)\end{aligned}\right\}\equiv T_\epsilon^s\begin{pmatrix}J_n\\ \theta_n\end{pmatrix} \quad (8.7.33)$$

根据 Liouville 定理，映射 T_ϵ 是保面积的。对于 T_ϵ 来说，其固定点有什么特点，下面的 Poincaré-Birkhoff 定理给出答案。

Poincaré-Birkhoff 定理 对于受扰扭映射 T_ϵ^s，具有 s 的偶数乘积个，即 $2ks$（$k=1,2,\cdots$）个固定点。

这个定理很容易证明，下面我们用图对证明做一个概述。为

了确定起见，假设 $\alpha(J)$随着 J 的增加而增加(硬弹簧)。

考虑两个圆 C_+ 和 C_-，处在它们之间的圆是 C，在其上 $\alpha=r/s$，而在圆 C_+ 上 $\alpha>r/s$，在圆 C_- 上 $\alpha<r/s$。因此 T^s映射 C_+ 逆时针转，C_- 顺时针转，而 C 则不动。

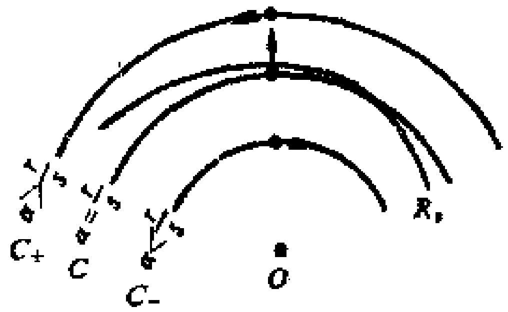


图 8.17 T^s 和 T^s_ϵ 对 C_+ 和 C_- 的作用

在受扰扭映射 T^s_ϵ 下，如果 ϵ 足够小，则这种扭转性质仍将保持。因此，在任何一条从 0 开始的半径上必定有一点，它的角坐标经过受扰扭映射 T^s_ϵ 后保持不变，这些沿着径向被映射的点组成了一条接近 C 的曲线 R_ϵ。

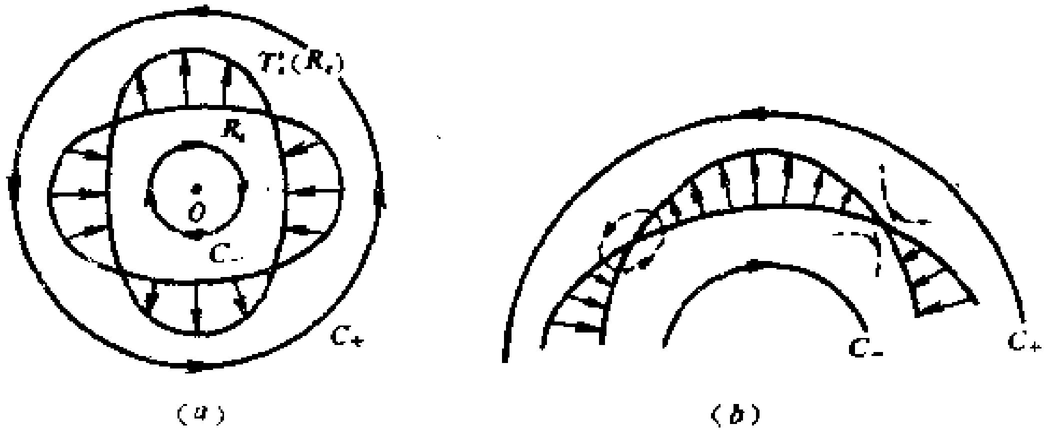


图 8.18 (a)被沿径向映射的点 R_ϵ 和其象点 $T^s_\epsilon(R_\epsilon)$曲线，(b)交替出现的 T^s_ϵ 的椭圆和双曲固定点

曲线 R_ϵ 以及其象点组成的曲线 $T^s_\epsilon(R_\epsilon)$如图 8.18 (a) 所示。考虑到映射的保面积特性，这两条曲线包围的面积必须相等，而这只有在两条曲线相交偶数次时才可能。这偶数个交点当叠代 s 次后仍回到原先的位置，因此它们是映射 $T^s_\epsilon(R_\epsilon)$ 的固定点。所

以，对偶数次相交，必有 $2ks$ 个这样的点，这些点被称作 Poincaré-Birkhoff 固定点。Poincaré-Birkhoff 定理没有对整数 k 的值作说明，一般取 $k=1$。继续的观察可以看到共有两种形式的固定点，即椭圆点和双曲点，它们交替出现。规则相轨迹环绕椭圆固定点，而分界线则联接双曲点。对于小扰动，共振曲线上交替出现的椭圆和双曲奇异点是系统的一般特性。这表明原先的具有有理频率的环面在扰动下并没有完全破坏，还保留了偶数个固定点。

2．椭圆点

通过向固定在椭圆奇点的坐标系的变换，我们已在§8.5中发现过在相平面中有秩序的相继更小的规则运动区域。实际上，关于一个固定点邻域的椭圆轨道的详细研究可以发现一组高阶共振，或固定点。它们有着自己的运动，这些运动和以前分析的运动完全相似，只是运动发生在更细微的范围内。如果从可积系统到受扰系统的扰动很小，则大部分空间中充满和可积曲线拓扑相似的 KAM 曲线。在剩余的围绕着椭圆固定点的拓扑形态被改变的空间区域，新的更小的 KAM 曲线存在，它们填充了更大部分的剩余空间。但是，整个空间是否充满着在越来越小的范围内越来越复杂的 KAM 曲线，直到随着扰动的增加而破坏整个结构使之成为混沌呢？不会的。混沌区域一般在分界线的邻域内（双曲奇点），并且这些混沌区域随着扰动幅度的增加而增大。

综上所述，包围着椭圆固定点的一些环面根据 KAM 定理是稳定的，而另一些依据 Poincaré-Birkhoff 定理可以分解成更小的环面。这一方法可以不断重复。也就是说，这些更小环面中的一些环面根据 KAM 定理也是稳定的，而另一些环面依据 Poincaré-Birkhoff 定理分解成更为小的环面。如此不断重复，使出现了图 8.19 给出的自相似结构。

3．双曲点

在双曲奇点，四条曲线相交，即两条进来的分界线轨迹 H^+

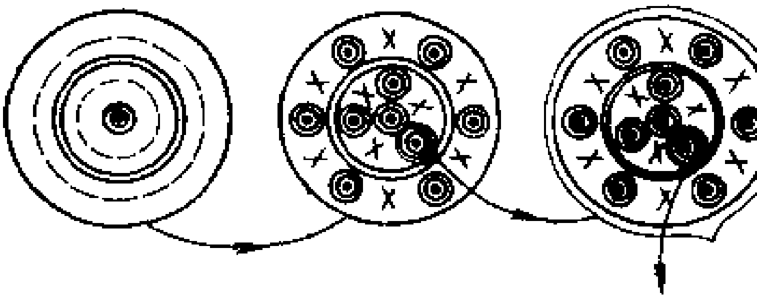


图 8.19 具有有理数频率比的环面退化为越来越小的环面。新产生的椭圆和双曲固定点的图形表现出自相似性

和两条出去的分界线轨迹 H^-。H^- 上的一点 $\boldsymbol{x}$ 经过重复的变换 $T^n\boldsymbol{x}$，并且 n 趋于无穷大，将使 $\boldsymbol{x}$ 被映射到奇点。而当 $\boldsymbol{x}$ 在 H^- 上时，则逆变换 $\lim\limits_{n\to\infty}T^{-n}\boldsymbol{x}$ 将 $\boldsymbol{x}$ 变换到奇点。因为分界线上轨迹的周期是无穷大，因而 $\boldsymbol{x}$ 向奇异点的运动当接近双曲点时十分慢。

在接近双曲点的邻域里，轨迹被强迫离开双曲点，这和绕椭圆定点的稳定转动形成鲜明对比。

现在来考虑同侧的联接相邻的双曲奇点的分界线。离开一个双曲点的 H^- 曲线与到达另一个双曲点的 H^+ 曲线要相交，而不象一维振子那样光滑地联接。这个交点称作同宿点，因为它联接了在拓扑上是同样的进入和离开双曲点的轨迹。如果存在一个交点，很容易证明还有无穷多个交点，它们也是同宿点。这是由于映射 T_ε^s 是连续的，而一个同宿点不是固定点。重复应用 T_ε^s 则可以产生新的同宿点。此外，T_ε^s 必须应用无穷多次才能沿着 H^+ 到达双曲固定点，因此在相邻的双曲点之间，共有无穷多个同宿点。

这种非常复杂的运动可以通过图 8.20 看得更清楚一些。考虑双曲点和它的 T_ε^s 映射。H^+ 和 H^- 轨迹在同宿点 $\boldsymbol{x}$ 相交，经 T_ε^s 映射为新的交点 $\boldsymbol{x}'$，然后又映射为 $\boldsymbol{x}''$，…。这里 $\boldsymbol{x}''$ 与 $\boldsymbol{x}'$ 之间的距离要小于 $\boldsymbol{x}'$ 与 $\boldsymbol{x}$ 的距离。因为由交点包围的面积（图中阴影部分）由于 T_ε^s 的保面积性必须是等面积的，所以 H^- 在 $\boldsymbol{x}''$ 和 $\boldsymbol{x}'$ 之间振荡的幅度要大于在 $\boldsymbol{x}'$ 和 $\boldsymbol{x}$ 间振荡的幅度。相继的相

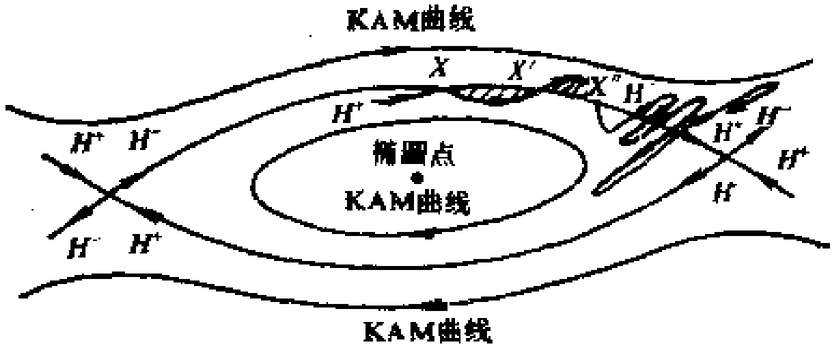


图 8.20 同宿点在形成近分界线混沌区域的效果

交越来越接近，同时振荡越来越大。轨道在同宿点的相交表明在这些点KAM环面不存在，由于相应的轨迹在这里改变了其拓扑结构。因此双曲点邻域的运动是混沌的。但对于很小的扰动来说，所有这些极其复杂的性态只出现在被KAM曲线包围的相空间区域内，就象图8.20所示的那样。

8.7.3 非线性映射的整体描述

现在我们来描述映射的完整特性，即二自由度耦合非线性振子的截面。考虑一适度的耦合项，以便使那些没有耦合时的 J 为常数的曲面在出现耦合后仍保持为KAM曲面。具体地说，我们取在截面中的振子是弱弹簧类型，即 $d\omega_1/dJ_1<0$，并且为了确定起见，令 $J_1=0$ 处 $\alpha=\omega_{01}/\omega_{02}=1/\pi$。当 J_1 向外增加时，ω_1 减小，直到第一组重要的共振在 $\omega_1=\omega_2/4$ 处出现，在截面里给出一个四个岛的链。这些岛轨迹的计算已经在§8.5中给出过。根据前面的讨论知道，椭圆和双曲固定点交错环绕着不变的 J 曲面，这也是我们从§8.5的展开中得到的结论。在接近双曲点处，同宿点的存在保证了混沌运动区域被具有较大和较小 J_1 的KAM曲面包围。继续增大 J_1，我们碰到另一组重要的共振在 $\omega_1=\omega_2/5$，它给出一个五个岛的链。随着 J_1 的继续增大，出现六个岛的链，七个岛的链等等。必须记住在每两组主要共振之间，在所有有理数处，还存在着无穷多个中等的共振。但是正如

在§8.5中看到的，这些共振具有很快减小的振幅。例如在$\alpha=\frac{1}{4}$和$\alpha=\frac{1}{5}$之间$\alpha=\frac{2}{9}$的共振，即$r=2$，$s=9$。由式（8.5.31）有

$$\Delta\hat{J}_r\sim\left|\frac{\varepsilon H_{r,-s}}{\frac{\partial^2\hat{H}_0}{\partial\hat{J}_1^2}}\right|^{1/2} \tag{8.7.34}$$

这里$H_{r,-s}$是近似共振谐波的Fourier系数。在§8.5中我们已知

$$H_{r,-s}(\max)\approx\mathscr{J}_s(\pi) \tag{8.7.35}$$

其中$\mathscr{J}_s$是普通Bessel函数。因此$s=9$和$s=5$岛振动的振幅的比大约为

$$\frac{\Delta J(s/r=9/2)}{\Delta J(s/r=5)}\approx\left[\frac{\mathscr{J}_9(\pi)}{\mathscr{J}_5(\pi)}\right]^{1/2}\approx0.1 \tag{8.7.36}$$

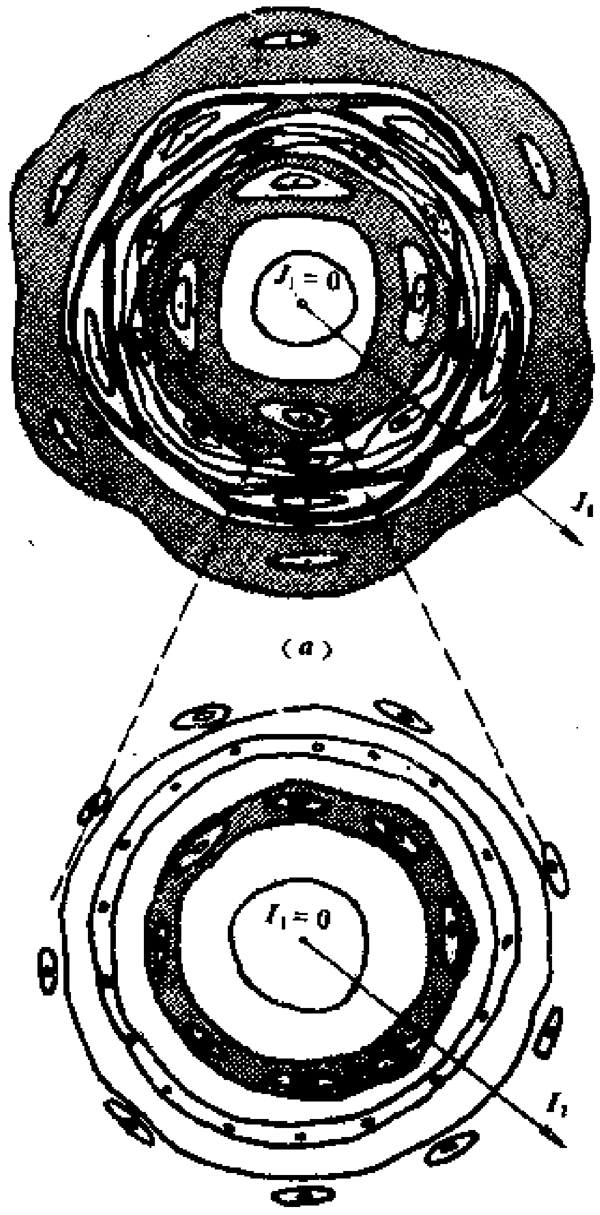
因此，当主共振适度时，相应的r的更高阶谐波十分小。

根据以上的讨论，我们可以画出映射的草图（图8.21）。图中实线代表KAM曲面。围绕着椭圆固定点的实线可以用§8.5中的长期摄动理论作近似计算。对于接近分界线的轨迹，不存在不变量，因此轨迹是充满整个面积的。这样的轨迹在图中表示为阴影部分，它包围着不同的岛链，但被KAM曲线限制在J_1的偏移内。在$\alpha=1/4$和$\alpha=1/5$岛链间存在着$\alpha=2/9$很小的，但却可以看见的岛链。当然还有其它基本的分数岛链$\alpha=r/s$没在图上表出，原因是或者幅度太小在图示范围内难以分辨，或者被嵌入图中阴影区域而给出完全的混沌运动。

下面讨论在扩展一个岛链中的单个岛时会出现的情况。在图8.21(b)中对一个岛链中的单个岛进行了扩展。象§8.5中那样，首先变换到新的变量$\hat{J}_1,\hat{\theta}_1$，引进新的作用量

$$I_1=\frac{1}{2\pi}\oint\hat{J}_1\mathrm{d}\,\hat{\theta}_1 \tag{8.7.37}$$

相应于环绕一个给定α的椭圆奇点的闭曲线，这将把此岛变换到



(b)

图 8.21 一个具有相对较大扰动的 Hamilton 系统的规则和随机轨迹
(a)近主要固定点。(b)近二阶固定点的扩展图（归圆化）

一个单独的同心圆集合。然而，围绕固定点的局部变换与基频的共振产生了二阶岛链，它们又改变了这些新的圆。在 § 8.5 中我们已经计算过这些二阶岛。定性地说，二阶岛的振幅与其间隔之

比相对一阶岛链来说十分小。这里我们选择的还是相对大的扰动例子。对于十分小的一阶岛链来说，二阶岛链即使在扩大以后亦看不见。也就是说对这种尺度来说，岛的宽度不可分辨，观察到的是相邻的岛共振的整体。

我们可以通过如下的次序来看一个映射：把一个点放在映射的任何地方；放大环绕此点的区域直到整个结构可以看见。对于足够小的对可积系统的扰动，此点在KAM曲线上出现的几率很大，尽管在它周围将存在接近岛链的混沌区域。现在重复上述步骤，将一个点随机地放在扩展后的映象截面上，然后重复扩展直到下一阶的细节在其邻域中可以看见。经过这个扩展，呈现混沌的空间更少，而此点在一条不变量曲线上出现的可能性增大。重复这样的步骤，混沌区域占整个空间的部分将指数性减小，并且点落在不变量曲线上的几率按指数规律趋于1。但是，在任何一次这样的步骤中，点都具有有限的几率落在混沌区域。一旦发生这种情况，我们就有可能扩展混沌区域直到它充满了整个可观察的区域，并且其后的所有扩展都将只得出随机轨迹。

综上所述，如果我们对相空间里环面上的可积系统加上一个不可积的扰动时，依赖于不同的初始条件，ω_1/ω_2的值不同，于是可能出现规则或混沌运动的结果。所以，任意小的初始条件的变化都可能导致完全不同的长期特性。

8.7.4 Arnold扩散

到目前为止，我们只讨论了两个自由度系统，对它来说二维的KAM环面把三维的等能面分层，把其划分为不连通的区域。因此，三维的混沌运动被KAM环面包围着，不会扩散到环面外面去。KAM环面对不稳定的混沌轨道的包围，对不稳定的混沌运动起了一种稳定性的作用。混沌运动在相空间的每一局部是不稳定的，但在被包围在KAM环面内这一意义上是整体稳定的。

关于二自由度系统的KAM理论，可以容易地推广到三自由

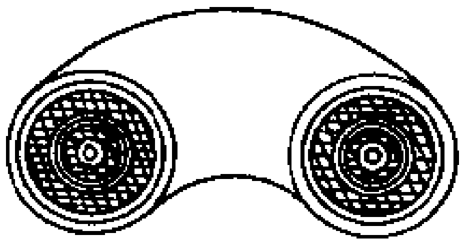


图 8.22 二自由度系统稳定的KAM环面之间被分隔的混沌轨道。(阴影部分代表混沌轨道)

度以及三个以上自由度系统，只是在后一种情况下，KAM环面不再约束混沌轨道了，而出现了Arnold扩散现象。n自由度系统的相空间是$2n$维的，等能面是$2n-1$维的，混沌运动占据的空间也是$2n-1$维的，而KAM环面是n维的。n维的环面只能包围$n+1$维的空间。所以KAM环面能约束混沌运动的条件是

$$2n-1=n+1 \qquad (8.7.38)$$

即

$$n=2 \qquad (8.7.39)$$

当$n\geqslant 3$时，KAM环面不再能限制混沌运动的扩散，这种扩散称作Arnold扩散。$2n$维相空间中共振面是$2n-1$维的，它与

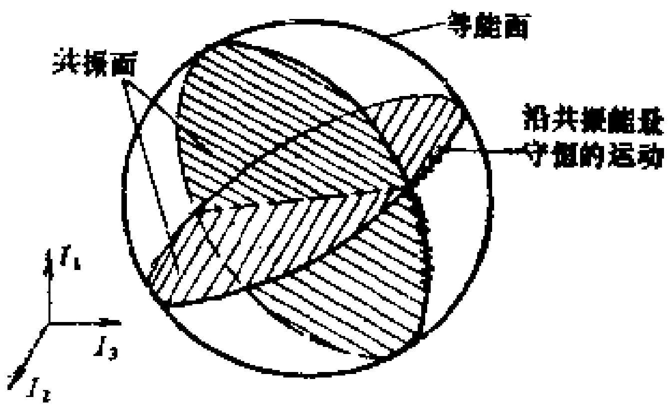


图 8.23 Arnold扩散

三个自由度作用空间中两个共振面的相交，使得沿一个共振面向另一个共振面的能量守恒运动成为可能

等能面的交集是 $2(n-1)$ 维的。因此等能面上的不同共振面必然互相相交，形成一个网络，称为 Arnold 网络。共振面邻域的混沌运动就沿着 Arnold 网络扩散到几乎整个等能面上。因此，对于二自由度以上的 Hamilton 系统来说，对受扰运动存在的 KAM 不变量环面并不能保证系统运动的稳定性。因为蜿蜒的混沌轨道并没有限制在无限接近于环面[18]。

8.7.5 数值例子

我们给出一个 Hamilton 系统数值计算的例子。不可积的 Hénon - Heiles 系统的 Hamilton 函数为[19]

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 = E \tag{8.7.40}$$

其中

$$H_0 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) \tag{8.7.41}$$

$$\varepsilon H_1 = q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3 \tag{8.7.42}$$

这里为了方便起见，质点的质量已归一化，并且小参数 ε 由能量的选择来确定，即 $\varepsilon \sim E$。对于不同的能量，数值计算的结果可参看 Gustavson 1966 年绘制的 Hénon–Heiles系统的 Poincaré 映象图[3,20]。

数值计算表明对于能量足够小，截面的交点对于除了接近共振以外几乎所有初始条件都是封闭曲线。例如，$E=1/24$ 和 $E=1/12$，不变量曲线在截面各处都存在，运动几乎完全是规则的。事实上，除了这些不变量曲线外，非常薄的混沌层稠密地分布在整个截面。但是这些层的厚度随着 E 的减小指数性地减小，因此对于 $E=1/24$ 和 $E=1/12$ 这样很小的 E 值，这些混沌层只占整个截面面积的很小一部分，甚至看不出来。对于比较大的初始能量 $E=1/8$，则是规则运动和混沌运动共存，即有不变量曲线，又有明显的各态历经轨道，浑沌海中漂着一些规则岛。当 $E=1/6$ 时，大多数不变量曲线已被破坏，运动几乎全是随机

的。图上所有点代表了系统的一条轨迹与截面的交点，显然其大部分是混沌运动，不变量曲线仅占极小部分。

由此例可以看到，随着扰动的增加，系统由局部混沌向整体混沌过渡。

§8.8 历史资料

8.8.1 名家介绍

V.I. Arnold (В.И. Арнольд) (1937—) 苏联数学力学家。莫斯科大学教授，苏联科学院院士。他在现代微分几何，微分方程以及现代力学等许多方面都有杰出贡献。其代表作为《常微分方程》(1974)，《常微分方程续论——常微分方程的几何方法》(1978)，以及《经典力学的数学方法》(英译本，1978) 等等。前两本书是用现代大范围分析的观点阐述常微分方程基本问题的颇有影响的著作。后一本书则是二十世纪一般力学的经典之作，被誉为经典力学的三本“圣经”之一。

G.D. Birkhoff (1884—1944) 美国数学家。1896 年到 1902 年就读于芝加哥的 Lewis 学院，1905 年在哈佛大学获文学士学位，1907 年在芝加哥大学获得哲学博士学位，1919 年成为哈佛大学教授。他是当时在美国和全世界享有盛誉的著名美国数学家，1925 年当选美国数学学会的主席。他对数学的许多方面都有杰出贡献。代表作为《基础几何》(1940)，《动力系统》(修订版，1960)。他的工作收集在由美国数学学会编的 3 卷本的《George David Birkhoff 数学著作集》(1950)。

A. H. Колмогоров (1903—) 苏联数学家。毕业并曾长期任教于莫斯科大学，1939 年当选苏联科学院院士，是《概率论和数理统计》杂志的主编。社会主义劳动英雄，1941 年获国家奖金，1965 年获列宁奖金。主要论著有《概率论的基本概念》

(1939)，《函数理论与泛函分析基础》（1972）等。他于1954年在国际数学大会的报告《动力系统和经典力学的一般理论》一文中首次提出后来被称之为“KAM定理”的著名定理。

J. K. Moser（1928— ） 美国数学力学家。1928年7月4日生于德国Königsberg。毕业于哥廷根大学。曾在纽约大学、麻省理工学院等校任数学教授。美国科学院院士。主要著作有：《天体力学讲座》（与C. L. Siegel合著）（1971），《动力系统的平稳和随机运动》（1973）等。

8.8.2 关于Hamilton系统的混沌

Hamilton力学的混沌研究起因于人们对具有慢变参数的振子以及弱耦合振子的动力学特性的深入研究。它是非线性力学迅速发展并在科学与技术各领域具有大量应用的新领域。尤其对天体力学、统计力学等具有重大影响。尽管其基础可以追溯到上世纪Poincaré等人试图建立的行星轨道的非线性摄动理论，但大量的数学结果却都是本世纪60年代以后取得的。高速计算机的数值模拟推进了这一领域的研究。在本章，我们仅就Hamilton系统的混沌理论中一些必不可少的概念，最基本的一些研究方法和最基础的理论结果进行了一些概括，作为进入这一领域的入门知识。本章把注意力集中于研究相空间中规则运动与随机运动共存的情况。我们知道，随着扰动强度ϵ的增大，KAM环面会逐个地破缺，使得混沌轨道扩散到越来越大的相空间，这种从局部混沌向整体混沌的过渡具有很多判据。此外，在整体混沌区域，运动的研究具有本质的区别，必须使用统计学的研究方法等等。这些问题都是Hamilton系统混沌理论的重要内容，而我们限于篇幅均未提及。有兴趣的读者可参看Lichtenberg与Lieberman合著的《规则与随机运动》一书，这是该方面比较完整的一本专著。本章未涉及的一些其它的研究方法如：Lie摄动方法；超收敛摄动方法；非正则方法；共振的整体排除等在这本专著中都有

介绍。

习　　题

1．考虑一质量为 m 的质点在势能

$$V(r)=\frac{1}{2}(kr^2+\alpha/r^2),\quad (k>0,\ \alpha>0,\ r>0)$$

中的运动。试证明系统的能量和作用量有关系

$$E=E_0+2J\sqrt{k/m}\quad (E_0=\sqrt{k\alpha})$$

并由此推断运动的频率独立于振幅，为

$$\omega=2\sqrt{k/m}$$

此外，进一步证明 r 与角变量的关系为

$$r^2k=E+[E^2-k\alpha]^{1/2}\sin\theta$$

2．试求一质量为 m 的质点在周期性势能

$$V(\psi)=A\psi,\quad (0\leqslant\psi\leqslant\alpha<\pi)$$
$$=A\alpha,\quad (\alpha\leqslant\psi\leqslant\pi)$$
$$V(-\psi)=V(\psi)$$

中转动时的作用-角变量。并确定运动频率与能量 E 的关系。

3．试求具有 Hamilton 函数

$$H(q,p)=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2q^2$$

的线性振子在扰动

（a） $\varepsilon H_1=\varepsilon q^5$

（b） $\varepsilon H_1=\varepsilon(q^4+\alpha qp^2)$，其中 α 是常数

下运动的一阶近似解。

4．考虑 Hamilton 系统

$$H(q,p,t)=H_0(q,p)+\varepsilon H_1(q,p,t)$$

其中 H_0 是保守的 Hamilton 函数，εH_1 是依赖于时间的扰动。假设系统的未受扰运动已知为

$$q=f(Q,P,t-t_0),\ p=g(Q,P,t-t_0)$$

其中 (Q,P) 代表 $t=t_0$ 时的状态。把这两个方程看作是依赖于时间的正则变换，证明在 (Q,P) 表示中的 Hamilton 函数为

$$K(Q,P,t)=\varepsilon H_1(f(Q,P,t-t_0),\ g(Q,P,t-t_0),t)$$

并利用摄动法解系统在 (Q,P) 表示中的方程，由此证明在 (q,p) 表示中运动的近似解为

$$q=f(Q_0,P_0,t-t_0)+\varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial Q_0}\ \frac{\partial A}{\partial P_0}-\frac{\partial f}{\partial P_0}\ \frac{\partial A}{\partial Q_0}\right)$$

$$p=g(Q_0,P_0,t-t_0)+\varepsilon\left(\frac{\partial g}{\partial Q_0}\ \frac{\partial A}{\partial P_0}-\frac{\partial g}{\partial P_0}\ \frac{\partial A}{\partial Q_0}\right)$$

其中

$$A(Q_0,P_0,t,t_0)=\int_{t_0}^{t}H_1(f(Q_0,P_0,t'-t_0),\ g(Q_0,P_0,t'-t_0),t')\mathrm{d}t'$$

并且 $q(t_0)=Q_0,\ p(t_0)=P_0$ 。

5．试证明，如果 (θ,I) 满足

$$\dot{\theta}=\omega(I)\neq 0,\quad \dot{I}=\varepsilon g(\theta),\quad (0<\varepsilon\leqslant 1)$$

其中 $g(\theta)$ 是 θ 的周期是 2π 的周期函数，则

$$|I(t)-M(t)|<k\varepsilon \qquad (0<t<\varepsilon^{-1})$$

这里 k 是常数，并且

$$M(t)=I(0)+\varepsilon t\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right]$$

并利用下面几种情况加以直接验证

(a) $\omega=\text{const.}$, $g(\theta)=\sin\theta$。

(b) $\omega=\text{const.}$, $g(\theta)$是周期函数。

(c) $\omega=I\alpha$, α 是常数，$g(\theta)=\cos\theta$,

限制条件 $0<t<\varepsilon^{-1}$ 是否对这些情形是必须的？

6．质量为 M 的质点在如下的势能场中运动

$$V(q)=A(e^{-2\alpha q}-2e^{-\alpha q})$$

其中上式的 α 是正的常数。如果 A 很慢地变为 $2A$，证明运动的初始频率与终了频率的差是

$$\omega_i-\omega_f=\alpha\left(\frac{A}{M}\right)^{1/2}(\sqrt{2}-2)$$

参 考 文 献

〔1〕 朱照宣．非线性力学讲义．复旦大学，1984．

〔2〕 陈式刚．混沌：一种普遍的运动形式．百科知识，10，1989．

〔3〕 Lichterberg A J and Lieberman M A. Regular and stochastic motion. New York; Springer-Verlag, 1983.

〔4〕 Percival I and Richards D. Introdaction to dynamics. Cambridge University Press. 1982.

〔5〕 Lichtenberg A J. Phase space dynamics of particles, New York; Wiley, 1969.

〔6〕 Whittaker E T. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge University Press, 1904.

〔7〕 Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Paris; Gauthier-Villars, 1892.

〔8〕 Von Zeipel H. Ark. Astron. Mat. Fys. 11, No. 1, 1916.

〔9〕 Giacaglia G E O. Perturbation methods in nonlinear systems. Appl. Math. Sci. No. 8, Springer-Verlag, 1972.

〔10〕 Jaeger F and Lichtenberg A J. Ann. Phys. 71, 1972.

〔11〕 Колмогоров А Н. Докл. Акад. Наук. СССР, 1954.

〔12〕 Arnold V I. Russ. Math. Surveys, 18, 1963.

〔13〕 Moser J K. Math. Ann. 169, 1967.

〔14〕 Chirikov B V. Phys. Reports, 52, 1979.

〔15〕 Moser J K. Stable and random motions in dynamical systems. Princeton; Princeton University Press, 1973.

〔16〕 Moser J K. Ann. Acuola Normale Sup. Pisa Ser. III 20, 1966.

〔17〕 Birkhoff G D. Mem. Pont. Acad. Sci. Novi. Lyncaei, 1, 1935.

〔18〕 Arnold V I. Sov. Math. Dokl. 5, 1964.

〔19〕 Hénon M and Heiles C. Astron. J., 69, 1964.

〔20〕 Gustavson F. Astron. J., 21, 1966.

名 词 索 引

A

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

V

W

X

Y

Z